

Ю. В. Немировский

ВТОРОЕ ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск

Аннотация. Для полиметаллических круглых и кольцевых пластин из материалов с линейным упрочнением разработан метод определения второй предельной нагрузки (нагрузки предразрушения). В основу расчета положено представление о начале предразрушения полиметаллической конструкции в соответствии с концепцией слабейшего звена, когда достигается наименьшая для данного набора материалов предельная деформация предразрушения. В качестве физических законов деформирования материалов использовалась модель В. Прагера для линейно-упрочняющихся материалов с кусочно-линейным потенциалом Треска.

Ключевые слова: полиметаллические пластины, пластическое деформирование, линейно-упрочняющиеся материалы, кусочно-линейный потенциал Треска, предразрушение, первая и вторая предельные нагрузки.

УДК: 539.374

1. Введение. В последние десятилетия проводятся интенсивные исследования по созданию эффективных полиметаллических конструкций для различных отраслей промышленности и строительства. Наиболее простыми с технологической точки зрения являются приемы изготовления плоских полиметаллических пластин любых геометрических форм и размеров без серьезных ограничений по выбору материалов. Существующие технологические приемы (склеивание, сварка взрывом и диффузионная сварка, холодное газодинамическое или плазменное напыление) позволяет создавать плоские симметричные (рис. 1) и несимметричные (рис. 2) пакеты из практически любых наборов металлов и сплавов [1] [3].

В любой такой конструкции сохраняются индивидуальные свойства отдельных слоев, но ее несущая способность может существенно изменяться в зависимости от выбора количества материалов, их расположения и относительных параметров толщин слоев. В рамках модели идеальных жестко-пластических материалов задача рационального подбора материалов полиметаллических проград была рассмотрена в [4]. Однако, многие металлические материалы и сплавы обладают свойством существенного упрочнения и предельная нагрузка полиметаллической конструкции может оказаться в реальности слишком заниженной. В связи с этим для таких конструкций было предложено ввести второе предельное состояние [5], при котором в соответствии с концепцией слабейшего звена какой-либо из материалов достигнет предельной деформации предразрушения. Соответствующие решения рассматривались для полиметаллических балок. В данной работе предлагается рассмотреть аналогичную задачу для круглых и кольцевых пластин.

Поступила 08.02.2015

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14-01-00102.

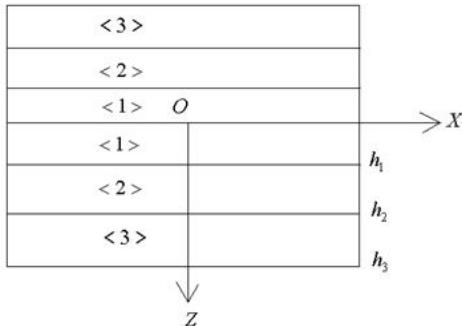


Рис. 1

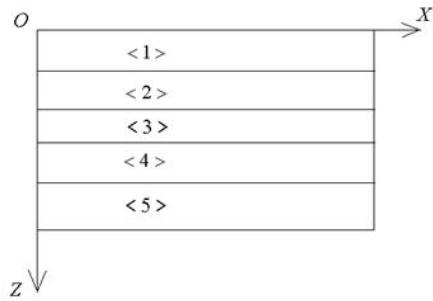


Рис. 2

2. Формулировка основных уравнений. Будем рассматривать круговые или кольцевые полиметаллические пластины в условиях осесимметричного изгиба при симметричном расположении слоев относительно срединной поверхности. Для удобства и единобразия законов деформирования, будем описывать модели деформирования всех материалов в рамках модели изотропного линейно-упрочняющегося материала с кусочно-линейным потенциалом в форме Треска (рис. 3). Тогда связь напряжений и деформаций в соответствии с уравнениями В. Прагера [6] для различных режимов будет определяться равенствами:

$$\begin{aligned}
 AB : \quad & \sigma_2 = \sigma_0 + d\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 > 0 \\
 A : \quad & \sigma_1 = \sigma_0 + d\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + d\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 \geq 0, \quad \varepsilon_2 \geq 0 \\
 AF : \quad & \sigma_1 = \sigma_0 + d\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 = 0 \\
 BC : \quad & \sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_0 + 2d\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 > 0 \\
 CD : \quad & \sigma_1 = -\sigma_0 + d\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 < 0, \quad \varepsilon_2 = 0 \\
 DE : \quad & \sigma_2 = -\sigma_0 + d\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 < 0 \\
 EF : \quad & \sigma_2 - \sigma_1 = -(\sigma_0 + 2d\varepsilon_2), \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 < 0 \\
 \sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_0}, \quad & \sigma_2 = \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_0}, \quad d = \frac{\bar{d}}{\bar{\sigma}_0}, \quad \sigma_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\sigma}_0}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

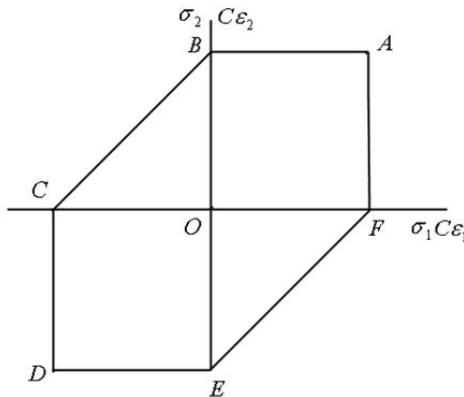


Рис. 3

Здесь $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, ε_1 , ε_2 — главные напряжения и деформации, \bar{d} , $\bar{\sigma}_0$ — коэффициент линейного упрочнения и предел текучести материала, $\bar{\sigma}_0^0$ — обезразмеривающий предел текучести. Будем рассматривать полиметаллические пластины симметричной структуры (рис. 1). Тогда

для деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и безразмерных изгибающих моментов M_1, M_2 будем иметь выражения:

$$\varepsilon_1 = z\kappa_1, \quad \varepsilon_2 = z\kappa_2, \quad (2)$$

$$M_1 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{1i} z dz, \quad M_2 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{2i} z dz, \quad (3)$$

$$\kappa_1 = -w'', \quad \kappa_2 = -\frac{1}{x}w', \quad (4)$$

$$z = \frac{\bar{z}}{H_0}, \quad w = \frac{\bar{w}\bar{H}_0}{R^2}, \quad h_i = \frac{\bar{h}_i}{\bar{H}_0}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad M_1 = \frac{\bar{M}_r}{\sigma_0 \bar{H}_0^2},$$

где \bar{w}, r, R — прогиб, текущий радиус и внешний радиус пластиинки, \bar{h}_i, \bar{H}_0 — координаты раздела слоев по толщине и обезразмеривающий параметр толщины пластины, штрих обозначает производную по безразмерной координате x .

Закон деформирования для рассматриваемых полиметаллических пластин в плоскости M_1, M_2 будет соответствовать шестиугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на рис. 4, где для режимов $A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, E_1F_1, F_1A_1$ будем иметь

$$\begin{aligned} A_1 : \quad & M_1 = M_0 + D_0\kappa_1, \\ & M_2 = M_0 + D_0\kappa_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_1B_1 : \quad & M_2 = M_0 + D_0\kappa_2, \\ & 0 \leq M_2 \leq M_0 + D_0\kappa_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A_1F_1 : \quad & M_1 = M_0 + D_0\kappa_1, \\ & 0 \leq M_2 \leq M_0 + D_0\kappa_2. \end{aligned} \quad (7)$$

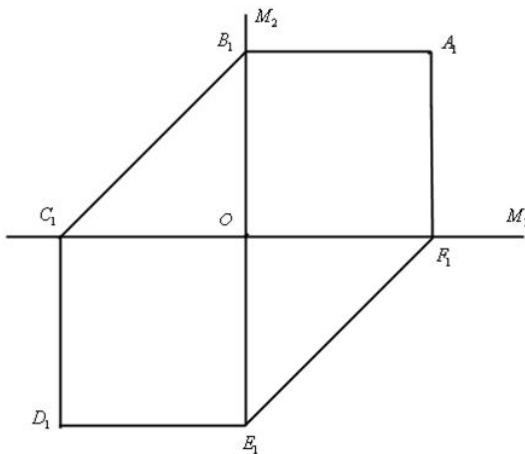


Рис. 4

В выражениях (5)–(7):

$$M_0 = \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} (h_i^2 - h_{i-1}^2), \quad D_0 = \sum_{i=1}^n d_i (h_i^2 - h_{i-1}^2). \quad (8)$$

Изгибающие моменты должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$(xM_1)' - M_2 = Q \cdot x, \quad (Q \cdot x)' + px = 0, \quad p = \frac{\bar{q}R^2}{\bar{\sigma}_0 \bar{H}_0^2}, \quad Q = \frac{\bar{Q}R}{\bar{\sigma}_0 \bar{H}_0^2}. \quad (9)$$

3. Кольцевая шарнирно-оперта по наружному контуру пластинка со свободным внутренним контуром x_0 . Рассмотрим в качестве примера задачу о равномерно нагруженной кольцевой пластинке $x_0 \leq x \leq 1$, шарнирно опертой на нагруженном контуре $x = 1$. В этом случае выполняются граничные условия:

$$Q(x_0) = 0, \quad M_1(x_0) = M_1(1) = 0, \quad w(1) = 0 \quad (10)$$

и решением задачи в области $x_0 \leq x \leq 1$ будет соответствовать режиму A_1B_1 , для которого

$$w''(x) = 0 \text{ и } M_2 = M_0 + D_0 \kappa_2. \quad (11)$$

Тогда, учитывая выражения (4), (8), (9) для пластин постоянной толщины, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой p , получим выражения

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{(1-x)}{(1-x_0)} w_0, \quad \kappa_2 = \frac{w_0}{(1-x_0)x}, \\ M_2 &= M_0 + \frac{D_0 w_0}{(1-x_0)x}, \quad Q \cdot x = -p(x^2 - x_0^2), \\ M_1 &= \frac{1}{x} \left[M_0(x-x_0) + \frac{D_0 w_0}{(1-x_0)} \ln \frac{x}{x_0} - \frac{p}{6} (x^3 - 3x x_0^2 + 2x_0^3) \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь граничным условием $M_1(1) = 0$, получим в предельном состоянии зависимость максимального прогиба w_0 от давления p :

$$M_0(1-x) - \frac{D w_0}{(1-x_0)} \ln x_0 - \frac{p(1-2x_0^2+2x_0)}{6} = 0. \quad (12)$$

В соответствии с концепцией слабейшего звена, второе предельное состояние будет достигнуто при реализации условия

$$\max_{x_0 \leq x \leq 1} h_k \kappa_2(x) = \varepsilon_k^*, \quad (13)$$

$$\varepsilon_k^* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*),$$

где $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*$ — предельные деформации материалов соответствующих слоев. Для рассматриваемой задачи условие (13) будет иметь вид:

$$\frac{w_0^*}{(1-x_0)} = \frac{\varepsilon_k^* x_0}{h_k}. \quad (14)$$

И тогда из (12) получим выражения второй предельной нагрузки:

$$p_2^* = p_1^* - \frac{6D_0 \varepsilon_k}{h_k} \frac{x_0 \ln x_0}{(1-3x_0^2+2x_0^3)}, \quad (15)$$

где

$$p_1^* = \frac{6M_0(1-x_0)}{(1-3x_0^2+2x_0^3)} \quad (16)$$

соответствует первой предельной нагрузке, когда материалы всех слоев будут идеально-пластическими.

4. Шарнирно-опертая пластинка без отверстия. Для шарнирно-опертой пластинки без отверстия, погруженной равномерно распределенным давлением p , при наличии в материалах упрочнения, в пластинке, очевидно, будет существовать два пластических состояния: режим A_1 в области $0 \leq x \leq x_1$ и режим A_1B_1 в области $x \leq x_1 \leq 1$. При этом должны выполняться граничные условия:

$$w'(0) = Q(0) = w_1(1) = M_1(1) = 0, \quad w(0) = w_0, \quad (17)$$

$$[Q]_{x_1} = [w]_{x_1} = [w']_{x_1} = [w]_{x_1} = [M_1]_{x_1} = 0, \quad (18)$$

где символ $[...]_{x_1}$ обозначает скачок соответствующей функции на границе $x = x_1$ раздела пластических состояний. Интегрируя уравнения равновесия (9), с учетом выражений (5), (6) и условия (17), (18), получим следующие выражения для прогибов w и изгибающих моментов M_1

$$w(x) = \begin{cases} \frac{p}{64D_0} (8x_1^3 - 3x_1^4 - 6x_1^2x^2 + 4^4), & 0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{px_1^2}{64D_0} (1-x), & x_1 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (19)$$

$$M_1(x) = \begin{cases} M_0 + \frac{3}{16} (x_1^2 - x^2), & 0 \leq x \leq x_1 \\ M_0 (1 - \frac{1}{x}) + \frac{px_1^2}{8x} \ln x + \frac{p}{6} (\frac{1}{x} - x^2), & x_1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Из условия $M_1(x_1) = M_0$ получим уравнение для границы x_1 пластических состояний

$$p \left(1 - x_1^2 + \frac{3}{4} x_1 \ln x_1 \right) = 6M_0. \quad (21)$$

При $x_1 \rightarrow 0$ отсюда получим значение первой предельной нагрузки

$$p_1^* = 6M_0. \quad (22)$$

Второе предельное состояние p_2^* будет достигнуто при выполнении условия

$$h_k \kappa_1(0) = h_k \kappa_2(0) = \varepsilon_k^*,$$

которое при учете выражений (4) и (19) примет вид

$$\frac{3p_2^* x_1^2}{16D_0} = \frac{\varepsilon_k^*}{h_k}. \quad (23)$$

Уравнение (21) при этом будет иметь вид

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \left[1 - \frac{4x_1^2 - 3x_1 \ln x_1}{4} \right]^{-1}. \quad (24)$$

Исключая из уравнений (23) и (24) p_2^* , получим уравнение для границы x_1 при достижении второго предельного состояния

$$4D_0 \varepsilon_k (4 - 4x_1^2 + 3x_1 \ln x_1) = 3p_1^* x_1^2 \quad (25)$$

После вычисления корня x_1 этого уравнения по формуле (23) определим значение второй предельной нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Fleck, J. Explosive welding of composite materials / J. Fleck, A. Laber, R. Leonard // J. Compos. Mater. – 1969. – Vol. 3. – № 4. – P. 669–701.
- [2] Король, В. К. Основы производства многослойных материалов / В. К. Король, М. С. Гильденхорг. – М. : Металлургия, 1978. – 277 с.
- [3] Дерибас, А. А. Физика прочности и сварки взрывом / А. А. Дерибас. – Новосибирск : Наука, 1977. – 188 с.
- [4] Немировский, Ю. В. Рациональное проектирование плоских преград при воздействии взрывных нагрузок // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф : труды VII Всероссийской научной конференции (Красноярск, 13–17 окт. 2003 г.). Красноярск, 2003. Т. 1. С. 191–194.
- [5] Немировский, Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок / Ю. В. Немировский // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1. – С. 150–159.
- [6] Прагер, В. Новый метод анализа напряжений и деформаций в пластических телах, обладающих упрочнением / В. Прагер // Механика. – 1957. – № 5. – С. 124–129.

Немировский Юрий Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Y. V. Nemirovsky

LIMITING ELASTIC STATE OF COMPRESSED RING PLATES WITH VARIOUS STRUCTURES OF REINFORCING

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich SB RAS, Novosibirsk

Abstract. Limiting elastic state of ring curvilinear reinforced plates with various structures of reinforcing such as radial-peripheral, spiral and mixed one is considered. Conditions of limiting elastic state are formulated. Statements of flat stresses problem and buckling problem in terms of polar coordinate system are presented. The critical loads are determined for various laws of reinforcement and estimations of efficiency for various structures are presented.

Keywords: buckling, composite plate, structures of reinforcement, radial orthotropy.

REFERENCES

- [1] Fleck, J. Explosive welding of composite materials / J. Fleck, A. Laber, R. Leonard // J. Compos. Mater. – 1969. – Vol. 3. – № 4. – P. 669–701.
- [2] Korol, V. K. Bases of production of multilayered materials / V. K. Korol, M. S. Gildengorg. – M. : Metallurgy, 1978. 277 p. (in Russian)
- [3] Deribas, A. A. Physics of durability and welding by explosion / A. A. Deribas. – Novosibirsk : Nauka, 1977. – 188 p. (in Russian)
- [4] Nemirovsky, Yu. V. Rational design of flat barriers at influence of explosive loadings // Modern methods of mathematical modeling natural and anthropogenous disasters : works VII of the All-Russian scientific conference (Krasnoyarsk, 13–17 October 2003). – Krasnoyarsk, 2003. – Vol. 1. – P. 191–194. (in Russian)
- [5] Nemirovsky, Yu. V. Second limit condition of uniform and composite beams / Yu. V. Nemirovsky // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2009. № 1. P. 150 159. (in Russian)
- [6] Prager, V. New method of the analysis of tension and deformations in the plastic bodies possessing hardening / V. Prager // Mechanics. – 1957. – № 5. – P. 124–129. (in Russian)

Nemirovsky, Yuri Vladimirovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk