

Б. Г. Миронов, Т. В. Митрофанова

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Кручение представляет собой один из видов деформации тела, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений стержня под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. В работе исследовано предельное состояние цилиндрического анизотропного стержня при кручении. Построено поле характеристик основных соотношений, найдены огибающие семейства характеристик. Определены соотношения вдоль характеристик. Полученные результаты могут быть применены при решении новых задач теории предельного состояния.

Ключевые слова: кручение, цилиндрический стержень, анизотропия, напряжение, огибающая.

УДК: 539.375

Рассмотрим анизотропный цилиндрический стержень, ориентированный в декартовой системе координат xuz , причем образующие стержня направлены параллельно оси z . Предположим, что стержень закручивается вокруг своей оси.

Пусть напряженное состояние стержня характеризуется условием пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты напряжений в декартовой системе координат.

К соотношению (1) присоединим три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1), (2) является статически неопределимой. Предположим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \quad (3)$$

С учетом (3) из (1) и (2) получим

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0, \quad (4)$$

Поступила 08.02.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179).

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

где τ_{xz}, τ_{yz} — касательные напряжения, зависящие от x и y .

Согласно [1] характеристики соотношения (4), (5) ортогональны вектору градиента к поверхности течучести в соответствующей точке.

Рассмотрим случай, когда условие (4) имеет вид

$$A\tau_{xz}^2 + B\tau_{yz}^2 = 1. \tag{6}$$

Условие (6) перепишем в виде

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{A}}, b = \frac{1}{\sqrt{B}}$.

Условие пластичности (7) в плоскости напряжений соответствует эллипс (рис. 1б).

Так как боковая поверхность стержня свободна от усилий, то вектор касательного напряжения направлен по касательной к контуру L , где L — контур поперечного сечения стержня плоскостью $z = \text{const}$.

Рассмотрим стержень, контур поперечного сечения которого есть эллипс (рис. 1а)

$$L : \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1. \tag{8}$$

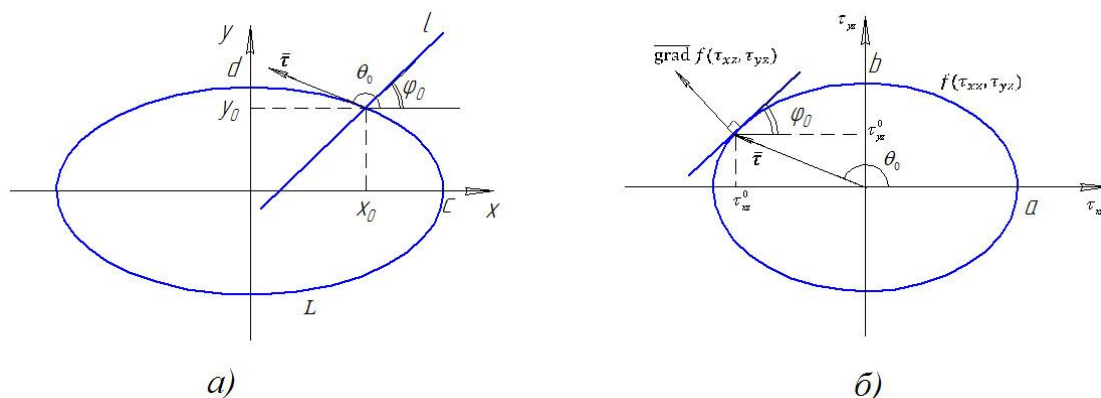


Рис. 1

Пусть $(x_0, y_0) \in L$ и через точку (x_0, y_0) проходит характеристика l . Следовательно,

$$\text{tg}\theta_0 = \frac{\tau_{yz}^0}{\tau_{xz}^0} = -\frac{d^2}{c^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}, \tag{9}$$

где θ_0 — угол, который образует вектор касательного напряжения τ с осью Ox .

Тогда получим

$$\text{tg}\varphi_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\tau_{xz}^0}{\tau_{yz}^0} = \frac{b^2 c^2}{a^2 d^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}, \tag{10}$$

где φ_0 — угол наклона характеристики к оси Ox .

Из (10) уравнение семейства характеристик l примет вид

$$y = y_0 + \frac{b^2 c^2}{a^2 d^2} \cdot \frac{y_0}{x_0} (x - x_0). \quad (11)$$

Уравнения огибающей данного семейства характеристик имеет вид

$$y = \pm \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c}{d} \left(\frac{(b^2 c^2 - a^2 d^2)}{\frac{4}{b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}}}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

В частности, когда поперечное сечение стержня представляет собой окружность ($c = d = 1$), уравнение огибающей имеет вид [2].

В изотропном случае, когда $a = b = 1$, уравнение огибающей примет вид

$$y = \pm \frac{c}{d} \left(\frac{c^2 - d^2}{c^{\frac{4}{3}}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (13)$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Деревянных, Е. А. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.

[2] Миронов, Б. Г. О кручении цилиндрических анизотропных стержней / Б. Г. Миронов, Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 9. – С. 150–155.

[3] Миронов, Б. Г. О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 98–101.

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: rektorat@chdpu.edu.ru

Митрофанова Татьяна Валерьевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru

B. G. Mironov, T. V. Mitrofanova

THE QUESTION OF TORSION ANISOTROPIC BARS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. Torsion is a type of deformation of the body, characterized by the relative rotation of the cross-sections of the rod under the influence of moments acting in these sections. We have investigated the limiting condition anisotropic cylindrical rod under torsion. Constructed field characteristics of the fundamental relations, found the envelope of performance. The relationships along the characteristics. The results can be applied to solve new problems in the theory of a limiting condition.

Keywords: torsion, a cylindrical bars, anisotropy, stress envelope.

REFERENCES

- [1] *Derevyannih, E. A.* About the general ratios of the theory of torsion of anisotropic cores / E. A. Derevyannih, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2012. – № 4 (76). – P. 108–112. (in Russian)
- [2] *Mironov, B. G.* About torsion of cylindrical anisotropic cores / B. G. Mironov, T. V. Mitrofanova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 9. – P. 150–155. (in Russian)
- [3] *Mironov, B. G.* About torsion of the prismatic cores which are under the influence of pressure linearly changing along the forming / B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2006. – № 1 (48). – P. 98–101. (in Russian)

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mitrofanova, Tataina Valeryevna

PhD, Associate Professor, Department of Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary