

Д. А. Аbruков

**ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМИ  
ПРОДОЛЬНЫМИ КРАЯМИ, НА ТОРЦАХ КОТОРОЙ ЗАДАНЫ  
ОБОБЩЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩИЕ  
МОМЕНТЫ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г.  
Чебоксары*

**Аннотация.** Построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба тонкой пластины прямоугольной формы, продольные стороны которой свободны. Рассмотрено два случая: а) на торцах заданы ненулевые изгибающие моменты и нулевые обобщенные поперечные силы; б) на торцах заданы ненулевые обобщенные поперечные силы и нулевые изгибающие моменты. Решение представляется в рядах по функциям Фадля – Папковича. Искомые коэффициенты рядов находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

**Ключевые слова:** изгиб пластины, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+624.073

**Актуальность исследуемой проблемы.** В статьях [1]–[3] изучались свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в обычном смысле [1]. Поэтому разложения по ним невозможно построить, опираясь на классический аппарат теории базиса функций [7]. Решению краевой задачи предшествует изучение, так называемых, разложений Лагранжа [1], [8]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлона – Рибьера. Аналогичная ситуация имеет место и в теории изгиба тонких пластин. Точные аналитические решения краевой задачи изгиба тонкой пластины, продольные стороны которой свободны от закрепления, а на двух других приложены обобщенные перерезывающие силы и моменты, до настоящего времени не были найдены.

---

Поступила 08.03.2015

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-13-00118.

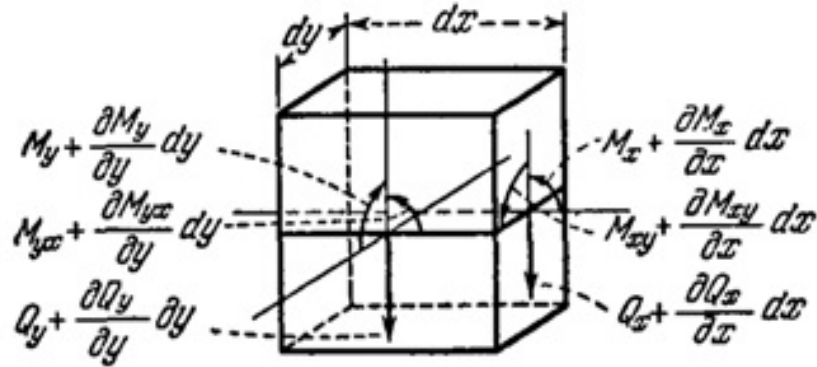


Рис. 1

**Материал и методика исследований.** Рассмотрим пластину, отнесенную к декартовым координатам  $x, y$ . Элемент пластины с внутренними силовыми факторами, соответствующими классической теории изгиба тонких пластин, показан на рис. 1. Дифференциальные уравнения равновесия можно записать в таком виде [5], [8]

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x, y) = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + T_x = 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $P(x, y)$  — произвольная поперечная нагрузка (далее  $P(x, y) = 0$ ),  $Q_x, Q_y$  — поперечные силы,  $M_x, M_y, M_{xy}$  — изгибающие и крутящий моменты. Функции

$$T_x(x, y) = \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} - Q_x(x, y), \quad T_y(x, y) = \frac{\partial M_y(x, y)}{\partial y} - Q_y(x, y). \quad (2)$$

Моменты и углы поворота  $\Phi_x, \Phi_y$  можно выразить через прогиб  $w = w(x, y)$ :

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy}(x, y) &= -M_{yx}(x, y) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \Phi_x(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона, а

$$D = \frac{E\rho^3}{12(1 - \nu^2)}$$

— цилиндрическая жесткость пластины ( $E$  — модуль упругости,  $\rho$  — толщина пластины).

Кроме того,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (4)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа на плоскости.

Подставляя выражения (4) в первое из уравнения (1) получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = P(x, y). \quad (5)$$

Помимо обычных сил  $Q_x, Q_y$  вводятся также обобщенные в смысле Кирхгоффа поперечные силы

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем строить решение, пользуясь методом начальных функций [4], позволяющим эффективно получать выражения для функций Фадля — Папковича.

Рассмотрим пластину  $\{ \Pi : |x| \leq l, |y| \leq h \}$  со свободными от закрепления краями  $y = \pm h$ :

$$M_y(x, \pm h) = K_y(x, \pm h) = 0. \quad (7)$$

Решение задачи будем искать с разделением на симметричное и обратно симметричное относительно линии симметрии пластины  $y = 0$ . Далее рассмотрена только симметричная задача. Решение строится методом разделения переменных в виде разложений по собственным функциям краевой задачи, так называемым, функциям Фадля — Папковича.

Функции Фадля — Папковича точно удовлетворяют красным условиям (7), а собственные числа являются корнями трансцендентного характеристического уравнения

$$L(\lambda) = -\frac{1}{4}(\nu - 1)\lambda^3 (2(\nu - 1)\lambda h + (\nu + 3) \sin 2\lambda h) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) помимо четырех нулевых имеет два действительных корня  $\pm \lambda_1$  и бесконечное множество комплексных корней  $\{ \pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k \}_{k=2}^{\infty} = \Lambda$ . Ниже для иллюстрации приведены значения пяти первых ненулевых корней уравнения (8) при  $h = 2, \nu = \frac{1}{3}$ , принадлежащих первой координатной четверти (табл. 1).

Таблица 1

№ корня $\lambda_k$	$Re \lambda_k$	$Im \lambda_k$
1	0,6489347699124498204415	0
2	1,920926875876095578757	0,2534177319545075720067
3	3,502055248275297722192	0,4246957870594158390368
4	5,078718900627479816160	0,5213277636781326527900
5	6,653374600317019693510	0,5900791876440081757655

Для определения точных значений комплексных корней нужно воспользоваться следующей асимптотической формулой (принципы построения асимптотических формул для корней трансцендентных уравнений можно найти в книге [6])

$$\lambda_{k+1} \approx \frac{1}{h} \left[ k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(4\zeta k\pi)}{4k\pi} \right] + i \frac{1}{h} \left[ \frac{\ln(4\zeta k\pi)}{2} + \frac{1}{2k} \right], \quad (9)$$

$$\zeta = \frac{1-\nu}{3+\nu}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее корни  $\pm\lambda_1$  будем рассматривать как комплексные, а в конечных выражениях перейдем к пределу, полагая, что мнимые части этих корней стремятся к нулю.

Формулы прогиба, угла поворота, изгибающего момента и обобщенной поперечной силы с учетом соотношений (3), (6) имеют вид ( $Re\lambda_k < 0$ ,  $W(x, y) = Dw(x, y)$ ):

$$W(x, y) = 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x),$$

$$\Phi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \phi_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x), \quad (10)$$

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k m_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x),$$

$$K_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \chi_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x).$$

где

$$\omega(\lambda_k, y) = \frac{1}{2} \lambda_k [(\nu + 1) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) +$$

$$+(\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y);$$

$$\phi_y(\lambda_k, y) = \frac{\nu - 1}{2} \lambda_k^2 [\lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - (\lambda_k h \cos(\lambda_k h) + \sin(\lambda_k h)) \sin(\lambda_k y)];$$

$$m_y(\lambda_k, y) = -\frac{1}{2} \lambda_k^3 (\nu - 1) [(\nu + 3) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) +$$

$$+(\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y); \quad (11)$$

$$\chi_y(\lambda_k, y) = \frac{(\nu - 1)^2}{2} \lambda_k^5 [y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - h \cos(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)]$$

– функции Фадля – Папковича.

Выражения для прочих факторов можно получить по формулам (2)–(4), (6), (7):

$$M_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x),$$

$$M_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x),$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x(x, y) &= 6h\nu C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \phi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x) , \\
K_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x) , \\
Q_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k q_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x) , \\
Q_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k q_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x) , \\
T_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k t_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k t_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x) , \\
T_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k t_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k t_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x) ,
\end{aligned} \tag{12}$$

в которых

$$\begin{aligned}
m_x(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{2} \lambda_k^3 \left\{ \left[ \lambda_k^h \cos(\lambda_k h) - \sin(\lambda_k h) \right] \cos(\lambda_k y) + \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \right\} ; \\
m_{xy}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)}{2} \lambda_k^3 \left\{ (\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - \right. \\
&\quad \left. - [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \right\} ; \\
\phi_x(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} \lambda_k^2 \left\{ [(\nu + 1) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k^h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \right. \\
&\quad \left. + (\nu - 1) \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \right\} ; \\
\chi_x(\lambda_k, y) &= \frac{\nu - 1}{2} \lambda_k^4 \left\{ [(\nu - 5) \sin(\lambda_k h) - (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - \right. \\
&\quad \left. - (\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \right\} ; \\
q_x(\lambda_k, y) &= -(\nu - 1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y); \quad q_y(\lambda_k, y) = (\nu - 1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y); \\
t_x(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{2} \lambda_k^4 \left\{ [\sin(\lambda_k h) - \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \right\} ; \\
t_y(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)}{2} \lambda_k^4 \left\{ -(\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) + \right. \\
&\quad \left. + [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k y \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \right\} .
\end{aligned} \tag{13}$$

Функции  $\omega(\lambda, y)$ ,  $\phi_y(\lambda, y)$  и т. д., получающиеся из функций Фадля – Папковича путем замены  $\lambda_k$  комплексным параметром  $\lambda$ , называются порождающими [3].

При построении биортогональных систем функций пужно зпать первые члены разложений в ряды Тейлора по степеням  $\lambda$  порождающих функций, а так же функции  $L(\lambda)$ . Приведем их

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= -h(\nu^2 - 1)\lambda^4 + \frac{h^3(\nu + 3)(\nu - 1)}{3}\lambda^6 + \dots; \\
\omega(\lambda, y) &= h\nu\lambda^2 - \frac{h(2h^2\nu - h^2 + 3y^2)}{6}\lambda^4 + \dots; \\
\phi_y(\lambda, y) &= -hy\lambda^4 + \frac{hy(h^2\nu - y^2\nu + 2y^2)}{6}\lambda^6 + \dots; \\
m_y(\lambda, y) &= -(\nu^2 + 1)h\lambda^4 + \frac{h(\nu - 1)(h^2\nu + 3y^2)}{3}\lambda^6 + \dots; \\
\chi_y(\lambda, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{6}hy(h^2 - y^2)\lambda^8 - \frac{hy(h^4 - y^4)(\nu - 1)^2}{60}\lambda^{10} + \dots \\
m_x(\lambda, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{6}h(3y^2 - h^2)\lambda^6 + \frac{(\nu - 1)^2}{60}h(h^4 - 5y^4)\lambda^8 + \dots; \\
m_{xy}(\lambda, y) &= -hy(\nu - 1)\lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6}hy(h^2\nu - \nu y^2 + 2y^2)\lambda^7 + \dots; \\
\phi_x(\lambda, y) &= \nu h\lambda^3 + \frac{h}{6}(h^2 - 3y^2 - 2h^2\nu)\lambda^5 + \dots; \\
\chi_x(\lambda, y) &= -2h(\nu - 1)\lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6}h(h^2\nu - 3\nu y^2 + h^2 + 9y^2)\lambda^7 + \dots \\
q_x(\lambda, y) &= -h(\nu - 1)\lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6}h(h^2 + 3y^2)\lambda^7 + \dots; \\
q_y(\lambda, y) &= (\nu - 1)hy\lambda^6 - \frac{(\nu - 1)}{6}hy(h^2 + y^2)\lambda^8 + \dots; \\
t_x(\lambda, y) &= -\frac{(\nu - 1)^2}{6}h(3y^2 - h^2)\lambda^7 + \frac{(\nu - 1)^2}{60}h(5y^4 - h^4)\lambda^9 + \dots; \\
t_y(\lambda, y) &= (\nu - 1)yh\lambda^6 - \frac{(\nu - 1)}{6}hy(2y^2 + h^2\nu - \nu y^2)\lambda^8 + \dots
\end{aligned} \tag{14}$$

Уравнение для определения систем функций  $M_{xk}(y)$  биортогональных к  $m_x(\lambda_k, y)$  выглядит следующим образом [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y)M_{xk}(y)dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{15}$$

Функции  $M_{xk}(y)$  биортогональной системы можно представить в виде суммы финитных  $m_{xk}(y)$  (равных нулю вне отрезка  $|y| \leq h$ ) и нефинитных  $m_{xk}^*(y)$  частей.

Финитные части функций  $M_{xk}(y)$  имеют вид

$$m_{xk}(y) = \frac{\lambda_k \cos(\lambda_k y)}{2 \sin(\lambda_k h)} - \frac{1}{2}(\delta(y - h) + \delta(y + h)), \tag{16}$$

где  $\delta$  — дельта-функция. Они строятся следующим образом. Приняв в уравнении (15)  $\lambda = \frac{m}{h}\pi = q_m$ , для каждой пары номеров  $k, m = 1, 2, \dots$  получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(q_m, y) M_{xk}(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (17)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy &= -\frac{2\lambda_k (-1)^m \sin(\lambda_k h)}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \\ -\frac{(-1)^m q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} &= -(-1)^m - \frac{(-1)^m \lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} \end{aligned}$$

нетрудно подобрать функции  $m_{xk}(y)$  (см. (16)), удовлетворяющие уравнению (15).

Вводя обозначение

$$R_k(\lambda) = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2},$$

уравнения (15) можно переписать следующим образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y) M_{xk}(y) dy = R_k(\lambda). \quad (18)$$

С учетом уравнений и равенств (1<sub>2</sub>), (2<sub>1</sub>), (1<sub>3</sub>), (3<sub>3</sub>), (3<sub>4</sub>), (3<sub>5</sub>), (6<sub>1</sub>), (1<sub>1</sub>), (6<sub>2</sub>), (2<sub>1</sub>), а также выражений (10), (12) последовательно получим следующие уравнения для определения биортогональных систем для остальных факторов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t_x(\lambda, y) T_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} m_{xy}(\lambda, y) M_{xyk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} q_x(\lambda, y) Q_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} t_y(\lambda, y) T_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y) W_k(y) dy &= R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\lambda, y) \Phi_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\lambda, y) \Phi_{yk}(y) dy &= R_k(\lambda); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_x(\lambda, y) K_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} q_y(\lambda, y) Q_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \chi_y(\lambda, y) K_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} m_y(\lambda, y) M_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda). \end{aligned}$$

При  $\lambda = \lambda_m$  из уравнений (18), (19<sub>8</sub>), учитывая, что при  $\lambda \rightarrow \lambda_m L(\lambda) = L'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)$ , получаются, следующие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T m_x(\lambda_m, y) M_{xk}(y) dy &= \begin{cases} \frac{\lambda_m L'(\lambda_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\ \int_T \chi_x(\lambda_m, y) K_{xk}(y) dy &= \begin{cases} \frac{\lambda_m^2 L'(\lambda_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\ \int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y) \bar{M}_{xk}(y) dy &= \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_m L'(\bar{\lambda}_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\ \int_T \chi_x(\bar{\lambda}_m, y) \bar{K}_{xk}(y) dy &= \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_m^2 L'(\bar{\lambda}_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

где  $L'(\lambda_m)$  — производная функции  $L(\lambda)$ , определенная при  $\lambda = \lambda_m$ . Для комплексных значений  $\lambda$  прямую интегрирования  $(-\infty, \infty)$  в формулах (19) нужно заменить контуром  $T$ , лежащим в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  и составленным из отрезка мнимой оси  $y \in [-h, h]$  и луча  $x \in (-\infty, 0]$  [2].

Отметим, что для каждой пары номеров  $k, m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y) M_{xk}(y) dy &= \int_T m_x(\lambda_m, y) \bar{M}_{xk}(y) dy = 0; \\ \int_T \chi_x(\bar{\lambda}_m, y) K_{xk}(y) dy &= \int_T \chi_x(\lambda_m, y) \bar{K}_{xk}(y) dy = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь и далее функции  $\bar{M}_{xk}(y)$ ,  $\bar{K}_{xk}(y)$ , а также  $\bar{m}_{xk}(y)$ ,  $\bar{\chi}_{xk}(y)$ , в отличие от соответствующих функций без черты, зависят от  $\bar{\lambda}_k$ .

Удовлетворяя с помощью выражений (10), (12) граничным условиям, заданным на торцах пластины  $x = \pm l$ , приходим к задаче определения коэффициентов  $A_k$ ,  $\bar{A}_k$  из двух разложений по двум системам функций Фадля – Папковича

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ K_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k l), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $M_x(y) = M_x(\pm l, y)$ ,  $K_x(y) = K_x(\pm l, y)$  — заданные на торцах пластины изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Отметим, что функции  $M_x(y)$ ,  $K_x(y)$  — четные и самоуравновешенные, поскольку аналогичными свойствами обладает и соответствующие им функции Фадля – Папковича (13<sub>1</sub>), (13<sub>4</sub>).

Умножая равенства (21) соответственно на  $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$  и  $K_{xk}(y) + \bar{K}_{xk}(y)$  и интегрируя обе части полученных равенств по контуру  $T$ , с учетом соотношений (20), (20) для каждого помера  $k = 1, 2, \dots$ , получим систему алгебраических уравнений



$$\begin{aligned}\Delta_1^*(k) &= A_k N_k \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \bar{N}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ \Delta_2^*(k) &= \lambda_k A_k N_k \sinh(\lambda_k l) + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{N}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l),\end{aligned}\quad (23)$$

где

$$N_k = \frac{\lambda_k L'(\lambda_k)}{2}, \quad \bar{N}_k = \frac{\bar{\lambda}_k L'(\bar{\lambda}_k)}{2}; \quad (24)$$

$$\Delta_1^*(k) = \Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k), \quad \Delta_2^*(k) = \Delta_2(k) + \bar{\Delta}_2(k); \quad (25)$$

$$\Delta_1(k) = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xk}(y) dy, \quad \bar{\Delta}_1(k) = \int_{-h}^h M_x(y) \bar{m}_{xk}(y) dy; \quad (26)$$

$$\Delta_2(k) = \int_{-h}^h K_x(y) \chi_{xk}(y) dy, \quad \bar{\Delta}_2(k) = \int_{-h}^h K_x(y) \bar{\chi}_{xk}(y) dy, \quad (27)$$

а

$$\chi_{xk}(y) = -\frac{\lambda_k \cos(\lambda_k y)}{2 \sin(\lambda_k h)} + \frac{1}{2}(\delta(y-h) + \delta(y+h)). \quad (28)$$

Функции  $\chi_{xk}(y)$  строятся подобно функциям  $m_{xk}(y)$  (см. (16)), но уже на основе (19<sub>3</sub>).

Умножим первое уравнение системы (22) на  $\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l)$  и вычтем из него второе уравнение, умноженное на  $\cosh(\bar{\lambda}_k l)$ . Тогда для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$  найдем

$$A_k = \frac{\Delta_2^*(k) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \Delta_1^*(k) \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l)}{N_k \eta_k}, \quad (29)$$

$$\eta_k = \lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l). \quad (30)$$

Наконец, подставляя выражения (29) в соотношения (10), (12), получим окончательное решение рассматриваемой задачи.

Для *симметричной* относительно оси  $y$  краевой задачи, когда на торцах  $x = \pm l$  (рис. 2) заданы самоуравновешенные изгибающие моменты, а обобщенные поперечные силы равны нулю, система уравнений (21) примет вид:

$$\begin{aligned}M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k l).\end{aligned}\quad (31)$$

Учитывая, что в равенстве (23<sub>2</sub>) справедливо  $\Delta_2^*(k) = \Delta_2(k) = \bar{\Delta}_2(k) = 0$  для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$ , получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\Delta_1^*(k) &= A_k N_k \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \bar{N}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ 0 &= \lambda_k A_k N_k \sinh(\lambda_k l) + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{N}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l).\end{aligned}\quad (32)$$

Решая систему (29) аналогично системе (22), для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$  получим

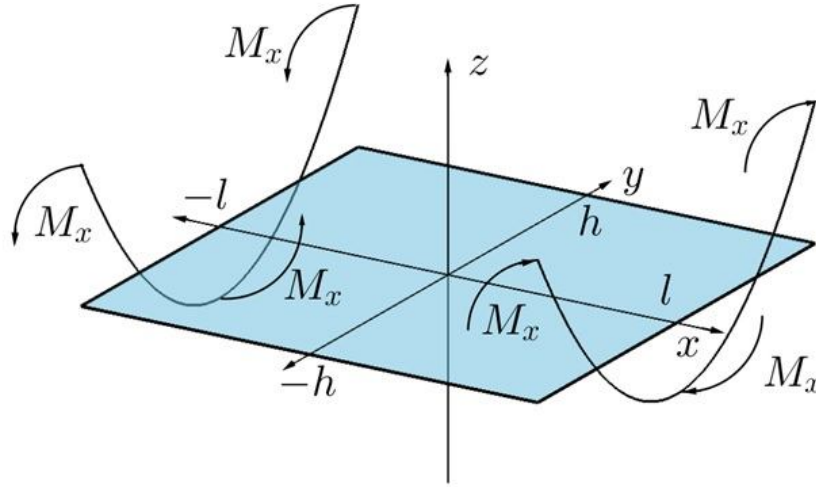


Рис. 2

$$A_k = -\frac{\Delta_1^*(k)(k)\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l)}{N_k \eta_k}. \quad (33)$$

Теперь нужно подставить (30) в равенства (10), (12), и выделить нуль-ряды в полученных выражениях. Покажем как это делается вначале на примере решения для полуполосы. В этом случае выражение, например, для  $M_y(x, y)$  имеет вид [9, (45)]

$$M_y(x, y) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left( \Delta_1^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y) \bar{\lambda}_k}{N_k} \frac{e^{\lambda_k x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \right) \quad (34)$$

Согласно (19<sub>11</sub>), нормирующий множитель соответствующий биортогональной системе  $M_{y_k}(y)$  имеет вид  $\lambda_k^2 N_k$ . Умножим числитель и знаменатель дроби (31) на  $\lambda_k^2$  так, чтобы получить  $\lambda_k^2 N_k$  в знаменателе выражения (31)

$$M_y(x, y) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left( \Delta_1^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\lambda_k e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} \right). \quad (35)$$

Вводя обозначения  $\lambda_k = a_k + ib_k$ , сделаем следующие преобразования под знаком суммы

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{1} \cdot \frac{\lambda_k e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} = \\ &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{2} \cdot \frac{a_k + ib_k}{b_k i} e^{a_k x} \{ \cos b_k x + i \sin b_k x \} = \\ &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{2} e^{a_k x} \left\{ \left( \cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) + i \left( \sin b_k x - \frac{c_k \cos b_k x}{b_k} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Спроектировав последнее равенство на вещественное подпространство, т. е. на сумму векторов  $M_{y_k}(y) + \bar{M}_{y_k}(y)$ , для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$  получим:

$$-2Re \left( \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k))\bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} \right) = -(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k))\bar{\lambda}_k \lambda_k e^{a_k x} \left( \cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right).$$

Итак, ненулевую часть ряда (32) в силу последнего равенства можно записать следующим образом

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k e^{a_k x} \left( \cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \right\}.$$

Замстим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -i(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k))\bar{\lambda}_k \lambda_k e^{a_k x} \left( \sin b_k x - \frac{a_k \cos b_k x}{b_k} \right) \frac{m_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}}{\lambda_k^2 N_k} \right\} = 0.$$

Учитывая, что для первого действительного корня  $\lambda_1$  справедливо  $b_k \rightarrow 0$ , получим

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{\lambda_k^2 N_k} e^{a_k x} \left( \cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}. \quad (36)$$

По аналогии с работой [10], сравнивая равенства (32) и (33), можно получить еще одну форму представления решения для полуполосы:

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{\lambda_k^2 N_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \quad (37)$$

Аналогично для других факторов полуполосы, получим, например

$$M_x(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{Im(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \quad (38)$$

$$K_x(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{\chi_x(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{\lambda_k N_k} \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \quad (39)$$

Напомним, что корень  $\lambda_1$  вещественен. Поэтому при вычислении соответствующих сумм в выражениях (33)–(39) нужно перейти к пределу при  $b_1 \rightarrow 0$ . Окончательные выражения решений для полуполосы приведены в работе [9].

Используем описанную выше схему для нахождения решений в случае прямоугольной пластины. Так, например, подставляя выражения (33) в соотношения (10<sub>3</sub>) получим аналог соотношения (34)

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left( \Delta_1^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\bar{\lambda}_k \cosh(\lambda_k x) \sinh(\bar{\lambda}_k l)}{\lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)} \right). \quad (40)$$

Умножая числитель и знаменатель на  $\lambda_k^2$ , и повторяя предыдущие рассуждения, имеем

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left( \Delta_1^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \cosh(\lambda_k x) \sinh(\bar{\lambda}_k l)}{\lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)} \right), \quad (41)$$

а затем

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left( \Delta_1(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{Im \{ \lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \cosh(\lambda_k x) \sinh(\bar{\lambda}_k l) \}}{Im \{ \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l) \}} \right). \quad (42)$$

Подставляя выражения (33) в оставшиеся соотношения (10), (12), и для первого действительного корня  $\lambda_1$  полагая  $b_1 \rightarrow 0$ , получим формулы для прогиба, поперечных сил, углов поворота и моментов в прямоугольной пластине ( $a_k = Re \lambda_k$ ,  $b_k = Im \lambda_k$ ,  $a_k < 0$ ):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \frac{\omega(\lambda_1, y)}{N_1} \Delta(1)\Omega_{11}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\omega(\lambda_k, y)}{N_k} \Delta(k)\Omega_{12}(x) \right\}; \\ \Phi_y(x, y) &= \frac{\phi_y(\lambda_1, y)}{N_1} \Delta(1)\Omega_{11}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_y(\lambda_k, y)}{N_k} \Delta(k)\Omega_{12}(x) \right\}; \\ M_x(x, y) &= \frac{m_x(\lambda_1, y)}{N_1} \Delta(1)\Omega_{11}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \Delta(k)\Omega_{12}(x) \right\}; \\ \Phi_x(x, y) &= 6h\nu C_4 + \frac{\phi_x(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\}; \\ K_x(x, y) &= \frac{\chi_x(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\}; \\ T_x(x, y) &= \frac{t_x(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\}; \\ M_{xy}(x, y) &= \frac{m_{xy}(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\}; \\ Q_x(x, y) &= \frac{q_x(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{q_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\}; \\ M_y(x, y) &= \frac{m_y(\lambda_1, y)}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1)\Omega_{31}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k)\Omega_{32}(x) \right\}; \\ K_y(x, y) &= \frac{\chi_y(\lambda_1, y)}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1)\Omega_{31}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k)\Omega_{32}(x) \right\}; \\ T_y(x, y) &= \frac{t_y(\lambda_1, y)}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1)\Omega_{31}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k)\Omega_{32}(x) \right\}; \end{aligned} \quad (43)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{q_y(\lambda_1, y)}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \Omega_{31}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{q_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \Omega_{32}(x) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(x) &= \frac{2\{\sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) + \lambda_1 l \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - \lambda_1 x \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l}; \\ \Omega_{21}(x) &= \frac{2\lambda_1^2 \{l \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - x \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\Omega_{31}(x) = -\frac{2\lambda_1^2 \{\sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - \lambda_1 l \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) + \lambda_1 x \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l};$$

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(x) &= \frac{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}; & \Omega_{22}(x) &= \frac{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}; \\ \Omega_{32}(x) &= \frac{Im\{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}, & k &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (45)$$

В выражениях (45) под знаками  $Im$  стоят быстрорастущие функции, поэтому их нужно привести к виду, не приводящему к переполнению памяти компьютера:

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(x) &= \frac{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) c(\lambda_k, a_k)\}}; & \Omega_{22}(x) &= \frac{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) sx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) c(\lambda_k, a_k)\}}; \\ \Omega_{32}(x) &= \frac{Im\{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) c(\lambda_k, a_k)\}}, \end{aligned} \quad (46)$$

где ( $p, q$  — параметры)

$$\begin{aligned} s(p, q) &= \exp(pl + ql) - \exp(-pl + ql); \\ sx(p, q, x) &= \exp(px + ql) - \exp(-px + ql); \end{aligned} \quad (47)$$

$$c(p, q) = \exp(pl + ql) + \exp(-pl + ql);$$

$$cx(p, q, x) = \exp(px + ql) + \exp(-px + ql).$$

Теперь рассмотрим *обратно симметричную* относительно оси  $y$  деформацию прямоугольной пластины  $|x| \leq l, |y| \leq h$  (рис. 3). Для нее в соотношениях (45) надо заменить гиперболические функции синуса на косинус, а косинуса на синус. Тогда выражения для всех факторов примут вид (43), где

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(x) &= \frac{2\{\cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) + \lambda_1 l \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - \lambda_1 x \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l}; \\ \Omega_{21}(x) &= \frac{2\lambda_1^2 \{l \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - x \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l}; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\Omega_{31}(x) = -\frac{2\lambda_1^2\{\cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - \lambda_1 l \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) + \lambda_1 x \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l};$$

$$\Omega_{12}(x) = \frac{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = \frac{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = \frac{Im\{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (49)$$

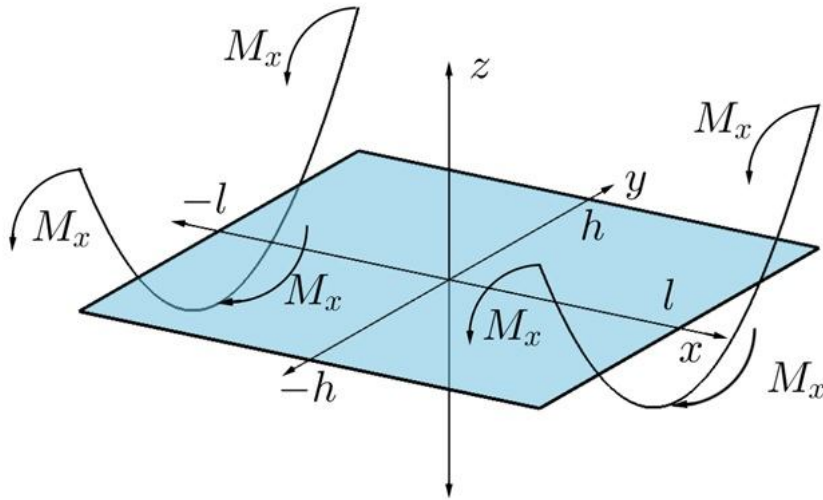


Рис. 3

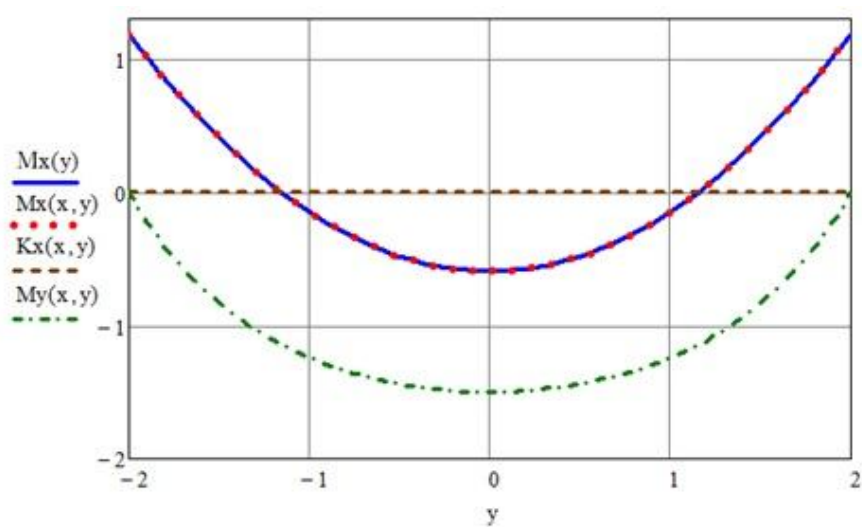
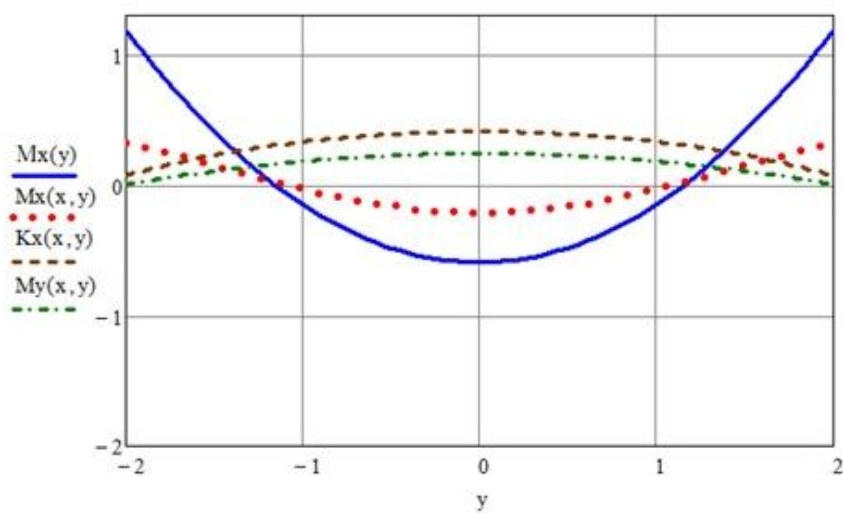
В выражениях (49) под знаками  $Im$  стоят быстрорастущие функции, поэтому их нужно привести к виду, не вызывающему переполнения памяти компьютера:

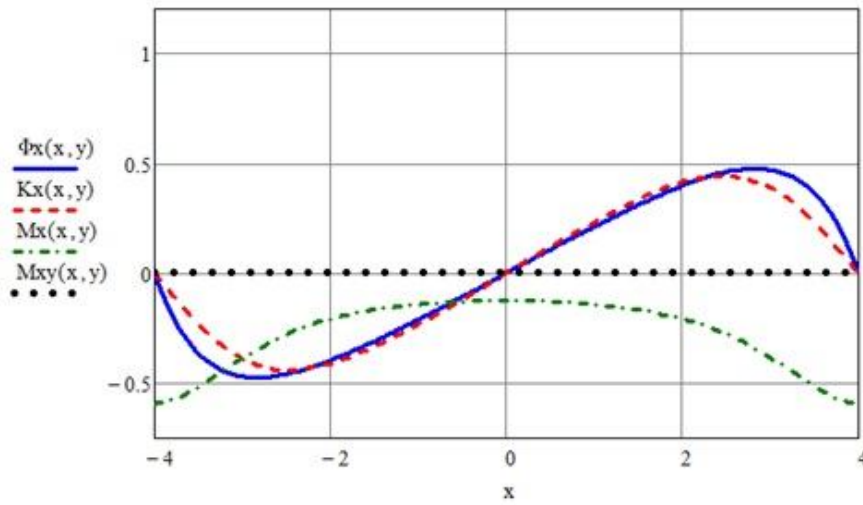
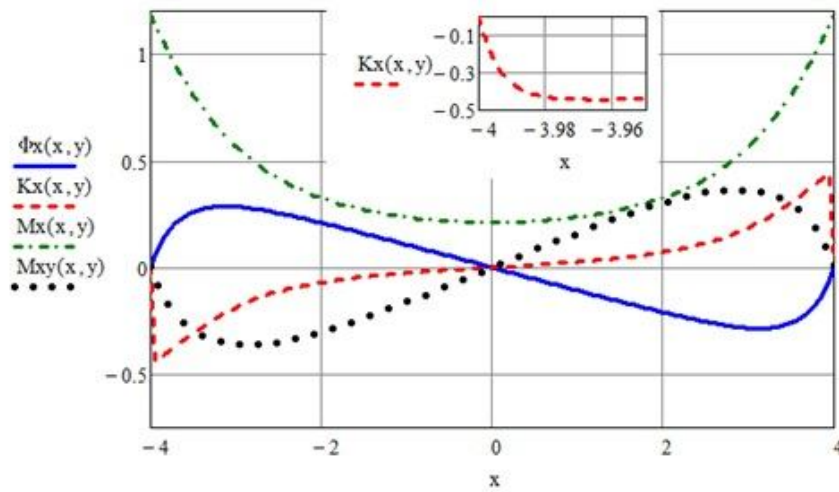
$$\Omega_{12}(x) = \frac{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s x(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = \frac{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) c x(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = \frac{Im\{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s x(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}}. \quad (50)$$

Приведем примеры расчетов при  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $h = 2$ ,  $l = 4$ ,  $\rho = 0,4$ ,  $E = 0,69 \cdot 10^5$  МПа (материал – катанный алюминий).

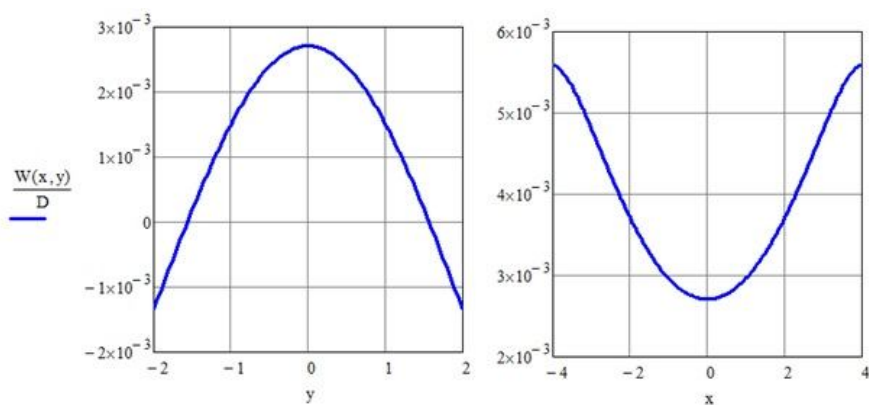
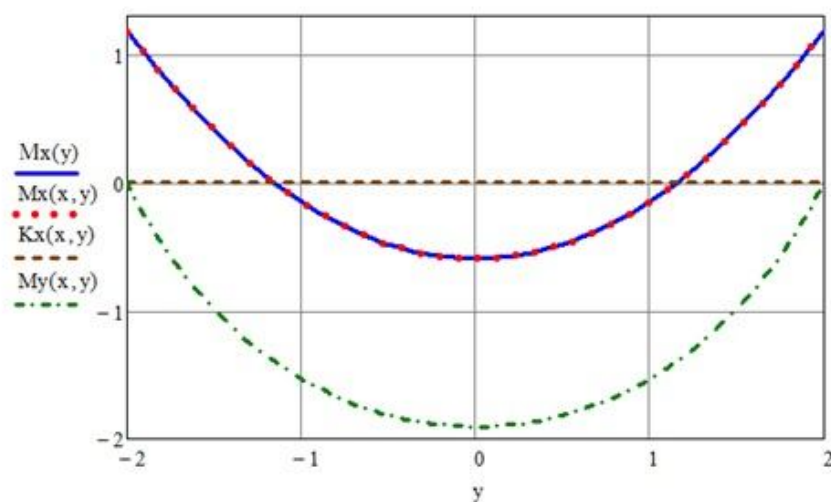
**Пример 1.** Симметричный случай.  $M_x(y) = \frac{h(\nu - 1)^2(3y^2 - h^2)}{6}$ . Сечения  $x = 4$  (рис. 4а) и  $x = 2$  (рис. 4б). Сечения  $y = 0$  (средняя линия пластины – рис. 5а) и  $y = 2$  (край пластины – рис. 5б). Сечения функции прогиба  $w(x, y)$  (рис. 6):  $x = 0$  (слева) и  $y = 0$  (справа).

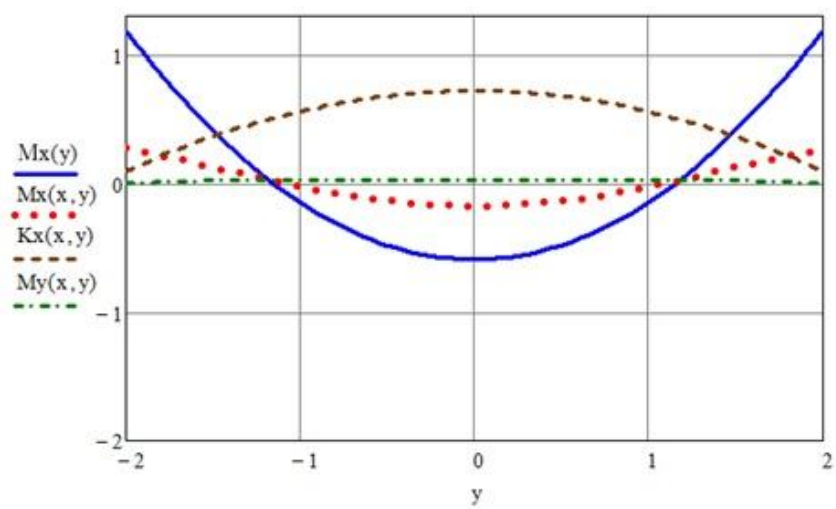
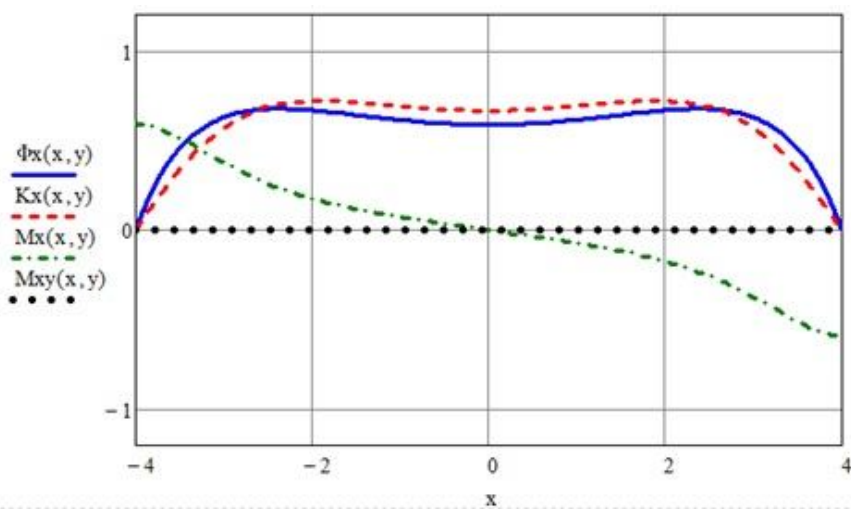
Рис. 4а. Сечение при  $x = 4$ Рис. 4б. Сечение при  $x = 2$

Рис. 5а. Сечение при  $y = 0$ Рис. 5б. Сечение при  $y = 2$ 

**Пример 2.** Обрато симметричный случай.  $M_x(y) = \frac{h(\nu - 1)^2(3y^2 - h^2)}{6}$ . Сечения  $x = 4$  (рис. 7а) и  $x = 2$  (рис. 7б). Сечения  $y = 0$  (средняя линия пластины — рис. 8а) и  $y = 2$  (край пластины — рис. 8б). Сечения функции прогиба  $w(x, y)$  (рис. 9):  $x = 0$  (слева) и  $y = 0$  (справа).



Рис. 6. Сечения функции прогиба  $w(x,y)$ :  $x = 0$  (слева) и  $y = 0$  (справа)Рис. 7а. Сечение при  $x = 4$

Рис. 7б. Сечение при  $x = 2$ Рис. 8а. Сечение при  $y = 0$

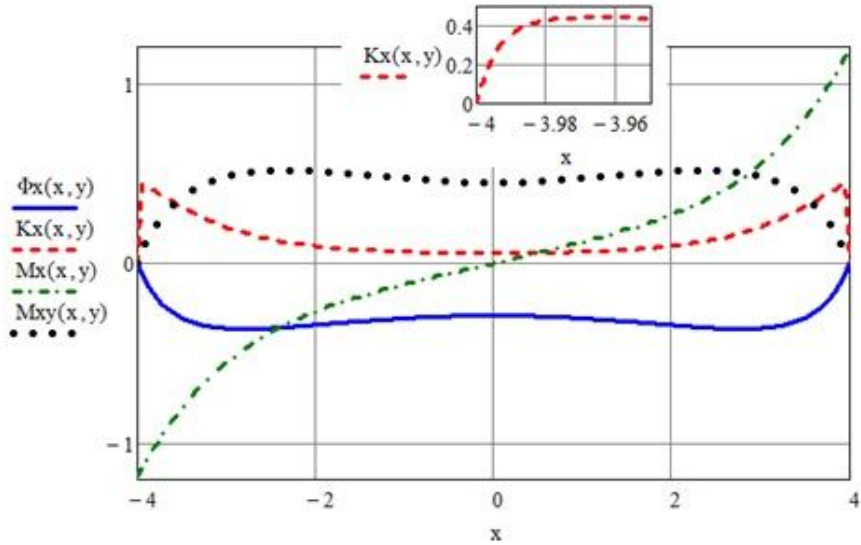


Рис. 86. Сечение при  $y = 2$

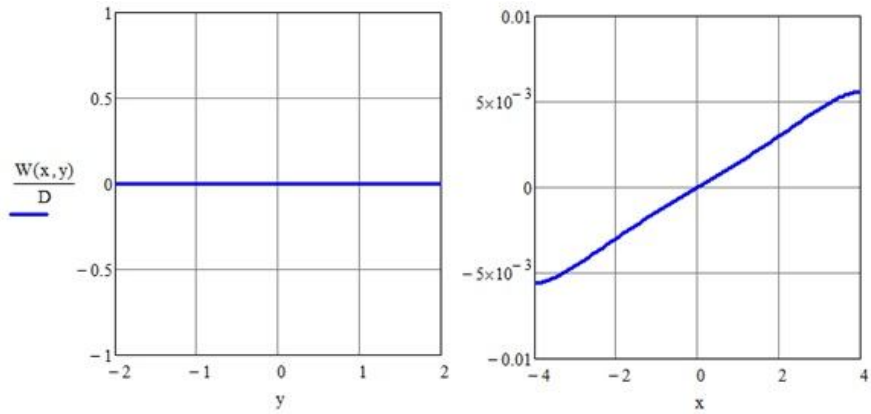


Рис. 9. Сечения функции прогиба  $w(x, y)$ :  $x = 0$  (слева) и  $y = 0$  (справа)

Для *симметричной* краевой задачи, когда на торцах  $x = \pm l$  (рис. 10) заданы самоуравновешенные обобщенные поперечные силы, а изгибающие моменты равны нулю, система уравнений (21) примет вид:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\
 K_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k l).
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

Учитывая, что в уравнениях (23<sub>1</sub>)  $\Delta_1^*(k) = \Delta_1(k) = \bar{\Delta}_1(k) = 0$  для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$ , получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 0 &= A_k N_k \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \bar{N}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\
 \Delta_2^*(k) &= \lambda_k A_k N_k \sinh(\lambda_k l) + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{N}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l),
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

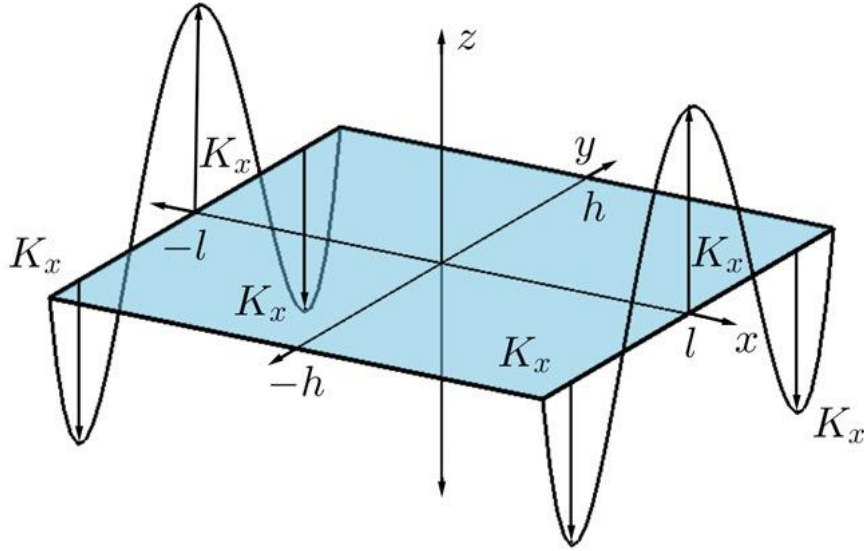


Рис. 10

Решая ее аналогично системе (22), для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$  получим

$$A_k = \frac{\Delta_2^*(k) \bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l)}{N_k \eta_k}. \quad (53)$$

Дальнейшее построение решения состоит в подстановке выражений (53) в равенства (10), (12), и последующем выделении нуль-рядов. Данная операция для случая прямоугольной пластины аналогична случаю полуполосы. А потому, рассмотрим сначала его. Выражение, например, для фактора  $M_y(x, y)$  имеет вид

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left( \Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{e^{\lambda_k x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \right). \quad (54)$$

С учетом правой части уравнений биортогональной системы (19<sub>11</sub>), умножая числитель и знаменатель на  $\lambda_k^2$ , имеем

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left( \Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \right). \quad (55)$$

Действуя аналогично работе [10] и выделяя нуль-ряд, приходим к выражению

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \Delta_2^{(k)} \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \left( 2a_k \cos b_k x + \frac{a_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) e^{a_k x} \right\}. \quad (56)$$

Сравнивая равенства (55) и (56), можно получить еще одну форму представления решения для полуполосы:

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \Delta_2^{(k)} \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\text{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\text{Im}(\lambda_k)} \right\}. \quad (57)$$

Аналогично для других факторов полуполосы, получим, например

$$M_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_2(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \quad (58)$$

$$K_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_2(k) \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \quad (59)$$

Учитывая, что для первого действительного корня  $\lambda_1$  справедливо  $b_k \rightarrow 0$ , можно получить окончательные выражения решений для полуполосы.

Используем описанную выше схему для нахождения решений в случае прямоугольной пластины. Так, например, подставляя выражения (53) в соотношения (10<sub>3</sub>) получим аналог соотношения (54) для пластины

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left( \Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\cosh(\lambda_k x) \cosh(\bar{\lambda}_k l)}{\lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)} \right). \quad (60)$$

С учетом правой части уравнений биортогональной системы (19<sub>11</sub>), умножая числитель и знаменатель на  $\lambda_k^2$ , имеем

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left( \Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\lambda_k^2 \cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)}{\lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)} \right). \quad (61)$$

Тогда, аналогично равенству (57), получим

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left( \Delta_2(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{Im \{ \lambda_k^2 \cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x) \}}{Im \{ \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l) \}} \right). \quad (62)$$

Подставляя выражения (53) в оставшиеся соотношения (10), (12), и для первого действительного корня  $\lambda_1$  полагая  $b_k \rightarrow 0$ , получим выражения для прогиба, поперечных сил, углов поворота и моментов в прямоугольной пластине, которые имеют вид (43), где

$$\Delta(1) = \Delta_2(1); \quad (63)$$

$$\Omega_{11}(x) = - \frac{2l \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - 2x \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l}; \quad (64)$$

$$\Omega_{21}(x) = \frac{2 \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - 2\lambda_1 l \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) + 2\lambda_1 x \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l};$$

$$\Omega_{31}(x) = \frac{2\lambda_1^2 \{ 2 \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - \lambda_1 l \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) + \lambda_1 x \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) \}}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l};$$

$$\Delta(k) = \Delta_2(k);$$

$$\Omega_{12}(x) = -\frac{Im\{\cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k^2 \cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}. \quad (65)$$

В выражениях (65) под знаками  $Im$  стоят быстро растущие функции, поэтому их нужно привести к виду, не приводящему к переполнению памяти компьютера:

$$\Omega_{12}(x) = -\frac{Im\{c(\bar{\lambda}_k, a_k)cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k)c(\lambda_k, a_k)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k c(\bar{\lambda}_k, a_k)sx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k)c(\lambda_k, a_k)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k^2 c(\bar{\lambda}_k, a_k)cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k)c(\lambda_k, a_k)\}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (66)$$

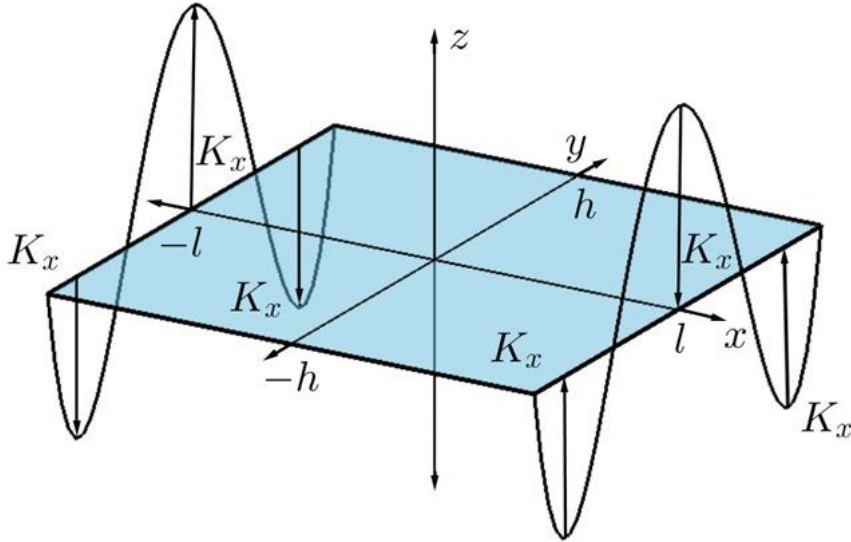


Рис. 11

В случае *обратно симметричной* относительно оси  $y$  деформации прямоугольной пластины получим (рис. 11)

$$\Omega_{11}(x) = -\frac{2l \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - 2x \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l}; \quad (67)$$

$$\Omega_{21}(x) = \frac{2 \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - 2\lambda_1 l \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) + 2\lambda_1 x \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l};$$

$$\Omega_{31}(x) = \frac{2\lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - \lambda_1 l \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) + \lambda_1 x \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l};$$

$$\Omega_{12}(x) = -\frac{Im\{\sinh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k^2 \sinh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (68)$$

Под знаками *Im* стоят быстрорастущие функции, которые нужно привести к виду, не приводящему к переполнению памяти компьютера:

$$\Omega_{12}(x) = -\frac{Im\{s(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) c(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k^2 s(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}}. \quad (69)$$

Приведем примеры расчетов при  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $h = 2$ ,  $l = 4$ ,  $\rho = 0,4$ ,  $E = 0,69 \cdot 10^5$  МПа (материал – катанный алюминий).

**Пример 3.** Симметричный случай.  $K_x(y) = y^4 - 1, 2y^2h^2 + 0, 2h^4$ . Сечения  $x = 4$  (рис. 12а) и  $x = 3, 7$  (рис. 12б). Сечения  $y = 0$  (средняя линия пластины – рис. 13а) и  $y = 2$  (край пластины – рис. 13б). Сечения функции прогиба  $w(x, y)$  (рис. 14):  $x = 0$  (слева) и  $y = 0$  (справа).

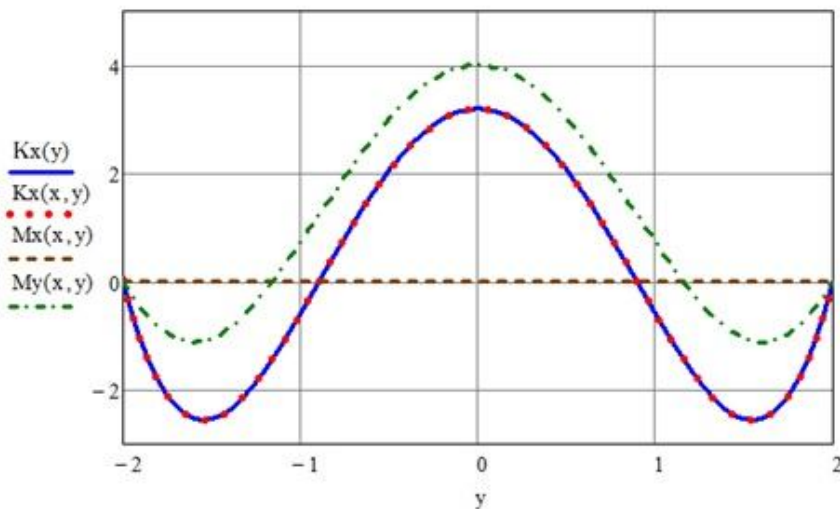
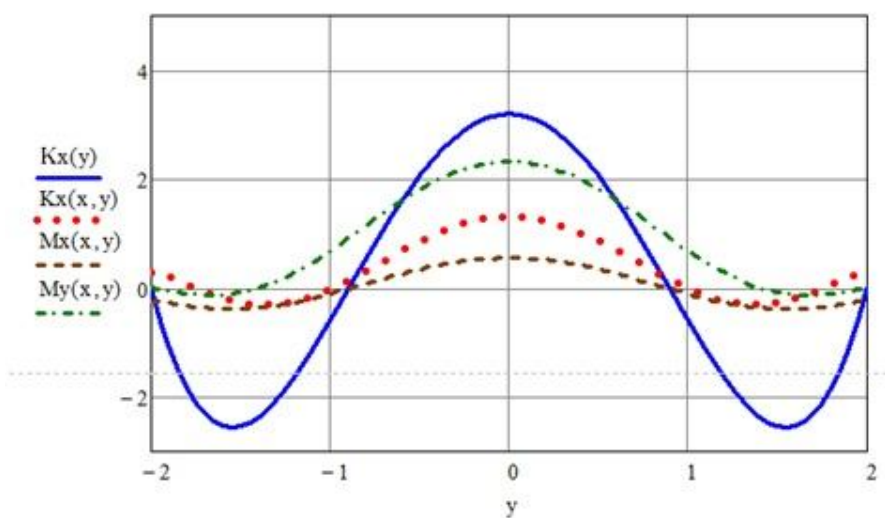
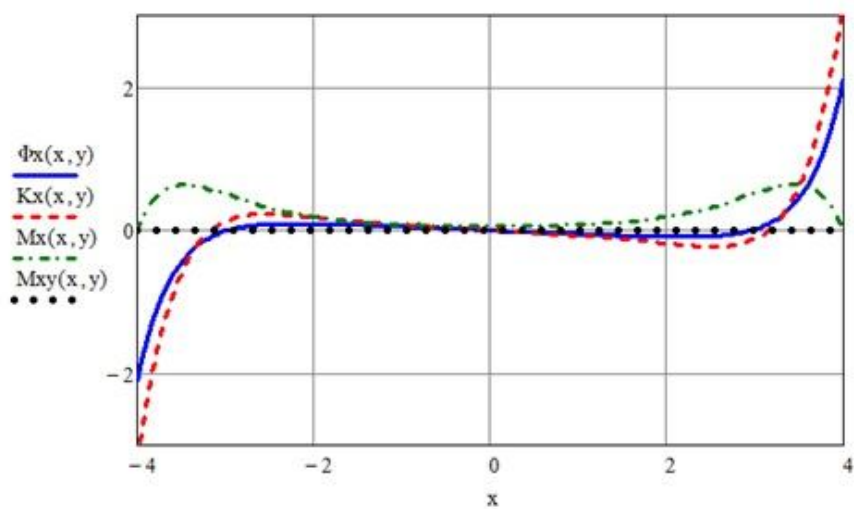


Рис. 12а. Сечение при  $x = 4$

Рис. 12б. Сечение при  $x = 3,7$ Рис. 13а. Сечение при  $y = 0$



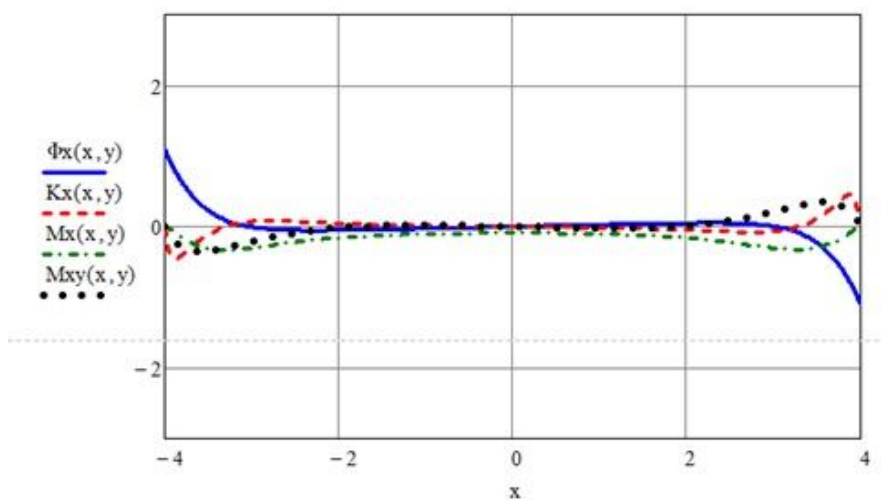


Рис. 13б. Сечение при  $y = 2$

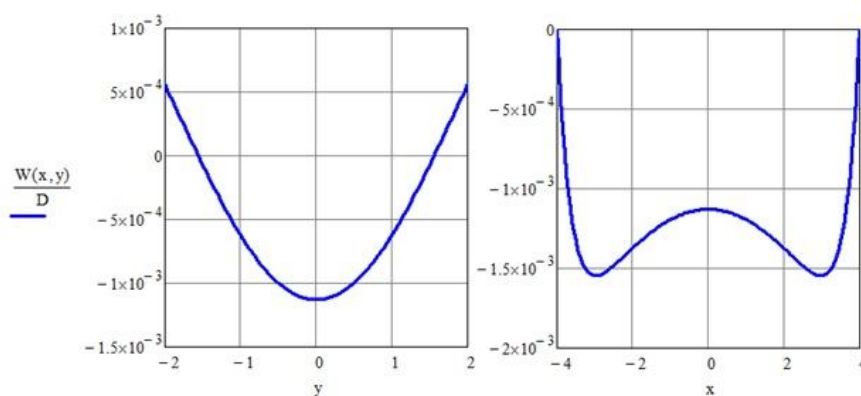
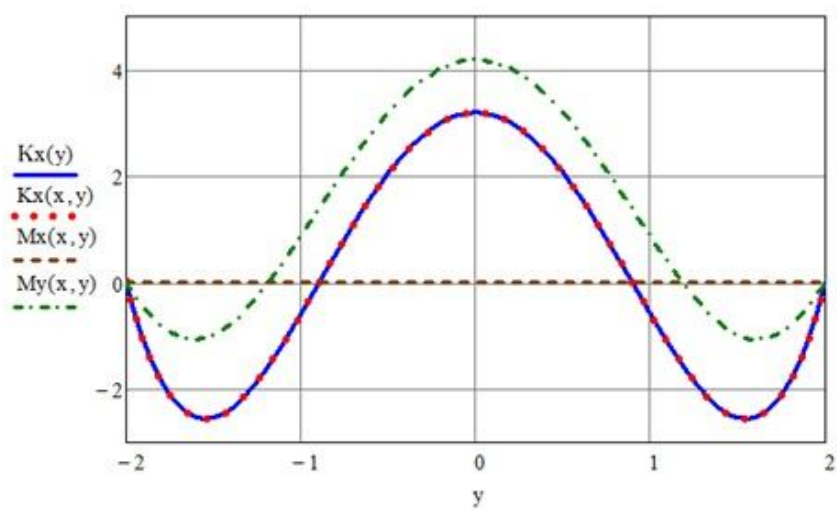
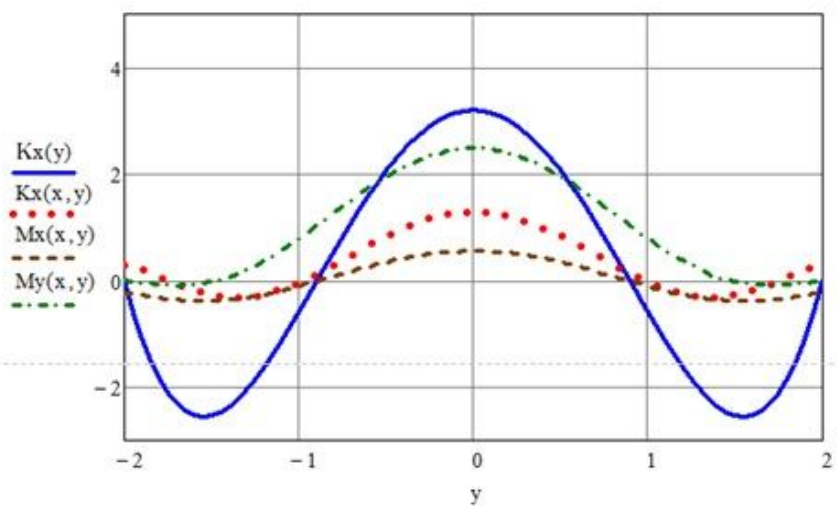
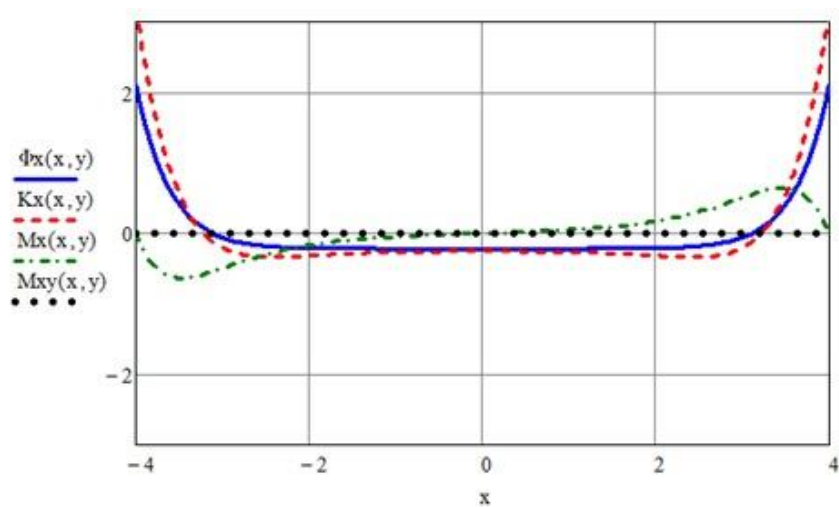
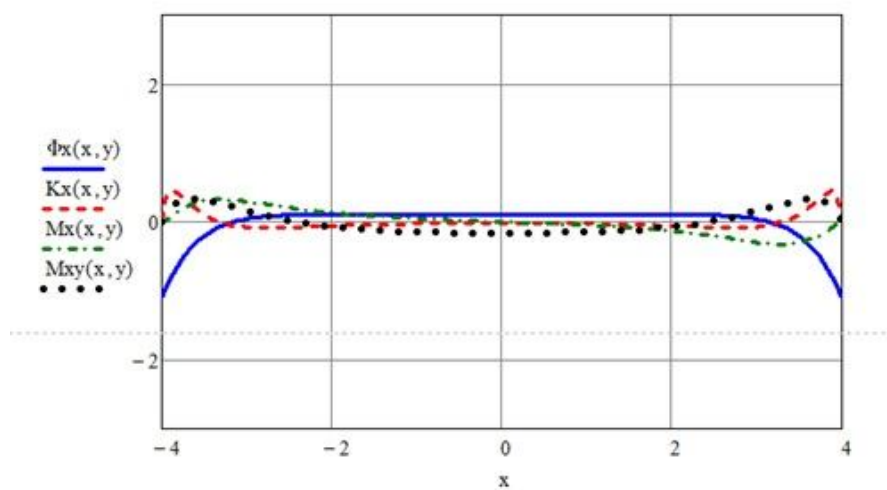


Рис. 14. Сечения функции прогиба  $w(x, y)$ :  $x = 0$  (слева) и  $y = 0$  (справа)

**Пример 4.** Обрато симметричный случай.  $K_x(y) = y^4 - 1, 2y^2h^2 + 0, 2h^4$ . Сечения  $x = 4$  (рис. 15а) и  $x = 3, 7$  (рис. 15б). Сечения  $y = 0$  (средняя линия пластины — рис. 16а) и  $y = 2$  (край пластины — рис. 16б). Сечения функции прогиба  $w(x, y)$  (рис. 17):  $x = 0$  (слева) и  $y = 0$  (справа).

Рис. 15а. Сечение при  $x = 4$ Рис. 15б. Сечение при  $x = 3,7$

Рис. 16а. Сечение при  $y = 0$ Рис. 16б. Сечение при  $y = 2$

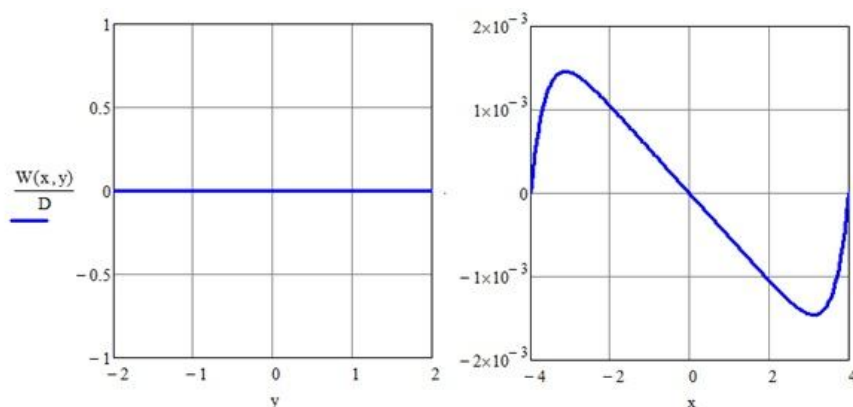


Рис. 17. Сечения функции прогиба  $w(x, y)$ :  $x = 0$  (слева) и  $y = 0$  (справа)

**Результаты исследований и их обсуждение.** Построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба тонкой пластины прямоугольной формы, продольные стороны которой свободны. Рассмотрены два случая: а) на торцах заданы ненулевые изгибающие моменты и нулевые обобщенные поперечные силы; б) на торцах заданы ненулевые обобщенные поперечные силы и нулевые изгибающие моменты.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 480–482.
- [2] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
- [3] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратно-симметрической задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 81–90.
- [4] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – М. : Стройиздат, 1975. 224 с.
- [5] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М. : Наука, 1966. 636 с.
- [6] Маркушевич А. И. Целые функции. Элементарный очерк. – М. : Наука, 1965. 108 с.
- [7] Кашин Б. С. Саакян А. А. Ортогональные ряды. – М. : АФЦ, 1999. 560 с.
- [8] Аbruков Д. А. Задача изгиба полуполосы со свободными продольными краями. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2 (20). С. 57–78.
- [9] Аbruков Д. А. Изгиб полуполосы со свободными продольными краями, на торце которой заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Точное решение краевой задачи // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3(21). С. 94–114.

[10] Меньшова И. В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы: дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук (01.02.04) / Меньшова Ирина Владимировна; ФГБОУ ВПО «МГОУ». Москва, 2013. 182 с.

Абруков Денис Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: AbrukovDA@yandex.ru

*D. A. Abrukov*

**BEND OF A RECTANGULAR PLATE WITH THE FREE LONGITUDINAL EDGES AT WHICH END FACES THE GENERALIZED TRANSVERSAL FORCES AND MOMENTS OF DEFLECTION ARE SET. PRECISE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

**Abstract.** The precise analytical solution of a boundary value problem of a bend of a squared thin plate which longitudinal parties are free is constructed. Two cases are considered: a) at end faces nonzero moments of deflection and zero generalized transversal forces are set; b) at end faces nonzero generalized transversal forces and zero moments of deflection are set. The decision is submitted in ranks on Fadle – Papkovich functions. Required coefficients of ranks are by means of systems of functions, biorthogonal to Fadle – Papkovich functions.

**Keywords:** plate bending, Fadle – Papkovich functions, analytical solutions.

**REFERENCES**

- [1] Kovalenko M. D. Lagrange's decomposition and uncommon representations of zero on the uniform to decisions // Reports of the Russian Academy of Sciences. 1997. Vol. 352. № 4. P. 480–482. (in Russian)
- [2] Kovalenko M. D., Shulyakovskaya T. D. Decomposition on Fadlya – Papkovich's functions in a strip. Theory bases // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. 2011. № 5. P. 78–98. (in Russian)
- [3] Kovalenko M. D., Menshova I. V. Expansions Lagrange Function Fadl - Papkovich in back-symmetric problem of the theory of elasticity for a half-strip of a rectangular // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2013. № 1 (15). P. 81–90. (in Russian)
- [4] Vlasov V. V. Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics. – M. : Stroyizdat, 1975. 224 p. (in Russian)
- [5] Tymoshenko S. P., Voynovsky-Krieger S. Plates and covers. – M. : Nauka, 1966. 636 p. (in Russian)
- [6] Markushevich A. I. Entire functions. elementary outline. – M. : Nauka, 1965. – 108 p. (in Russian)
- [7] Kashin B. S., Saakian A. A. Orthogonal ranks. – M. : AFTS, 1999. 560 p. (in Russian)
- [8] Abrukov D. A. The task of bending the half-strip with free longitudinal edges. Expansions Lagrange Function Fadl – Papkovich // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 2 (20). P. 57–78. (in Russian)
- [9] Abrukov D. A. Bending half-strip with free longitudinal edges, which are given at the end of the bending moment and shear force generalized. The exact solution of the problem // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 3 (21). P. 94–114. (in Russian)
- [10] Menshova I. V. Analytical solutions of two-dimensional boundary value problems of elasticity theory in finite domains with corners border: dis. on scientific. step. cand. Sci. sciences (01.02.04) / Menshova Irina Vladimirovna; ФГБОУ ВПО «МГОУ». Москва, 2013. 182 p. (in Russian)

*Abrukov, Denis Alexandrovich*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*