

В. Д. Кулиев, Н. Л. Борисова

ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА, НАХОДЯЩАЯСЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ БИУПРУГИХ ПОЛОС РАЗНОЙ ТОЛЩИНЫ. НОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

Аннотация. Методы, разработанные в статье [1], позволяют построить решение важной задачи, когда трещина продольного сдвига находится на границе раздела двух биупругих “жестко” сцепленных полос разной толщины, поверхности которых свободны от внешних нагрузок. К берегам трещины приложены равные по величине и противоположно направленные напряжения. Выявлены ранее неизвестные явления:

1⁰. Если толщины биупругих полос равны друг другу, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} не зависит от упругих свойств полос.

2⁰. Если толщины биупругих полос не равны друг другу, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} зависит от упругих свойств полос.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, сингулярное (особое) интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши, напряжения, смещение, изотропная упругая среда, косинус-преобразование Фурье.

УДК: 539.375

1. Предварительное замечание. Рассмотрим сингулярное (особое) интегральное уравнение с обобщенным ядром типа Коши:

$$\sigma(x) = \frac{1}{4h_1} \cdot \frac{1}{ch \frac{\pi x}{2h_1}} \int_{-l}^l f(t) \frac{2th \frac{\pi}{2h_1} t}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} dt \quad (1.1)$$

(|x| ≤ l).

Здесь $\sigma(x)$ — некоторая заданная четная функция.

Пусть $\sigma(x) \in H^\beta[-l, l]$, $1/2 < \beta < 1$, и, следовательно, $\sigma(x) \in C[-l, l]$, а искомая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям:

$$f(t) = \frac{f_0(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}}, \quad f_0(-t) = -f_0(t), \quad f_0(t) \in H^\beta[-l, l], \quad \frac{1}{2} < \beta < 1.$$

Заметим, что, если, например, функция $\gamma^*(t) \in H^\beta[-l, l]$, то она удовлетворяет условию Гельдера и с показателем α , где $\alpha \leq \beta$

Введем обозначения:

$$\sigma^*(x) = \sigma(x) ch \frac{\pi x}{2h_1}, \quad f^*(t) = f(t) ch \frac{\pi t}{2h_1}.$$

Поступила 16.02.2014

Очевидно, что функция $\sigma^*(x)$ является четной функцией, а функция $f^*(t)$ — нечетной функцией, причем $\sigma^*(x) \in H^\beta[-l, l]$, $f^*(t) \in K_{1/2}[-l, l]$

Уравнение (1.1) можно записать так:

$$\sigma^*(x) = \frac{1}{4h_1} \cdot \int_{-l}^l f^*(t) \frac{2th \frac{\pi t}{2h_1} \cdot \frac{1}{ch^2 \frac{\pi t}{2h_1}}}{th^2 \frac{\pi t}{2h_1} - th^2 \frac{\pi x}{2h_1}} dt. \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.2) в силу (1.4) в [1] дается следующей формулой:

$$f(x) = -\frac{sh \frac{\pi}{2h_1} x}{h_1 ch^2 \frac{\pi}{2h_1} x \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x}} \times \int_0^l \frac{\sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} t}}{\left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x\right)} \cdot \frac{\sigma(t)}{ch \frac{\pi}{2h_1} t} dt \quad (1.3)$$

($|x| < l$).

2. Трещина продольного сдвига на границе раздела двух биупругих “жестко” сцепленных полос разной толщины.

2.1. Постановка задачи и некоторые результаты. Пусть на границе раздела двух биупругих полос разной толщины находится трещина продольного сдвига $y = 0$, $|x| \leq l$ (рис. 1).

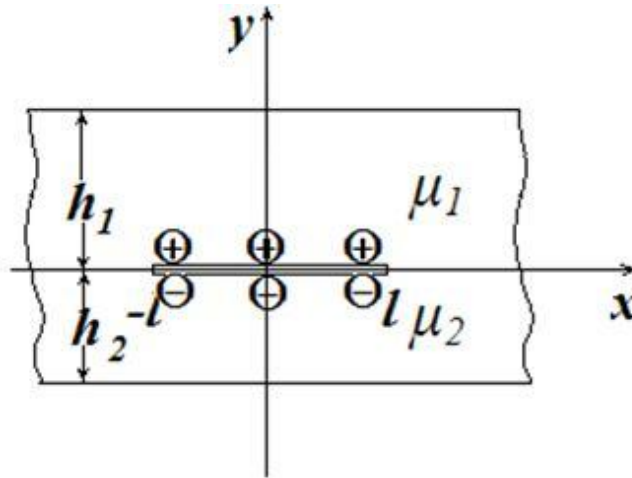


Рис. 1

При этом предполагается, что первая однородная изотропная упругая среда с упругим свойством μ_1 , занимающая область $|x| < \infty, 0 \leq y \leq h_1$, “жестко” сцеплена со второй однородной изотропной упругой средой с упругим свойством μ_2 , занимающей область $|x| < \infty, -h_2 \leq y \leq 0$, вдоль плоскости $y = 0, |x| \geq l$. Поверхности полос $y = h_1$ и $y = -h_2$ свободны от внешних нагрузок.

К берегам трещины приложены равные по величине и противоположно направленные напряжения. На бесконечности напряжения и смещение стремятся к нулю. Таким образом, приходим к следующей краевой задаче:

Граничные условия

$$|x| < \infty, (\sigma_{yz})_1(x, h_1) = 0, \quad (2.1)$$

$$|x| < \infty, (\sigma_{yz})_2(x, -h_2) = 0, \quad (2.2)$$

$$|x| \leq l, (\sigma_{yz})_1(x, +0) = (\sigma_{yz})_2(x, -0) = -\sigma(x), \quad (2.3)$$

$$|x| \geq l, (\sigma_{yz})_1(x, +0) = (\sigma_{yz})_2(x, -0), \quad (2.4)$$

$$w_1(x, +0) = w_2(x, -0). \quad (2.5)$$

Условия на конце трещины (см. §5, глава V в [2])

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \left\{ \sqrt{2\pi(l-x)} \left[\frac{\partial w_1(x, +0)}{\partial x} - \frac{\partial w_2(x, -0)}{\partial x} \right] \right\} = -\frac{(k+1)}{\mu_1} K_{III} \quad (2.6)$$

$$(k = \mu_1/\mu_2).$$

или

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \left\{ \sqrt{2\pi(x-l)} (\sigma_{yz})_1(x, +0) \right\} = K_{III}. \quad (2.7)$$

Условия на бесконечности (с учетом (2.3)–(2.5)):

$$|x| \rightarrow \infty, 0 \leq y \leq h_1, \quad (\sigma_{yz})_1 \rightarrow 0, (\sigma_{xz})_1 \rightarrow 0, w_1 \rightarrow 0; \quad (2.8)$$

$$|x| \rightarrow \infty, -h_2 \leq y \leq 0, \quad (\sigma_{yz})_2 \rightarrow 0, (\sigma_{xz})_2 \rightarrow 0, w_2 \rightarrow 0;$$

Здесь используются общепринятые обозначения (см., напр., [2]). Функция $\sigma(x)$ — заданная функция, причем $\sigma(-x) = \sigma(x)$.

Рассматриваемая задача, очевидно, симметрична относительно плоскости $x = 0$.

В случае антиплоской деформации отличные от нуля компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}(x, y)$ и $\sigma_{yz}(x, y)$ в однородной изотропной упругой среде связаны со смещением $w(x, y)$ следующим образом:

$$\sigma_{xz}(x, y) = \mu \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}(x, y) = \mu \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \quad (2.9)$$

причем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.10)$$

т. е. единственный отличный от нуля компонент вектора смещений $w(x, y)$ является гармонической функцией.

Поскольку в рассматриваемой задаче $w_j(-x, y) = w_j(x, y)$, т. е. смещения $w_j(x, y)$ в каждой полосе являются четной функцией по x , то, применяя косинус-преобразование Фурье по x к уравнению (2.10), в силу (2.8) и (2.9), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

$$\frac{d^2 w^*(\lambda, y)}{dy^2} - \lambda^2 w^*(\lambda, y) = 0. \quad (2.11)$$

Здесь

$$w * (\lambda, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} w(x, y) \cos \lambda x dx, \quad (2.12)$$

где λ — действительный параметр Фурье.

Из (2.11) в силу условий (2.1) и (2.2) с учетом (2.9), получаем:
в первой среде $0 \leq y \leq h_1, x \geq 0$:

$$w_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\lambda) \frac{ch\lambda(h_1 - y)}{ch\lambda h_1} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.13)$$

$$(\sigma_{yz})_1(x, y) = -\mu_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) \frac{sh\lambda(h_1 - y)}{ch\lambda h_1} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.14)$$

$$(\sigma_{xz})_1(x, y) = -\mu_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) \frac{ch\lambda(h_1 - y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda x d\lambda; \quad (2.15)$$

во второй среде $-h_2 \leq y \leq 0, x \geq 0$:

$$w_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B(\lambda) \frac{ch\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.16)$$

$$(\sigma_{yz})_2(x, y) = \mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) \frac{sh\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.17)$$

$$(\sigma_{xz})_2(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) \frac{ch\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} \sin \lambda x d\lambda. \quad (2.18)$$

Здесь $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — неизвестные функции.

2.2. Решение краевой задачи (2.1)–(2.8).

Из (2.13), (2.14), (2.16) и (2.17) в силу условий (2.3)–(2.5) находим:
при $x > l$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [A(\lambda) - B(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda = 0 \quad (2.19)$$

(так как $w_j(l, \pm 0) = 0$ (см. глава V в [2]);
при $x \geq 0$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda [\mu_1 A(\lambda) th\lambda h_1 + \mu_2 B(\lambda) th\lambda h_2] \cos \lambda x d\lambda = 0. \quad (2.20)$$

Из (2.20) следует:

$$kA(\lambda) th\lambda h_1 = -B(\lambda) th\lambda h_2 \left(k = \frac{\mu_1}{\mu_2} \right). \quad (2.21)$$

Пусть

$$A(\lambda) - B(\lambda) = D(\lambda), \quad (2.22)$$

$$D(\lambda) = \frac{k+1}{\mu_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt. \quad (2.23)$$

Здесь $f(t)$ — новая неизвестная функция.

В дальнейшем нам понадобится разрывной множитель (или интеграл) Дирихле [2]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} \pi/2, & x < t, \\ \pi/4, & x = t, \\ 0, & x > t. \end{cases} \quad (2.24)$$

Теперь, учитывая (2.22) и (2.23) в (2.19), в силу (2.24) получаем:

$$\int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt = 0, \quad (2.25)$$

так как $x > l$.

Стало быть, условие (2.5) удовлетворяется автоматически.

Докажем, что $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, т.е.

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad f_0(-x) = -f_0(x), \quad f_0(x) \in H^\beta[-l, l], \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1 \quad (2.26)$$

Доказательство. Из (2.13) и (2.16) с учетом (2.22), (2.23) и (2.24) при $0 < x < l$ имеем:

$$\begin{aligned} w_1(x, +0) - w_2(x, -0) &= \frac{k+1}{\mu_1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt = \\ &= \frac{k+1}{\mu_1} \cdot \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt + \right. \\ &\left. + \int_{x+\varepsilon}^l f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt \right\} = \frac{k+1}{\mu_1} \int_x^l f(t) dt, \end{aligned} \quad (2.27)$$

откуда следует:

$$\frac{\partial w_1(x, +0)}{\partial x} - \frac{\partial w_2(x, -0)}{\partial x} = \frac{k+1}{\mu_1} f(x). \quad (2.28)$$

Следовательно, $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$.

Доказательство закончено.

Из (2.6) с учетом (2.28), находим

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \frac{f_0(l)}{l} \quad (2.29)$$

Остается определить функцию $f(x)$. Действительно, из (2.21) и (2.22) с учетом (2.23) находим:

$$B(\lambda) = -\frac{k+1}{\mu_2} \cdot \frac{th\lambda h_1}{kth\lambda h_1 + th\lambda h_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt, \quad (2.30)$$

$$A(\lambda) = \frac{k+1}{\mu_1} \cdot \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt. \quad (2.31)$$

Заметим, что все условия краевой задачи удовлетворены, за исключением условия (2.3). Из (2.14) с учетом (2.31) при $0 < y < h_1$ имеем:

$$\begin{aligned} (\sigma_{yz})_1(x, y) &= -(k+1) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1-y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{sh\lambda(h_1-y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt - \\ &-\frac{2k}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2 - th\lambda h_1}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1-y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt = \\ &= -\frac{1}{h_1} \int_0^l f(t) \left[\frac{\sin \frac{\pi(h_1-y)}{2h_1} \cdot sh \frac{\pi(t-x)}{2h_1}}{ch \frac{\pi(t-x)}{h_1} + \cos \frac{\pi(h_1-y)}{h_1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \frac{\pi(h_1-y)}{2h_1} \cdot sh \frac{\pi(t+x)}{2h_1}}{ch \frac{\pi(t+x)}{h_1} + \cos \frac{\pi(h_1-y)}{h_1}} \right] dt - \\ &-\frac{2k}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2 - th\lambda h_1}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1-y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Отсюда, удовлетворив условие (2.3), приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода с обобщенным ядром Коши:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{4h_1} \cdot \frac{1}{ch \frac{\pi x}{2h_1}} \int_{-l}^l f(t) \frac{2th \frac{\pi}{2h_1} t}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) K(x, t) dt, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$K(x, t) = k \int_0^\infty \frac{(th\lambda h_2 - th\lambda h_1)}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda \quad (2.34)$$

$$(|x| \leq l).$$

В (2.33) первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Из (2.33) и (2.34) видно, что только ядро $K(x, t)$, являющееся непрерывной функцией своих аргументов, зависит от свойств материалов k ($k = \mu_1/\mu_2$).

Сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши на отрезке $[-l, l]$ имеет вид [3]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (\text{A})$$

где ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ заданные на отрезке $[-l, l]$ непрерывные функции своих аргументов.

Уравнение (A) часто встречается в приложениях, особенно в аэродинамике и плоской теории упругости.

Существуют приближенные методы (если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет некоторым условиям (см., напр., [3]) и численные методы решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Копи (см., напр. [4] и ссылки в [4]). Однако, чтобы применить их к решению (2.33) требуются дополнительные исследования. Поэтому рассмотрим два важных случая, позволяющих выявить новые явления в теории трещин продольного сдвига.

2.3. Первый случай. Коэффициент интенсивности напряжений. Пусть в рассматриваемой задаче $h_1 = h_2$. Тогда из (2.33) и (2.34) следует:

$$\sigma(x) = \frac{1}{4h_1} \cdot \frac{1}{ch \frac{\pi x}{2h_1}} \int_{-l}^l f(t) \frac{2th \frac{\pi}{2h_1} t}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} dt \quad (2.35)$$

$(|x| \leq l),$

так как в этом случае $K(x, t) \equiv 0$.

В работе [1], опираясь на метод, предложенный в [5], построено решение таких сингулярных уравнений.

Решение уравнения (2.35) в силу (1.3), определяется формулой:

$$f_0(x) = - \frac{\sqrt{l^2 - x^2} sh \frac{\pi}{2h_1} x}{h_1 ch^2 \frac{\pi}{2h_1} x \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x}} \times$$

$$\times \int_0^l \frac{\sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} t}}{\left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} \cdot \frac{\sigma(t)}{ch \frac{\pi}{2h_1} t} dt, \quad (2.36)$$

так как $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$.

Отсюда, при $x \rightarrow l - 0$ находим

$$\frac{f_0(l)}{l} = \sqrt{\frac{2th \frac{\pi}{2h_1} l}{\pi l h_1}} \int_0^l \frac{\sigma(t)}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} t}} dt. \quad (2.37)$$

С помощью (2.37) и (2.29) находим коэффициент интенсивности напряжений K_{III} :

$$K_{III} = \sqrt{\frac{2}{h_1} th \frac{\pi}{2h_1} l} \int_0^l \frac{\sigma(t)}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} t}} dt. \quad (2.38)$$

Приведем анализ коэффициента интенсивности напряжений K_{III} :

Пусть $h_1 \rightarrow +\infty$. Тогда из (2.38) приходим к известной формуле (см., напр. [2]):

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{\sigma(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}} dt. \quad (2.39)$$

Пусть $\sigma(t) = \sigma_0 ch \frac{\pi}{2h_1} t$, где $\sigma_0 = const$. Тогда из (31) получаем:

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{h_1 sh \frac{\pi}{h_1} l},$$

откуда при $h_1 \rightarrow +\infty$ имеем

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l}, \quad (2.40)$$

что и следовало ожидать.

2.4. Второй случай. Коэффициент интенсивности напряжений

Пусть $h_1 \rightarrow +\infty$, а $h_2 = const$. Тогда из (2.33) с учетом (2.34) приходим к следующему сингулярному интегральному уравнению 1-го рода типа Коши:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) \frac{2t}{t^2 - x^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) K_0(x, t) dt, \quad (2.41)$$

$$K_0(x, t) = -k \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h_2}}{sh \lambda h_2 + k \cdot ch \lambda h_2} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda \quad (2.42)$$

$$(f(t) \in K_{1/2}[-l, l]).$$

Сингулярное интегральное уравнение 1-го рода типа Коши (2.41) с помощью метода, предложенного в [1] сводится к следующему интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \psi(x) + \int_0^l \psi(t) K_\Phi(x, t) dt, \quad (2.43)$$

$$K_\Phi(x, t) = -k \int_0^\infty \frac{\lambda t e^{-\lambda h_2}}{sh \lambda h_2 + k \cdot ch \lambda h_2} J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda, \quad (2.44)$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (2.45)$$

Здесь $J_0(u)$ — бесселева функция первого рода нулевого порядка.

Чтобы получить из (2.41) и (2.42) формулы (2.43) и (2.44), следует учесть

1. $\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{2tf(t)}{t^2 - x^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) \left[\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{f(t)}{t-x} dt,$

так как $f(t) \in K_{1/2}[-l, l]$.

2. $J_0(\lambda t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\cos \lambda \tau}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau.$

3. Лемму 5 в [1], а именно:

Равенство:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) J_0(\lambda t) dt \quad (2.45^1)$$

будет справедливо в том и только в том случае, если

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^l \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau,$$

$$f(t) = -\frac{d}{dt} \int_t^l \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau.$$

4. Теорему 1 в [1] при $\delta = 1/2$ (см. также (3.3) в [1]).

Поскольку $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, т. е.:

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad f_0(x) = -f_0(-x),$$

$$f_0(x) \in H^\beta[-l, l], \quad 1/2 < \beta \leq 1,$$

$$f_0(0) = 0,$$

то из (2.45) следует, что интеграл

$$\psi(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{f_0(\tau)}{\tau \sqrt{l^2 - \tau^2}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f_0(\tau)}{\tau \sqrt{l^2 - \tau^2}} d\tau \quad (2.45^2)$$

существует как несобственный интеграл.

С помощью леммы 2 в [1] имеем:

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \psi(x) = \frac{f_0(l)}{l}, \quad (2.46^1)$$

причем $\psi(x) \in C[0, l]$. Поэтому

$$\psi(l) = \frac{f_0(l)}{l}. \quad (2.46)$$

Коэффициент интенсивности напряжений K_{III} в силу (2.29) и (2.46) определяется по следующей формуле:

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \cdot \psi(l). \quad (2.47)$$

Пусть $\sigma(x) = \sigma_0 \equiv const$. Введем обозначения:

$$x = l\xi, \quad t = l\eta, \quad \frac{\psi_0(x)}{\sigma_0} = \frac{\psi_0(l\xi)}{\sigma_0} = \Psi(\xi),$$

$$lK_\Phi(x, t) = lK_\Phi(l\xi, l\eta) = K_\Phi^*(\xi, \eta). \quad (2.48)$$

Тогда уравнение (2.43) можно записать так:

$$1 = \Psi(\xi) + \int_0^1 \Psi(\eta) K_\Phi^*(\xi, \eta) d\eta, \quad (2.49)$$

$$K_{\Phi}^*(\xi, \eta) = -k \left(\frac{l}{h_2} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{u\eta e^{-u}}{shu + k \cdot ch u} J_0 \left(u\eta \frac{l}{h_1} \right) J_0 \left(u\xi \frac{l}{h_1} \right) du$$

$$(0 \leq \xi \leq 1).$$

Коэффициент интенсивности напряжений K_{III} в силу (2.47) и (2.48) определяется формулой:

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l} \cdot \Psi \left(1, k, \frac{l}{h_2} \right). \quad (2.50)$$

Применение метода последовательных приближений [4] к уравнению (2.49) позволяет провести численный анализ коэффициента интенсивности напряжений K_{III} при заданных значениях k и l/h_2 .

Результаты численного расчета зависимости поправочной функции $\Psi \left(1, k, \frac{l}{h_2} \right)$ от l/h_2 при заданных значениях k представлены на рис. 2.

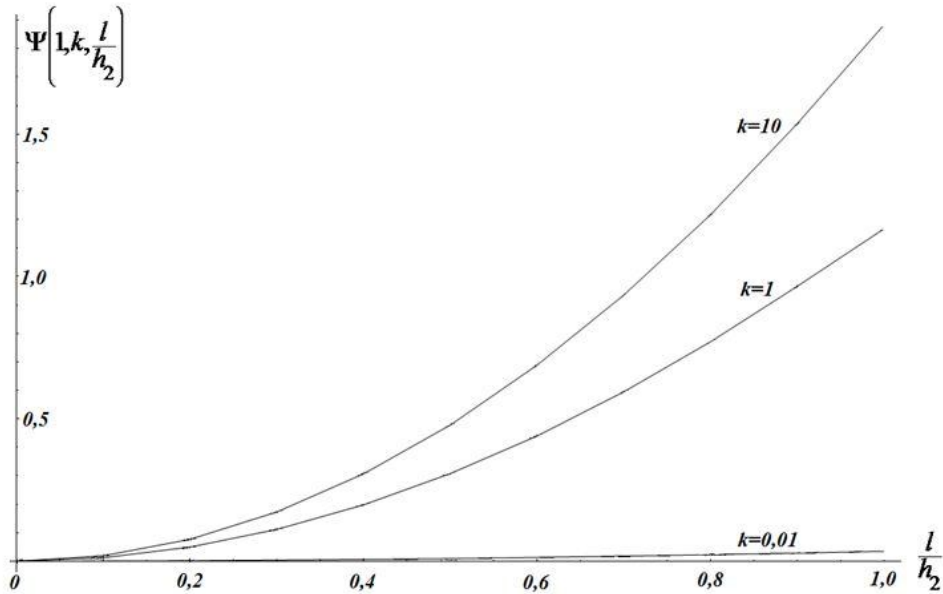


Рис. 2

Численный анализ показывает:

При заданных значениях k с увеличением l/h_2 (т. е. с уменьшением h_2 при неизменном значении l) поправочная функция $\Psi \left(1, k, \frac{l}{h_2} \right)$ увеличивается.

С увеличением k при одном и том же значении l/h_2 (при этом считается, что l не изменяется) поправочная функция $\Psi \left(1, k, \frac{l}{h_2} \right)$ увеличивается.

Если $l/h_2 \rightarrow 0$ (при неизменном значении l), то

$$\Psi(1, k, 0) = 1$$

для любого k ($0 < k < \infty$)

Если $0,01 \leq k \leq 10$, то графики зависимости поправочной функции $\Psi\left(1, k, \frac{l}{h_2}\right)$ от l/h_2 находятся между графиками $k = 0,01$ и $k = 10$, при этом полученные кривые не пересекаются друг с другом. А это говорит о том, что решение интегрального фредгольмова уравнения 2-го рода при фиксированных значениях k и l/h_2 определяются однозначно.

2.5. Новые явления, обнаруженные в рассматриваемой задаче.

1. Если в рассматриваемой задаче $h_1 = h_2 = h$, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} не зависит от k для любого $h > 0$, что следует из (2.38).

2. Если $h_1 = h_2 = h$, то смещения и упругие деформации, определенные в каждой полосе, обратно пропорциональны соответствующим модулям сдвига, что следует из (2.30)–(2.32), (2.36), и не зависят от k .

3. Если $h_1 \neq h_2$ ($h_1 > 0, h_2 > 0$) и если одна из толщины полосы конечна, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} зависит от k , что следует из (2.33), (2.34), (2.42)–(2.45).

4. Если $h_1 \neq h_2$ ($h_1 > 0, h_2 > 0$) и если одна из толщины полосы конечна, то смещения и упругие деформации, определенные в каждой полосе, обратно пропорциональны соответствующим модулям сдвига и зависят от k , что следует из (2.33), (2.34), (2.42)–(2.45), (2.30), (2.31).

Эти явления впервые обнаруженные в данной статье для рассматриваемой задачи представляют значительный практический и теоретический интерес. Аналогичные явления были обнаружены и в других работах [5], [6].

Следует отметить, что, если трещина продольного сдвига находится в многослойных материалах (при этом предполагается, что трещина перпендикулярна границам раздела сред), то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} зависит от упругих свойств материалов (см., напр., [2], [7]–[30]).

2.6. Необходимые замечания.

Замечание 1. Сингулярное интегральное уравнение первого рода с обобщенным ядром Коши (2.33) нами получено из (2.32) с учетом (2.3).

Возникает вопрос: получается ли уравнение (2.33) с помощью (2.30), (2.17) и (2.3)? Ответ будет положительным.

Действительно, учитывая (2.30) в (2.17) с учетом (2.3) имеем:

$$\begin{aligned} -\sigma(x) &= (\sigma_{yz})_2(x, -0) = -(k+1) \cdot \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -0} \int_0^l f(t) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{th\lambda h_1}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_2+y)}{ch\lambda h_2} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt = \\ &= -(k+1) \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -0} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \\ &\cdot \left\{ \left[\frac{th\lambda h_1}{th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_2+y)}{ch\lambda h_2} - \frac{sh\lambda(h_1+y)}{ch\lambda h_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{sh\lambda(h_1+y)}{ch\lambda h_1} \right\} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt = \\ &= -(k+1) \cdot \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -0} \left\{ \int_0^l f(t) \times \right. \\ &\times \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \left[\frac{th\lambda h_1}{th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_2+y)}{ch\lambda h_2} - \frac{sh\lambda(h_1+y)}{ch\lambda h_1} \right] \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1 + y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt \right\} = \\
& = -(k+1) \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -0} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1 + y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt.
\end{aligned}$$

Отсюда, поступая точно так же, как в (2.32) приходим к обобщенному сингулярному интегральному уравнению (2.33) и (2.34).

Замечание 2. Из формулы (2.30) и (2.31) с помощью теоремы 1 (в смысле Эрдейи), доказанной нами в [2] (см. с. 194–200), имеем:

$$B(\lambda) = -\frac{1}{\mu_2} \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{5/2}}\right) (\lambda \rightarrow +\infty), \quad (2.51)$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{\mu_1} \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{5/2}}\right) (\lambda \rightarrow +\infty), \quad (2.52)$$

если $f_0(x) \in C^1[0, l]$, (более подробно см. [1]).

Известно (см., например, [2]), что, если $f_0(x)$ дифференцируема и имеет конечную производную, то она удовлетворяет условию Липшица.

Это следует из теоремы о конечном приращении.

Если же $f_0(x) \in H^\beta[0, l]$, где $1/2 < \beta < 1$, то модуль непрерывности этой функции $\omega(\delta) = \omega(\delta, f_0) = \sup_{|x''-x'| \leq \delta} |f_0(x'') - f_0(x')|$ ($x', x'' \in [0, l]$) будет стремиться к нулю при $\delta \rightarrow +0$, как δ^β , т. е.

$$\omega(\delta) = o(\delta^\beta).$$

Поэтому в силу теоремы 2 в смысле Эрдейи (см. [2], с. 200) для формулы (2.30) и (2.31) имеют место асимптотические равенства:

$$B(\lambda) \sim -\frac{1}{\mu_2} \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.53)$$

$$A(\lambda) \sim \frac{1}{\mu_1} \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right) (\lambda \rightarrow +\infty), \quad (2.54)$$

так как при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt \sim \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.55)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t\psi(t) J_0(\lambda t) dt \sim \frac{\sqrt{a}\psi(a)}{\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.56)$$

Следствие 1. Все интегралы в формулах (2.13)–(2.18) в силу (2.51) и (2.54) являются сходящимися интегралами.

Замечание 3. С помощью леммы Римана-Лебега [2] не трудно показать, что смещения $w_j(x, y)$ и напряжения $(\sigma_{xz})_j(x, y)$, $(\sigma_{yz})_j(x, y)$, где $j = 1, 2$, определяемые по формулам (2.30), (2.31), (2.13)–(2.18) с учетом (2.45¹) и (2.56) удовлетворяют условиям в (2.8). При этом условие леммы Римана-Лебега удовлетворится в силу известного признака Дирихле о сходимости интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кулиев В. Д. Новая формула суммирования функциональных рядов и некоторые ее приложения (ч. 1) // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С.107–119
- [2] Кулиев В. Д. Сингулярные краевые задачи. М. : Физматлит, 2005. С. 720.
- [3] Каландия А. И. Математические методы двумерной теории упругости. – М. : Наука, 1973. С. 303.
- [4] Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. – М. : Наука, 1977. С. 312.
- [5] Кулиев В. Д. Обращение особого интеграла с обобщенным ядром Коши и одно его применение // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки.” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). Чебоксары : ЧПИ МГОУ, 2008. С. 317–333.
- [6] Кулиев В. Д. Наклонная краевая трещина продольного сдвига на границе раздела двух сред // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки.” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). Чебоксары : ЧПИ МГОУ, 2008. С. 555–569 .
- [7] Кулиев В. Д., Раджабов З. Р. Краевая трещина продольного сдвига в биметаллах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2 (20). С. 3–12.
- [8] Кулиев В. Д., Раджабов З. Р. Красная трещина продольного сдвига в многослойной среде // Вестник МГОУ. 2009. № 2. С. 43–49.
- [9] Кулиев В. Д. Некоторые задачи о вставлении трещины сдвига в кусочно однородной упругой среде // Доклады АН Азерб. ССР. 1979. № 6.
- [10] Кулиев В. Д. Новый метод решения краевых задач теории упругости кусочно однородных сред. // Механика разрушения. 1999.
- [11] Кулиев В. Д. Преломление трещины продольного сдвига // Доклады АН СССР. 1979. Т. 249. № 2.
- [12] Кулиев В. Д. Трещина на границе раздела двух сред с ответвлением в одну из них в случае антиплоской деформации // Проблемы прочности. 1979. № 7.
- [13] Кулиев В. Д., Жеков Н. Д. Сингулярные задачи теории упругости для трещин, перпендикулярных границе раздела сред // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 3.
- [14] Кулиев В. Д., Каплун А. Б. Разрушение гетерогенных сред (антиплоская деформация) // Доклады АН Азерб. ССР. Механика. 1981. № 4.
- [15] Кулиев В. Д., Жеков Н. Д. Краевая трещина в ортотропной полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов. 1987. № 1.
- [16] Кулиев В. Д., Каплун А. Б. Трещина продольного сдвига в кусочно однородной упругой среде // Механика композитных материалов. 1981. № 3.
- [17] Кулиев В. Д., Мехтиев А. К., Насибов В. И. К проблеме разрушения многослойных сред с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. 1986. № 2.
- [18] Кулиев В. Д., Насибов В. И. К проблеме торможения трещины в многослойных средах // Доклады АН СССР. 1986. Т. 288. № 3.
- [19] Кулиев В. Д., Насибов В. И. Краевая трещина в биупругой полосе // Механика композитных материалов. 1983. № 4.
- [20] Кулиев В. Д., Новрузов Г. М. К проблеме разрушения кусочно-однородной среды с трещиной // Доклады АН СССР. 1986. Т. 288. № 5.

[21] Кулиев В. Д., Работнов Ю. Н., Черепанов Г. П. Торможение трещины на границе раздела различных упругих сред // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 4.

[22] Кулиев В. Д., Разумовский И. А., Искендер-Заде Ф. А., Каплун А. Б. Расчетные и экспериментальные методы анализа хрупкой прочности и усталостной долговечности конструкций из многослойных материалов // Прочность и надежность конструкций (к 50-летию проф. В. Д. Кулиева). – М. : Изд-во МГОУ, 1993.

[23] Максудов Ф. Г., Кулиев В. Д., Искендерзаде Ф. А. К проблеме разрушения биупругой среды // Доклады АН СССР. 1982. Т. 264. № 6.

[24] Кулиев В. Д., Новрузов Г. М. Плоская задача для кусочно-однородной среды с ломаной трещиной // Прикладная механика. 1984. Т. 20. № 9.

[25] Кулиев В. Д., Разумовский И. А., Злочевская О. Б. Краевая трещина в двухслойных материалах. Аналитические и экспериментальные методы определения хрупкой прочности и остаточных напряжений // Научно-технический прогресс в машиностроении. 1990. Вып. 29.

[26] Кулиев В. Д., Разумовский И. А. К проблеме определения остаточных напряжений в металлах // Доклады АН СССР. 1990. Т. 315. № 3.

[27] Кулиев В. Д., Черепанов Г. П. Теория устойчивости скальных откосов с тектоническими трещинами // Теоретична и приложна механика. Кн. I.- Изд-во на Българска Академия на науките, 1977.

[28] Образцов И. Ф., Кулиев В. Д., Каплун А. Б. К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Статистическое нагружение // Доклады АН СССР. 1988. Т. 303. № 4.

[29] Образцов И. Ф., Кулиев В. Д., Каплун А. Б. К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Циклическое нагружение // Доклады АН СССР. 1988. Т. 303. № 5.

[30] Образцов И. Ф., Кулиев В. Д., Разумовский И. А., Фарзалибеков Н. Э. К проблеме разрушения бимсталлических материалов с краевой трещиной // Доклады АН СССР. 1989. Т. 308. № 3.

Кулиев Валех Джафарович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: rmdkanat@rambler.ru

Борисова Наталья Львовна,

старший преподаватель кафедры прикладной математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: nbolo@yandex.ru

V. D. Kuliev, N. L. Borisova

**CRACK LONGITUDINAL SHEAR, LOCATED ON THE BOUNDARY
BETWEEN TWO BI-ELASTIC STRIPS OF DIFFERENT THICKNESS. NEW
DEVELOPMENTS**

Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

Abstract. Methods developed in [1] allow us to construct solution of important task when the crack is longitudinal shear at the interface of two bi-elastic "rigidly" coupled bands of different thickness, the surface of which are free from external loads. By the shores of the crack attached equal in magnitude and opposite voltages. Revealed previously unknown phenomenon:

1⁰. If the thickness bi-elastic bands equal to each other, the stress intensity factor K_{III} not depend on the elastic properties of the strips.

2⁰. If the thickness of the strips bi-elastic not equal to each other, the stress intensity factor K_{III} depends on the elastic properties of the strips.

Keywords: the stress intensity factor, singular (singular) integral equation with the generalized Cauchy kernel, stress, displacement, isotropic elastic medium, the Fourier cosine transform.

REFERENCES

- [1] Kuliev V. D. New formula of summation of functional ranks and some it appendices (P. 1) // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2013. № 1(15). p. 107-119
- [2] Kuliev V. D. Singular boundary value problems. – M. : Fizmatlit, 2005. P. 720.
- [3] Kalandia A. I. Mathematical methods of two-dimensional theory of elasticity. – M. : Nauka, 1973. P. 303.
- [4] Parton V. Z., Perlin P. I. Integral equations of the theory of elasticity. – M. : Nauka, 1977. P. 312.
- [5] Kuliev V. D. Handling the singular integral with generalized Cauchy kernel and one of his application // Proceedings of X International Scientific School “ Hydrodynamics high speeds ” and the International Scientific Conference “ Hydrodynamics. Mechanics. Power plants. ” (To the 145th anniversary of his birth Academician A. H. Krylov). Cheboksary : ChPI MGOU, 2008. P. 317–333.
- [6] Kuliev V. D. The inclined edge crack longitudinal shear at the interface two media // Proceedings of X International Scientific School “ Hydrodynamics high speeds ” and International Scientific Conference “ Hydrodynamics. Mechanics. Power plants. ” (To the 145th anniversary of Birth of Academician A. H. Krylov). Cheboksary : ChPI MGOU, 2008. P. 555–569 .
- [7] Kuliev V. D., Radjabov Z. R. The crack edges of longitudinal shear bimetal // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2014. № 2 (20). P. 3–12.
- [8] Kuliev V. D., Radjabov Z. R. The crack edges of longitudinal shear multilayer medium // Vestnik MSOU. 2009. № 2. P. 43–49.
- [9] Kuliev V. D. Some of the problem of crack branching shift piecewise homogeneous elastic media // Reports of the Azerbaijan. SSR. 1979. № 6.
- [10] Kuliev V. D. The new method of solving the problems of the theory of singular canonical elastic piecewise homogeneous media. // Fracture Mechanics. 1999.
- [11] Kuliev V. D. Refraction crack longitudinal shear // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1979. Vol. 249. № 2.
- [12] Kuliev V. D. The crack on the interface between two media with a branch in one of the which in the case of deformation antiplane // Problems of Strength. 1979. № 7.

- [13] Kuliev V. D., Zhekov N. D. Singular problem of elasticity for cracks, perpendicular to the interface media // Applied Mathematics and Mechanics. 1985. Vol. 49. Issue 3.
- [14] Kuliev V. D., Kaplun A. B. Destruction of heterogeneous environments (Antiplane strain) // Reports of the Azerbaijan. SSR. mechanics. 1981. № 4.
- [15] Kuliev V. D., Zhekov N. D. Edge cracks in orthotropic half-plane // Physico-Chemical. mechanics of Materials. 1987. № 1.
- [16] Kuliev V. D., Kaplun A. B. Longitudinal shear crack in a piecewise smooth elastic media // Mechanics of Composite Materials. 1981. № 3.
- [17] Kuliev V. D., Mchtiyev A. K., Nasibov V. I. On the problem of destruction multilayer media with cracks // Physico-Chemical. mechanics of Materials. 1986. № 2.
- [18] Kuliev V. D., Nasibov V. I. On the problem of braking cracks in multilayer Media // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1986. Vol. 288. № 3.
- [19] Kuliev V. D., Nasibov V. I. Edge cracks in biuprugoy band // Mechanics of Composite Materials. 1983. № 4.
- [20] Kuliev V. D., Novruzov G. M. On the problem of the destruction of a piecewise homogeneous medium Cracked // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1986. Vol. 288. № 5.
- [21] Kuliev V. D., Rabotnov Yu. N., Cherepanov G. P. Inhibition of cracks on the border section different elastic media // Izv. Mechanics of rigid body. 1978. № 4.
- [22] Kuliev V. D., Razumovsky I. A., Iskander-Zade F. A., Kaplun A. B. Calculated and experimental methods for the analysis of brittle strength and fatigue durability of structural laminates // Durability and reliability of structures (for the 50th anniversary of prof. Kuliev V. D.). – M. : MSOU, 1993.
- [23] Maksudov F. G., Kuliev V. D., Iskanderzadeh F. A. On the problem of destruction biuprugoy environment // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1982. Vol. 264. № 6.
- [24] Kuliev V. D., Novruzov G. M. Plane problem for piecewise-homogeneous environment a broken crack // Applied mechanics. 1984. Vol. 20. № 9.
- [25] Kuliev V. D., Razumovsky I. A., Zlochevskaya O. B. Edge cracks in double-layer materials. The analytical and experimental methods for determining the brittle strength and residual stresses // Scientific and technological progress in engineering. 1990. Issue 29.
- [26] Kuliev V. D., Razumovsky I. A. On the problem of determining residual stresses in Metals // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1990. Vol. 315. № 3.
- [27] Kuliev V. D., Cherepanov G. P. The theory of the stability of rock slope with tectonic fractures // Theoreticity prilozhna and mechanics. Bk. I.- Publishing House on Blgarsa Academy for Sciences, 1977.
- [28] Obratsov I. F., Kuliev V. D., Kaplun A. B. On the theory of the destruction of multilayer materials with a crack. Statistical loading // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1988. Vol. 303. № 4.
- [29] Obratsov I. F., Kuliev V. D., Kaplun A. B. On the theory of the destruction of multilayer materials with a crack. Cyclic loading // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1988. Vol. 303. № 5.
- [30] Obratsov I. F., Kuliev V. D., Razumovsky I. A., Farzalibayov N. E. On the problem of the destruction of bimetallic materials with an edge crack // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1989. Vol. 308. № 3.

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

Borisova, Natalia Lvovna

senior Lecturer, Department of the Applied Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow