

М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, А. П. Кержаев

РАЗРЫВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПОЛОСЕ. РЕШЕНИЕ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

Аннотация. Статья посвящена решениям в тригонометрических рядах четырех краевых задач теории упругости для бесконечной горизонтальной полосы с вертикальным разрезом. На разрезе могут быть заданы разрывы продольных или поперечных перемещений (симметричная и обратная симметричная деформации). На сторонах полосы выполняются условия периодичности: касательные напряжения и поперечные (перпендикулярные оси полосы) перемещения равны нулю. Неизвестные коэффициенты разложений находятся из условий стыка на разрезе двух функций аналитических справа от разреза (в правой полуполосе) и соответствующих им двух функций, аналитических слева от разреза (в левой полуполосе). Эти функции были впервые введены в работе [1], а затем использовались, в частности, при решении краевых задач для прямоугольника со свободными сторонами и с разрывами продольных и поперечных перемещений [2]. Показано, что решение для полосы с разрывом продольных (вдоль оси полосы) перемещений эквивалентно решению для полуполосы, на торце которой заданы продольные перемещения и нулевые касательные напряжения. А решение для полосы с поперечным разрывом эквивалентно решению для полуполосы с заданными на ее торце поперечным перемещением и нулевым нормальным напряжением. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие поведение напряжений в зависимости от гладкости кривой вблизи кончика разрыва. Решения просты и не требуют знаний специальных разделов математики – достаточно иметь представление о рядах Фурье. Анализ решений показывает, что в достаточно широкой области, прилегающей к оси полосы, и для не слишком длинных разрезов полученные решения можно использовать для предварительных оценок напряженного состояния даже в тех случаях, когда на продольных сторонах полосы заданы другие граничные условия, например, когда стороны полосы свободны.

Ключевые слова: краевая задача, полоса, полуполоса, разрыв перемещений, ряды Фурье.

УДК: 539.3

Симметричная деформация полосы

Рассмотрим бесконечную полосу $\{\Pi : |x| < \infty, |y| \leq 1\}$, полагая, что на ее сторонах $y = \pm 1$ заданы следующие условия периодичности

$$\tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, v(x, \pm 1) = 0. \quad (1.1)$$

Решения в правой $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$ и левой $\{\Pi^- : x \leq 0, |y| \leq 1\}$ полуполосах можно представить следующим образом [3]:

при $x \geq 0$ ($q_k = -k\pi$):

Поступила 08.02.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-38-50034, 15-41-02644).

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= B_0 + \frac{1-\nu}{2} A_0 x - \frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k(1+q_k x)) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1+\nu}{2} q_k + B_k \left(2 + \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) \right) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2+(1+\nu)q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \nu A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2(2+\nu) + (1+\nu)q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(3+\nu + (1+\nu)q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

при $x \leq 0$ ($p_k = k\pi$):

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= b_0 + \frac{1-\nu}{2} a_0 x - \frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k p_k + b_k(1+p_k x)) p_k \cos p_k y e^{p_k x}, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{1+\nu}{2} p_k + b_k \left(2 + \frac{1+\nu}{2} p_k x \right) \right) p_k \sin p_k y e^{p_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(1+\nu)p_k + b_k(2+(1+\nu)p_k x)) p_k^2 \cos p_k y e^{p_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \nu a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(1+\nu)p_k + b_k(2(2+\nu) + (1+\nu)p_k x)) p_k^2 \cos p_k y e^{p_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(1+\nu)p_k + b_k(3+\nu + (1+\nu)p_k x)) p_k^2 \sin p_k y e^{p_k x}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь A_k, B_k, a_k, b_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) — неизвестные коэффициенты разложений, ν — коэффициент Пуассона, $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, G — модуль сдвига.

Следуя [1], введем две функции

$$\begin{aligned}
\Phi(y) &= -\tau_{xy}(0, y) + i \left[(1+\nu) \frac{dV(0, y)}{dy} - \frac{1-\nu}{2} \sigma_x(0, y) \right], \\
\Psi(y) &= (1+\nu) \frac{dU(0, y)}{dy} - \frac{3+\nu}{2} \tau_{xy}(0, y) + i \sigma_y(0, y).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Воспользовавшись формулами (1.2), (1.3), найдем:
для Π^+ :

$$\begin{aligned}
\Phi^+(y) &= -i \frac{1-\nu}{2} A_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu)A_k q_k^3 + (3+\nu)B_k q_k^2] e^{iq_k y}, \\
\Psi^+(y) &= i \nu A_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu)A_k q_k^3 + (4+2\nu)B_k q_k^2] e^{iq_k y},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

для Π^- :

$$\begin{aligned}
\Phi^-(y) &= -i \frac{1-\nu}{2} a_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu)a_k p_k^3 + (3+\nu)b_k p_k^2] e^{ip_k y}, \\
\Psi^-(y) &= i \nu a_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu)a_k p_k^3 + (4+2\nu)b_k p_k^2] e^{ip_k y}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Заменим в этих формулах вещественную переменную y комплексной переменной $z = \zeta + iy$ и будем рассматривать функции $\Phi^\pm(y)$ и $\Psi^\pm(y)$, как определенные при $\zeta = 0$ значения соответствующих аналитических функций $\Phi^\pm(z)$ и $\Psi^\pm(z)$.

Допустим, что на разрезе $\{\Gamma : x = 0, |y| \leq a, a < 1\}$ известны значения перемещений справа и слева от разреза

$$U^+(0, y) = u(y), V^+(0, y) = v(y), U^-(0, y) = -u(y), V^-(0, y) = -v(y), \quad (1.7)$$

а также значения скачков напряжений на разрезе (если они есть)

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^+(0, y) - \tau_{xy}^-(0, y) &= -2\tau(y), \sigma_x^+(0, y) - \sigma_x^-(0, y) = 2\sigma_x(y), \\ \sigma_y^+(0, y) - \sigma_y^-(0, y) &= 2\sigma_y(y). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тогда на разрезе Γ

$$\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = \phi_1(y) + i\phi_2(y), \quad \Psi^+(z) - \Psi^-(z) = \psi_1(y) + i\psi_2(y), \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &= -2\tau(y), \quad \phi_2(y) = 2(1 + \nu) \frac{dv(y)}{dy} - (1 - \nu)\sigma_x(y), \\ \psi_1(y) &= 2(1 + \nu) \frac{du(y)}{dy} - (3 + \nu)\tau(y), \quad \psi_2(y) = 2\sigma_y(y). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Раскрывая выражения слева в (1.9), можно записать

$$\begin{cases} -i \frac{1 - \nu}{2} (A_0 - a_0) + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = \phi_1(y) + i\phi_2(y), \\ i\nu(A_0 - a_0) + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (4 + 2\nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = \psi_1(y) + i\psi_2(y). \end{cases} \quad (1.11)$$

Здесь введены такие обозначения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= q_1, \quad \omega_2 = p_1, \quad \omega_3 = q_2, \quad \omega_4 = p_2, \dots \\ D_1 &= A_1, D_2 = -a_1, D_3 = A_2, D_4 = -a_2, \dots \\ C_1 &= B_1, C_2 = -b_1, C_3 = B_2, C_4 = -b_2, \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.1. Разрыв продольных перемещений (симметричная задача). Будем считать, что на разрезе задан только скачок продольных перемещений

$$U^+(0, y) - U^-(0, y) = 2u(y). \quad (1.13)$$

Тогда

$$\psi_1(y) = 2(1 + \nu) \frac{du(y)}{dy}, \quad \phi_1(y) = \phi_2(y) = \psi_2(y) = 0, \quad (1.14)$$

а равенства (1.11) принимают вид

$$\begin{cases} -i \frac{1 - \nu}{2} (A_0 - a_0) + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = 0, \\ i\nu(A_0 - a_0) + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (4 + 2\nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = 2(1 + \nu) \frac{du(y)}{dy}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Если считать, что напряжения в правой и левой полуполосах затухают на бесконечности, то надо принять, что $A_0 = a_0 = 0$. Воспользовавшись свойством ортогональности системы функций $\{e^{i\omega_k y}\}_{k=1}^{\infty}$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\omega_k y} e^{-i\omega_m y} dy = \begin{cases} 1, & \omega_k = \omega_m, \\ 0, & \omega_k \neq \omega_m \quad (k, m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.16)$$

для каждого номера $k \geq 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2 = 0, \\ (1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (4 + 2\nu)C_k \omega_k^2 = 2(1 + \nu)\omega_k u_k, \end{cases} \quad (1.17)$$

где $u_k = \int_{-a}^a u(y) \cos \omega_k y dy$. Решая ее, найдем

$$C_k = \frac{u_k}{\omega_k}, \quad D_k = -\frac{(3 + \nu)u_k}{(1 + \nu)\omega_k^2}.$$

Следовательно, в соответствии с обозначениями (1.12),

$$A_k = -a_k = -\frac{(3 + \nu)u_k}{(1 + \nu)q_k^2}, \quad B_k = -b_k = \frac{u_k}{q_k}. \quad (1.18)$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов (1.18) в формулы (1.2) и (1.3), получим (ниже приведены формулы только для правой полуполосы)

$$\begin{aligned} U^+(x, y) &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 + \nu}{2} q_k x\right) u_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \nu}{2} + \frac{1 + \nu}{2} q_k x\right) u_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x^+(x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - q_k x) u_k q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) u_k q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}^+(x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} u_k q_k^2 x \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Постоянная $B_0 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a u(y) dy$.

Это же решение можно получить в классической постановке, как решение для полуполосы, если считать, что на ее торце заданы нулевое касательное напряжение и продольное перемещение $U(0, y) = u(y)$.

Рассмотрим три типа разрывов продольных перемещений.

1. Пусть $u(y) = (a^2 - y^2)^2$. В этом случае

$$u_k = 16 (3 \sin(aq_k) - 3aq_k \cos(aq_k) - a^2 q_k^2 \sin(aq_k)) / q_k^5, \quad B_0 = 8a^5/15.$$

На рисунках 1, 2 приведены графики распределения напряжений¹ и перемещений при $x = 0$, вычисленные по формулам (1.19).

¹Здесь и далее по тексту напряжениям $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ и $\tau_{xy}(x, y)$ на графиках соответствуют $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$.

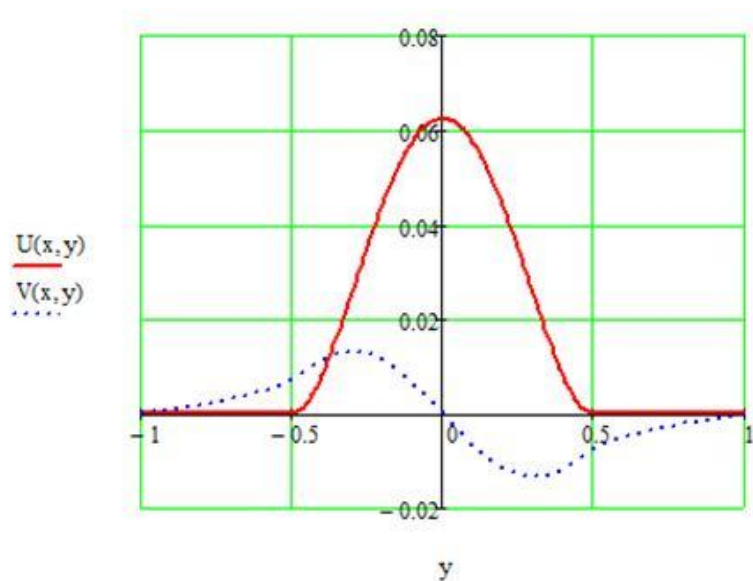


Рис. 1

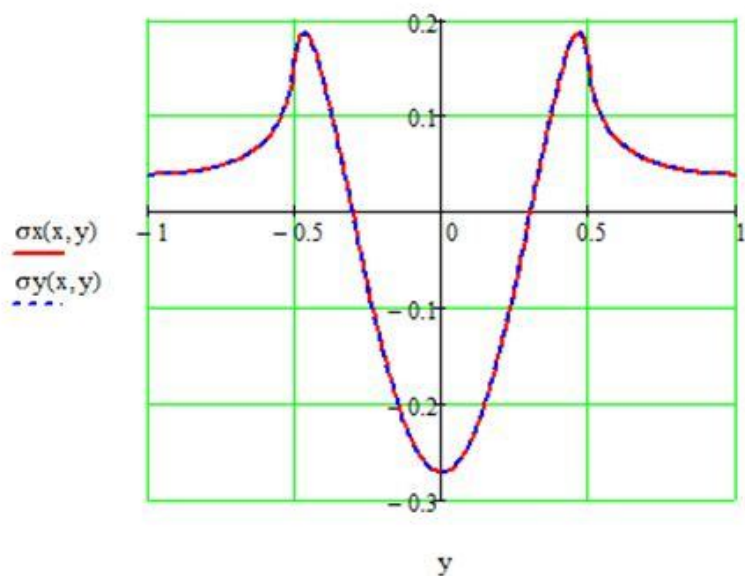


Рис. 2

2. Кончик профиля разрыва имеет меньшую гладкость, чем в первом примере: $u(y) = a^2 - y^2$. Тогда

$$u_k = 4 (\sin(aq_k) - aq_k \cos aq_k) / q_k^3, \quad B_0 = 2a^3/3.$$

На рисунках 3, 4 приведены графики распределения напряжений и перемещений в сечении полосы $x = 0$.

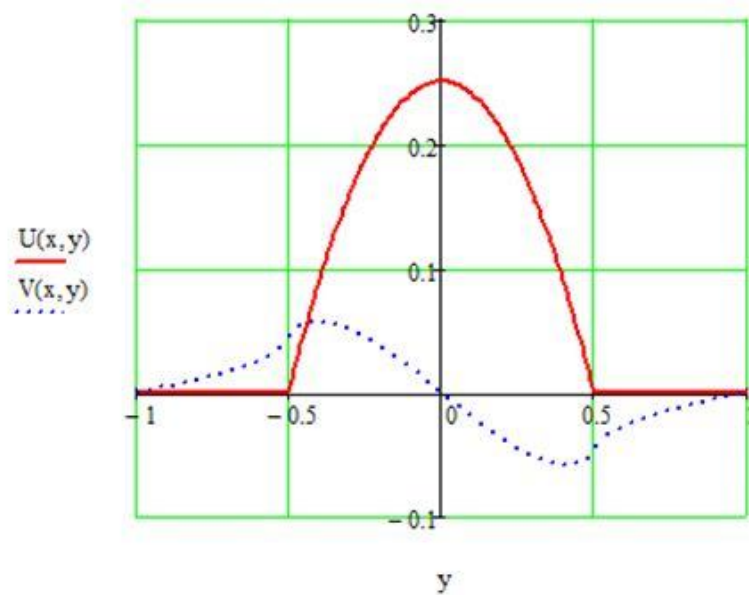


Рис. 3

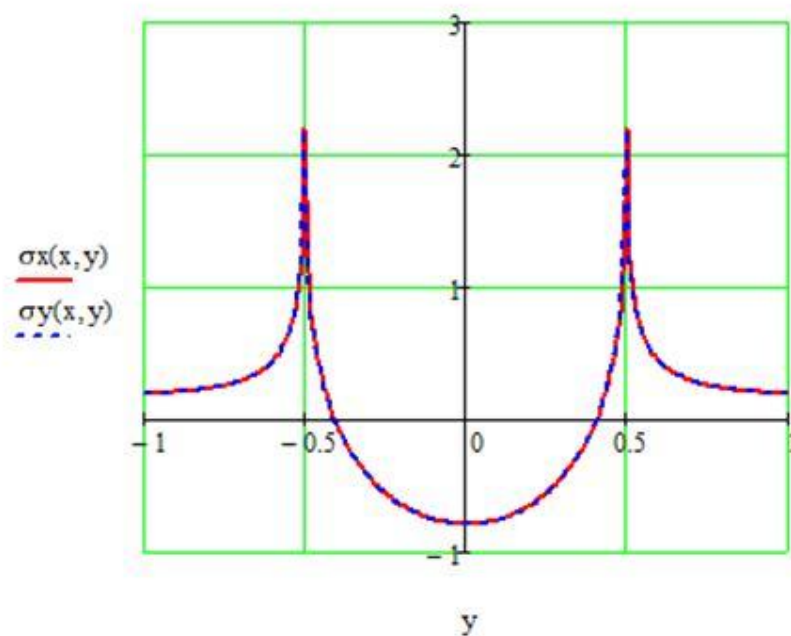


Рис. 4

3. На разрезе задан скачок продольных перемещений $2\sqrt{a^2 - y^2}$. Тогда $u_k = \pi a J_1(a|q_k|)/|q_k|$, $B_0 = a^2\pi/4$, где $J_1(a|q_k|)$ — функция Бесселя. Здесь получим следующие графики в сечении $x = 0$ (рис. 5, 6).

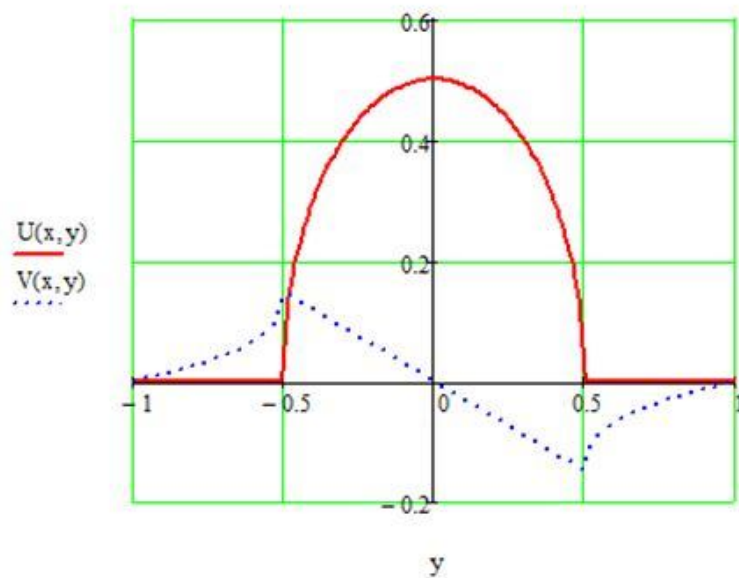


Рис. 5

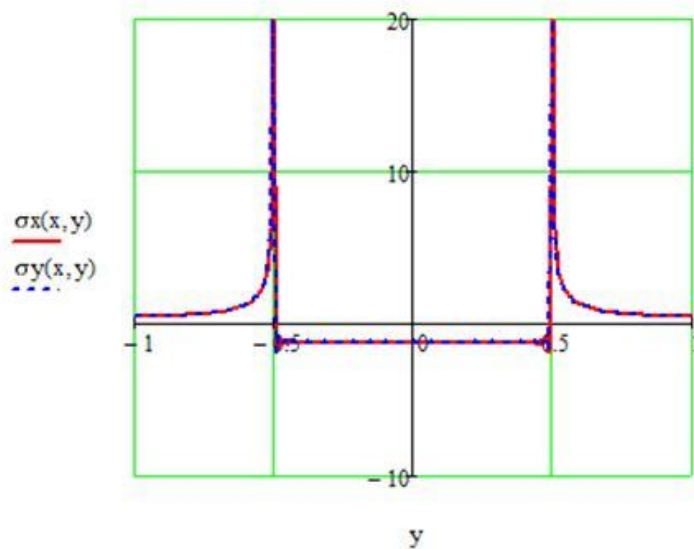


Рис. 6

1.2. Разрыв поперечных перемещений (симметричная деформация). Пусть на разрезе $\{x = 0, |y| \leq a\}$ задам разрыв поперечных перемещений

$$V^+(0, y) - V^-(0, y) = 2v(y). \quad (1.20)$$

Функция $v(y)$ нечетна, поэтому деформация полосы симметрична относительно продольной оси. Введем функцию

$$F(y) = 2\Phi(y) - \Psi(y) = - \left[(1 + \nu) \frac{dU(0, y)}{dy} + \frac{1 - \nu}{2} \tau_{xy}(0, y) \right] - i\sigma_x(0, y). \quad (1.21)$$

Тогда

$$F^+(y) = i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)A_k q_k^3 + 2B_k q_k^2] e^{iq_k y}, \quad F^-(y) = i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)a_k p_k^3 + 2b_k p_k^2] e^{ip_k y}. \quad (1.22)$$

Очевидно, что на разрезе Γ

$$\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = i2(1 + \nu) \frac{d}{dy} v(y), \quad F^+(z) - F^-(z) = 0. \quad (1.23)$$

Раскрывая выражения (1.23) для функций, стоящих слева, и пользуясь обозначениями (1.12), получим равенства, аналогичные равенствам (1.15),

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = 2(1 + \nu) \frac{dv(y)}{dy}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + 2C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Воспользовавшись свойством ортогональности (1.16) системы экспонент, получим систему из двух алгебраических уравнений ($k = 1, 2, \dots$)

$$\begin{cases} (1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2 = (1 + \nu)\omega_k v_k, \\ (1 + \nu)D_k \omega_k^3 + 2C_k \omega_k^2 = 0, \\ v_k = \int_{-a}^a v(y) \sin \omega_k y dy. \end{cases} \quad (1.25)$$

Выпишем окончательные формулы для правой полуполосы:

$$\begin{aligned} U^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \nu}{2} - \frac{1 + \nu}{2} q_k x \right) v_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} q_k x \right) v_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x + (x, y) &= -(1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} v_k q_k^2 x \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y + (x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (2 + q_k^2) v_k q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy} + (x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) v_k q_k \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Полученное решение эквивалентно решению для полуполосы с заданными на ее торце нулевыми нормальными напряжениями и поперечными перемещениями $V(0, y) = v(y)$.

Рассмотрим три типа разрывов поперечных перемещений.

1. Пусть $v(y) = y(a^2 - y^2)^2$. В этом случае

$$v_k = 16(15 \sin(aq_k) + a^3 q_k^3 \cos(aq_k) - 6a^2 q_k^2 \sin(aq_k) - 15aq_k \cos(aq_k)) / q_k^6.$$

На рисунках 7, 8 приведены графики распределения напряжений и перемещений при $x = 0$, вычисленные по формулам (1.26).

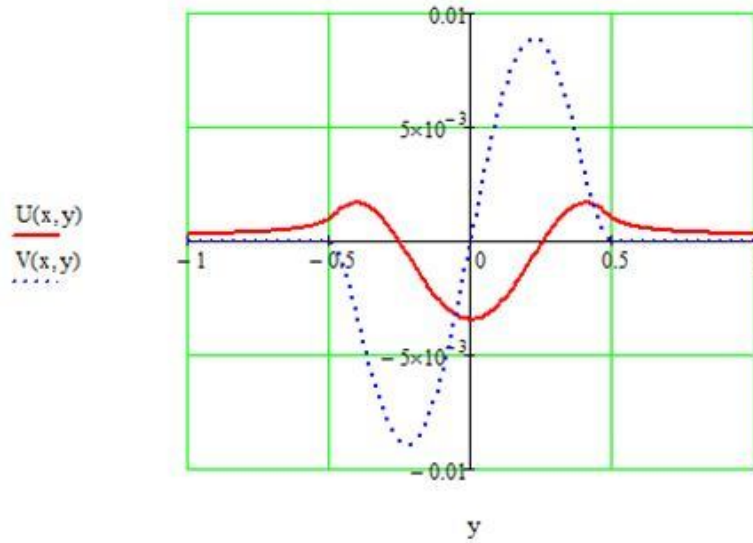


Рис. 7

2. Если $v(y) = y(a^2 - y^2)$, то

$$v_k = -4(a^2 q_k^2 \sin(aq_k) - 3 \sin(aq_k) + 3aq_k \cos(aq_k)) / q_k^4.$$

На рисунках 9, 10 приведены графики при $x = 0$.

3. На разрезе задан скачок поперечных перемещений $2y\sqrt{a^2 - y^2}$. Тогда $v_k = \frac{\pi a^2}{q_k} \left(-J_0(a|q_k|) + 2 \frac{J_1(a|q_k|)}{a|q_k|} \right)$. Графики распределения напряжений и перемещений на разрыве, вычисленные по формулам (1.26), имеют вид (рис. 11, 12):

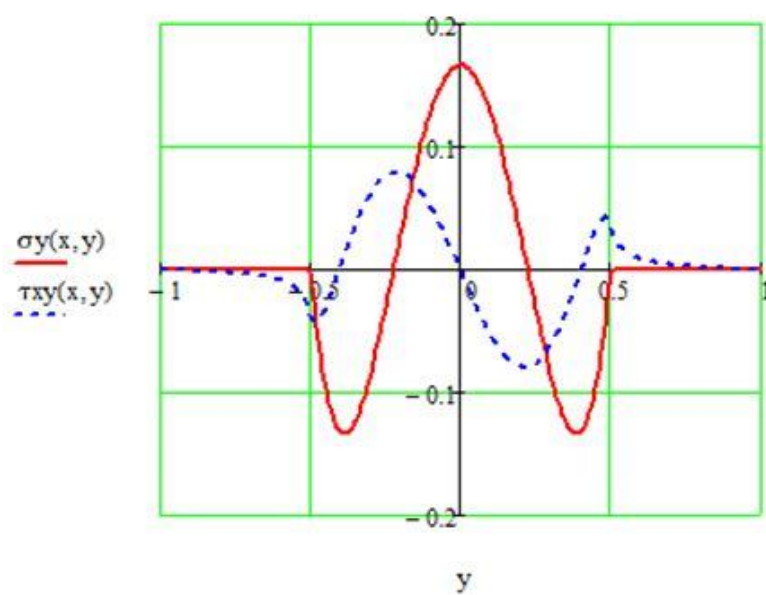


Рис. 8

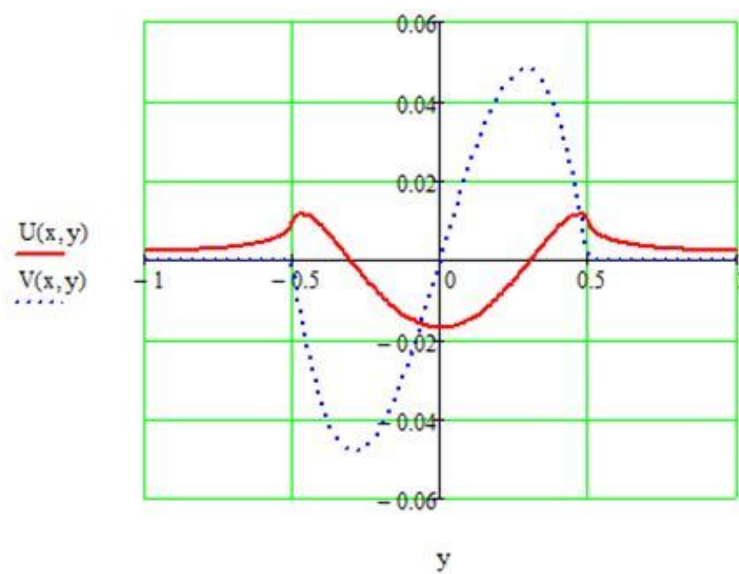


Рис. 9

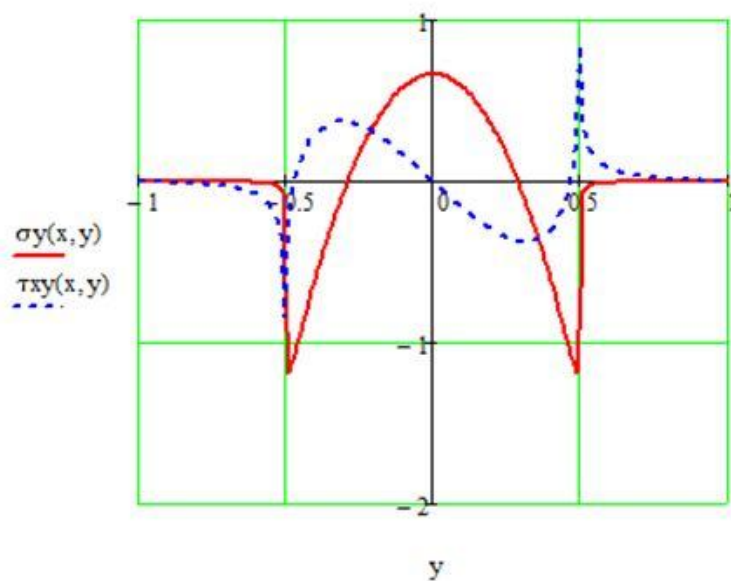


Рис. 10

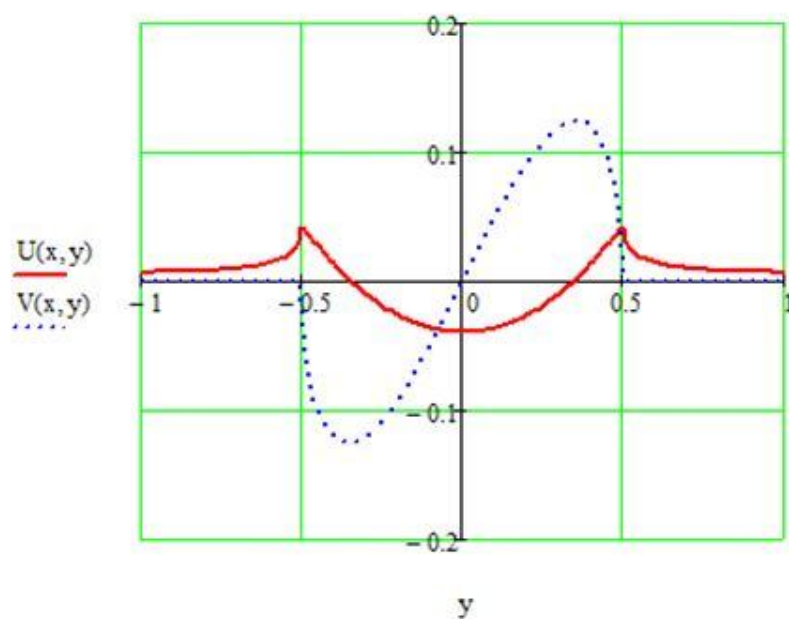


Рис. 11

2. Обратнo-симметричная деформация полосы

В этом случае решения в правой и левой полуполосах имеют вид:
в Π_+ ($q_k = -k\pi$):

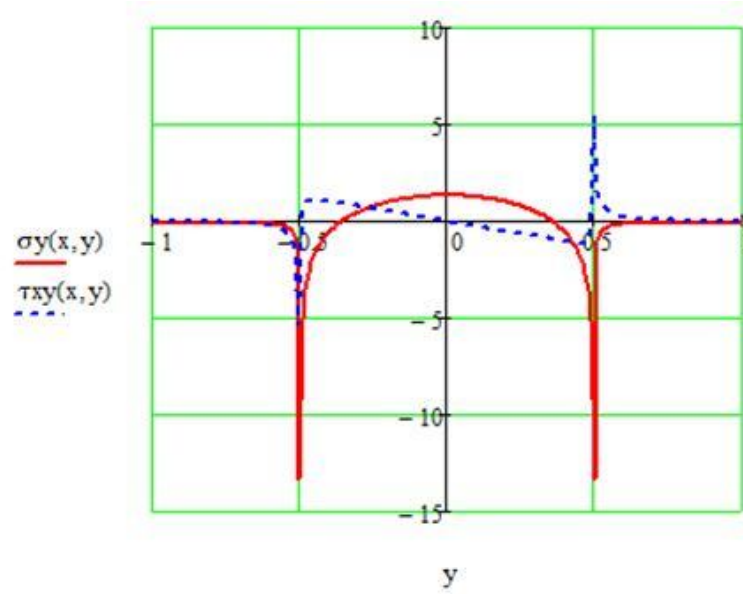


Рис. 12

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k (1 + q_k x)) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1 + \nu}{2} q_k + B_k \left(2 + \frac{1 + \nu}{2} q_k x \right) \right) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= A_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (2 + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 \sigma_y(x, y) &= \nu A_0 y - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (2(2 + \nu) + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (3 + \nu + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

В Π^- ($p_k = k\pi$):

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k p_k + b_k (1 + p_k x)) p_k \sin p_k y e^{p_k x}, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{1 + \nu}{2} p_k + b_k \left(2 + \frac{1 + \nu}{2} p_k x \right) \right) p_k \cos p_k y e^{p_k x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= a_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (1 + \nu) p_k + b_k (2 + (1 + \nu) p_k x)) p_k^2 \sin p_k y e^{p_k x}, \\
 \sigma_y(x, y) &= \nu a_0 y - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (1 + \nu) p_k + b_k (2(2 + \nu) + (1 + \nu) p_k x)) p_k^2 \sin p_k y e^{p_k x},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(1 + \nu)p_k + b_k(3 + \nu + (1 + \nu)p_k x)) p_k^2 \cos p_k y e^{p_k x}.$$

2.1. Разрыв продольных перемещений. На разрезе $\{x = 0, |y| \leq a\}$ задан разрыв продольных перемещений

$$U^+(0, y) - U^-(0, y) = 2u(y). \quad (2.3)$$

Повторяя предыдущие выкладки, для правой полуполосы найдем:

$$\begin{aligned} U^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 + \nu}{2} q_k x\right) u_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ V^+(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \nu}{2} + \frac{1 + \nu}{2} q_k x\right) u_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x^+(x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - q_k x) u_k q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y^+(x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) u_k q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}^+(x, y) &= -(1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} u_k q_k^2 x \cos q_k y e^{q_k x}, \\ u_k &= \int_{-a}^a u(y) \sin \omega_k y dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Это решение совпадает с решением для полуполосы, на торце которой заданы нулевое касательное напряжение и продольное перемещение $U(0, y) = u(y)$.

Рассмотрим опять три типа разрывов перемещений.

1. Пусть $u(y) = y(a^2 - y^2)^2$. В этом случае

$$u_k = 16(15 \sin(aq_k) + a^3 q_k^3 \cos(aq_k) - 6a^2 q_k^2 \sin(aq_k) - 15aq_k \cos(aq_k)) / q_k^6.$$

На рисунках 13, 14 приведены графики распределения напряжений и перемещений при $x = 0$, соответствующие формулам (2.4).

2. Пусть теперь $u(y) = y(a^2 - y^2)$. Тогда

$$u_k = -4(a^2 q_k^2 \sin(aq_k) - 3 \sin(aq_k) + 3aq_k \cos(aq_k)) / q_k^4.$$

Ниже приведены графики распределения напряжений и перемещений в сечении полосы $x = 0$ (рис. 15, 16).

3. Когда на разрезе задан скачок продольных перемещений $2y\sqrt{a^2 - y^2}$, получим $u_k = \frac{\pi a^2}{q_k} \left(-J_0(a|q_k|) + 2\frac{J_1(a|q_k|)}{a|q_k|}\right)$. Ниже приведены графики для сечения $x = 0$ (рис. 17, 18).

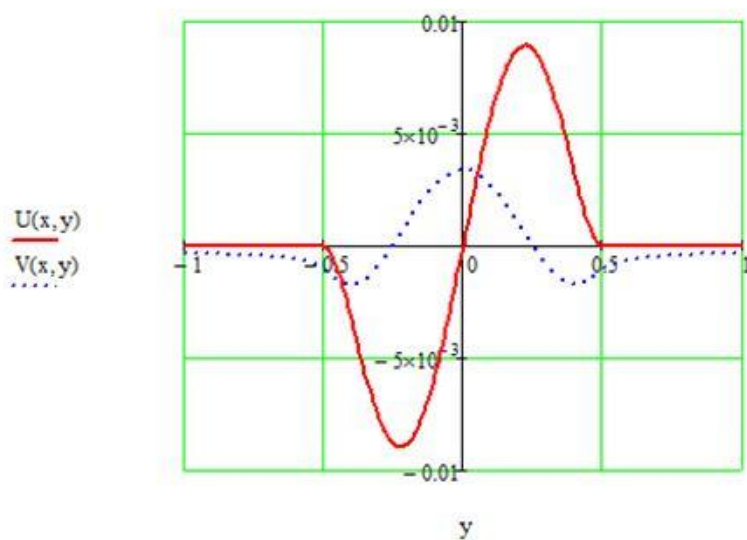


Рис. 13

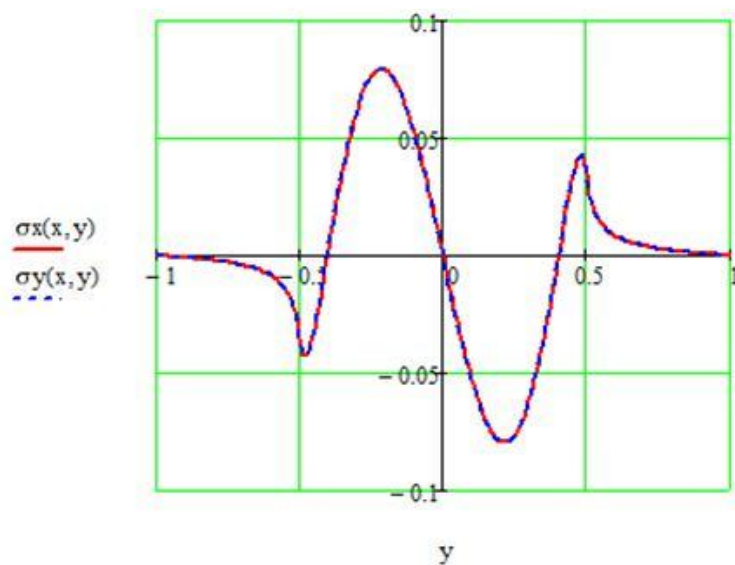


Рис. 14

2.2. *Разрыв поперечных перемещений.* Пусть на разрезе $\{x = 0, |y| \leq a\}$ задан разрыв поперечных перемещений

$$V^+(0, y) - V^-(0, y) = 2v(y), \quad (2.5)$$

$v(y)$ — четна.

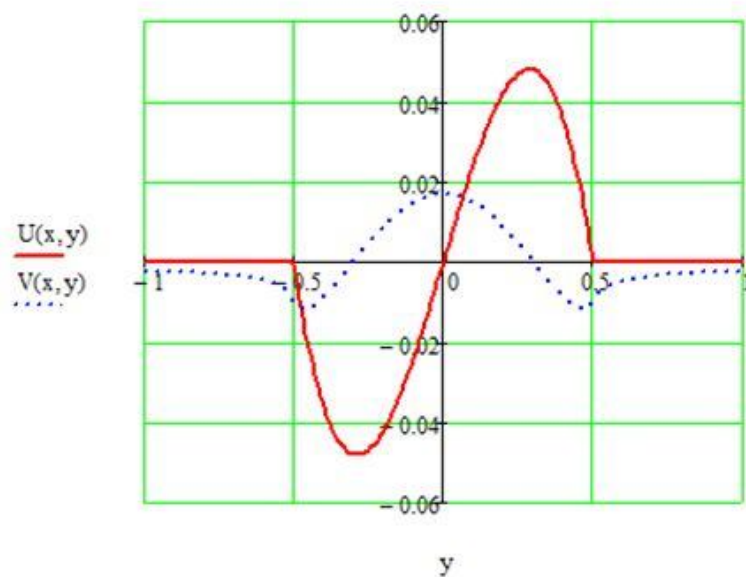


Рис. 15

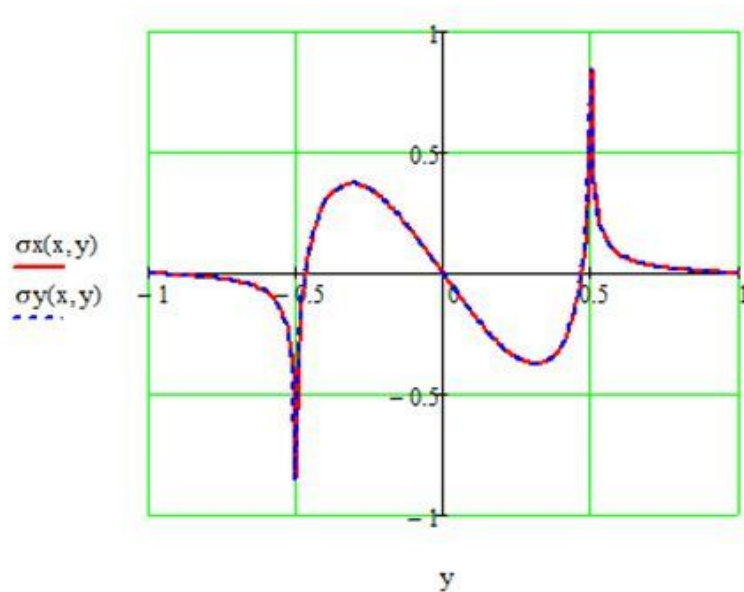


Рис. 16

Окончательные формулы для правой полуполосы следующие:

$$U^+(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-\nu}{2} - \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) v_k \sin q_k y e^{q_k x},$$

$$V^+(x, y) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) v_k \cos q_k y e^{q_k x},$$

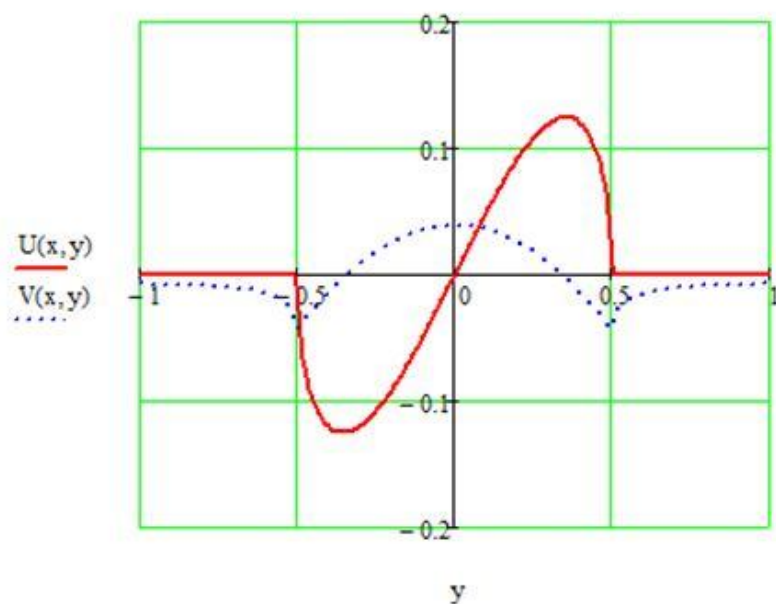


Рис. 17

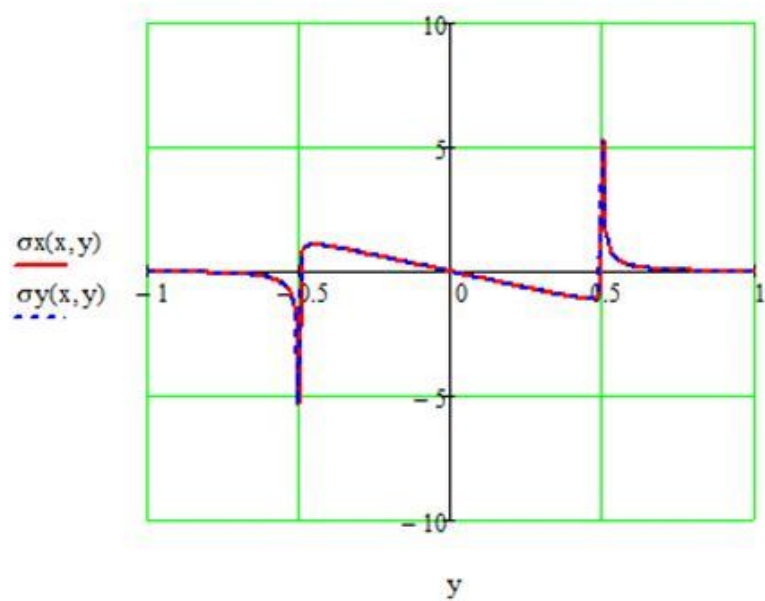


Рис. 18

$$\sigma_x^+(x, y) = (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} v_k q_k^2 x \sin q_k y e^{q_k x}, \quad (2.6)$$

$$\sigma_y^+(x, y) = -(1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (2 + q_k x) v_k q_k \sin q_k y e^{q_k x},$$

$$\tau_{xy}^+(x, y) = (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) v_k q_k \cos q_k y e^{q_k x}.$$

$$v_k = \int_{-a}^a v(y) \cos \omega_k y dy.$$

Постоянная $B_0 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a v(y) dy$.

Решение (2.6) совпадает с решением для полуполосы, когда на ее торце заданы напряжение $\sigma_x(0, y) = 0$ и перемещение $V(0, y) = v(y)$.

Рассмотрим три разрыва поперечных перемещений.

1. Пусть $v(y) = (a^2 - y^2)^2$. В этом случае

$$v_k = 16 (3 \sin(aq_k) - 3aq_k \cos(aq_k) - a^2 q_k^2 \sin(aq_k)) / q_k^5, \quad B_0 = 8a^5/15.$$

На рисунках 19, 20 приведены графики распределения напряжений и перемещений при $x = 0$, вычисленные по формулам (2.6).

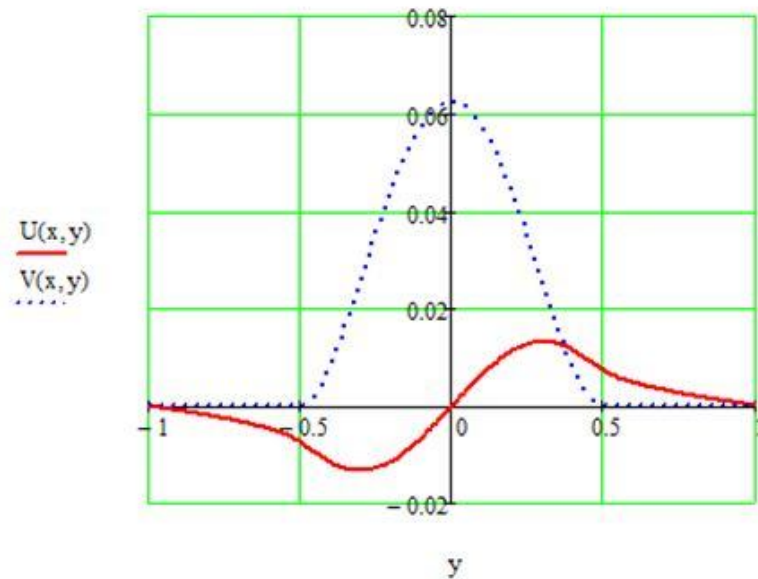


Рис. 19

2. Пусть $v(y) = a^2 - y^2$. Тогда

$$v_k = 4 (\sin(aq_k) - aq_k \cos aq_k) / q_k^3, \quad B_0 = 2a^3/3.$$

На рисунках 21, 22 приведены графики распределения напряжений и перемещений в сечении полосы $x = 0$.

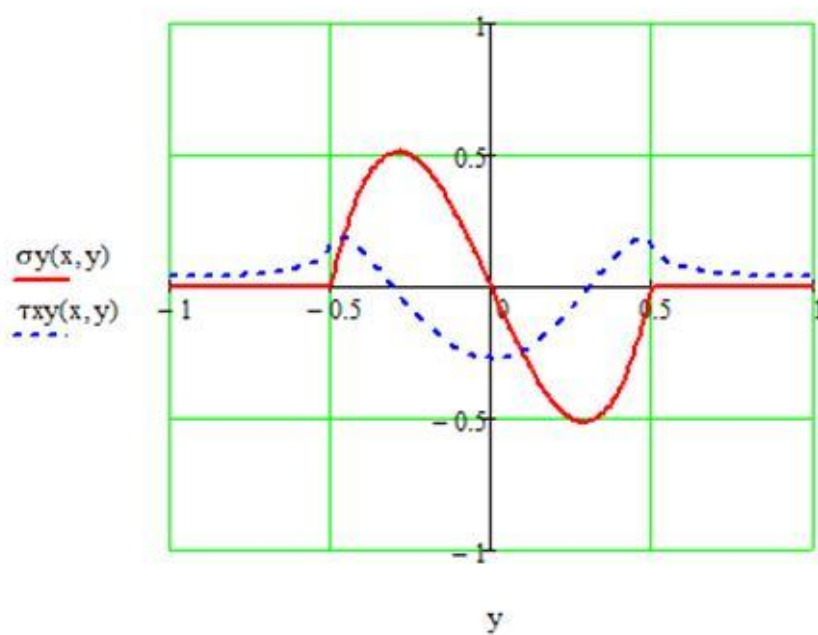


Рис. 20

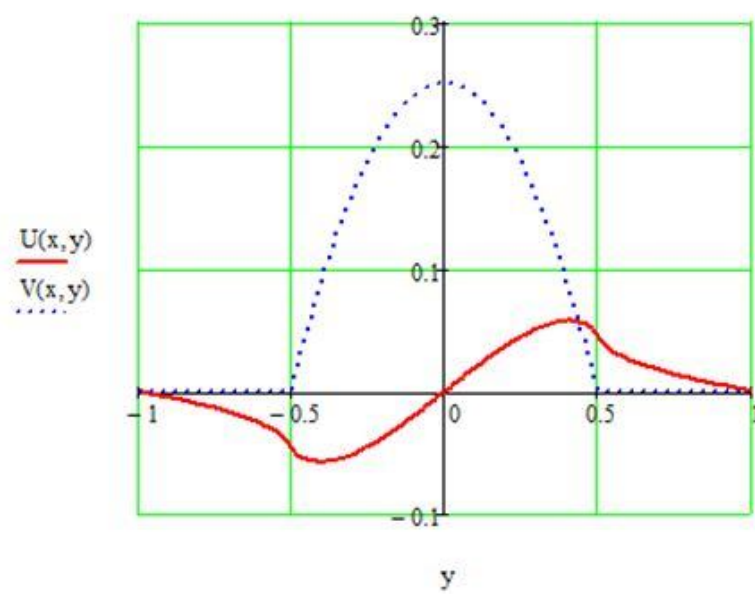


Рис. 21

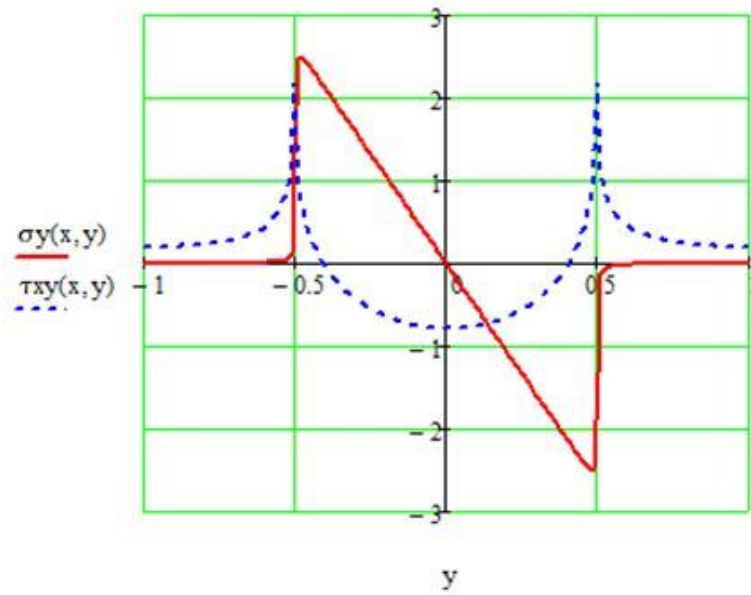


Рис. 22

3. На разрезе задан скачок поперечных перемещений $2\sqrt{a^2 - y^2}$. Тогда $v_k = \pi a J_1(a|q_k|)/|q_k|$, $B_0 = a^2\pi/4$. Графики распределения напряжений и перемещений на разрыве, вычисленные по формулам (2.6), имеют вид (рис. 23, 24):

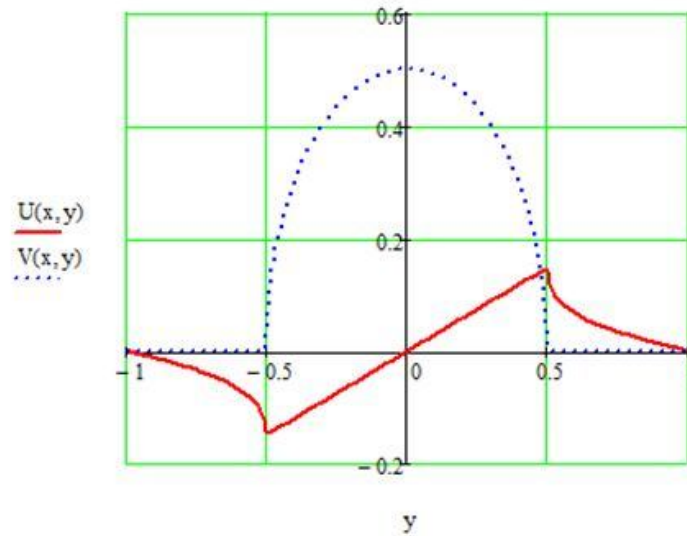


Рис. 23

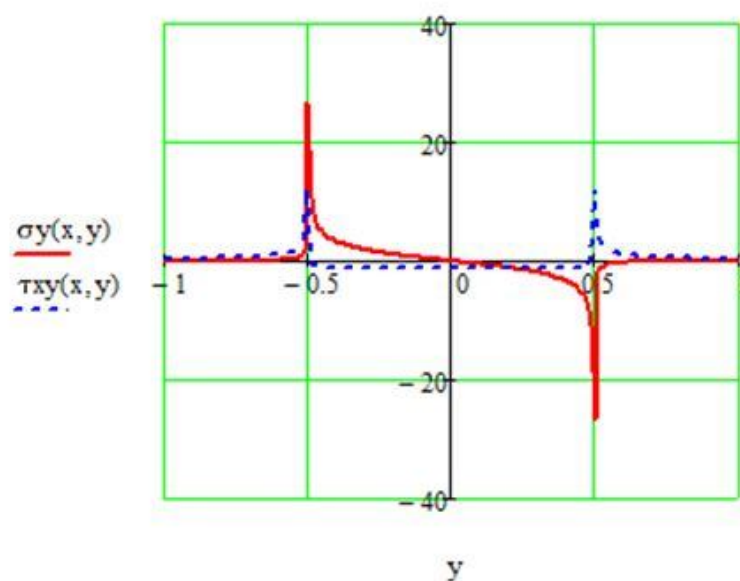


Рис. 24

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Стык двух полуполос / М. Д. Коваленко, С. В. Шибырин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 1. – С. 56–63.
- [2] Коваленко, М. Д. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы : монография / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. – 123 с.
- [3] Меньшова, И. В. О периодических решениях Файлона-Рибьера в двумерной задаче теории упругости / И. В. Меньшова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). – С. 98–122.

Коваленко Михаил Дешинович,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: kov08@inbox.ru

Меньшова Ирина Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: menshovairina@yandex.ru

Кержаев Александр Петрович,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: alex_kerg@mail.ru

M. D. Kovalenko, I. V. Men'shova, A. P. Kerzhaev

DISPLACEMENTS DISCONTINUITY IN A STRIP. THE SOLUTION IN TRIGONOMETRIC SERIES

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

Abstract. The article is devoted to solutions in trigonometric series of four boundary value problems of the theory of elasticity for an infinite horizontal strip with a vertical section. On a section can be set discontinuities longitudinal or transverse displacements (symmetric and antisymmetric deformations). On the sides of a strip the periodicity conditions are performed: shear stresses and transverse (perpendicular to the axis of a strip) displacements are equal zero. Unknown expansions coefficients are found from the conditions of a joint on the section of two analytical functions to the right of the section (in the right half-strip) and the corresponding two analytic functions on the left of the section (in the left half-strip). These functions were first introduced in work [1] and then were used, in particular, at the solution of boundary value problems for a rectangle with free sides and discontinuities longitudinal and transverse displacements [2]. It is shown that the solution for the strip with discontinuity longitudinal (along the axis of the strip) displacements is equivalent to solution for the half-strip, which are given at the end of the longitudinal displacements and zero shear stresses. And the solution for the strip with a transverse discontinuity equivalent to solution for the half-strip with specified at its end transverse displacement and zero normal stress. The examples illustrating behavior of stresses depending on smoothness of the curve near the tip of the discontinuity are reviewed. Solutions is simple and does not require knowledge of special branches of mathematics - just be aware of the Fourier series. The analysis of solutions shows that in sufficiently wide area, adjacent to the axis of the strip, and for not too long section received solutions can be used for preliminary estimates of stress state even in those cases, when on the longitudinal sides of the strip other boundary conditions are given, for example, when sides of the strip are free.

Keywords: boundary value problem, strip, half-strip, displacement discontinuity, Fourier series.

REFERENCES

- [1] *Kovalenko, M. D.* The junction of two half-strips / M. D. Kovalenko, S. V. Shibirin // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. – 1997. – No. 1. – P. 56–63.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Analytical solutions of two-dimensional boundary value problems of the theory of elasticity in finite domains with corner points of the boundary / M. D. Kovalenko, I. V. Men'shova. – Cheboksary : Chuvash State Pedagogical University, 2014. – 123 p.
- [3] *Men'shova, I. V.* About periodic solutions of Filon-Ribiere in a two-dimensional problem of the theory of elasticity / I. V. Men'shova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2015. – No. 1 (23). – P. 98–122.

Kovalenko, Mikhail Denisovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Menshova, Irina Vladimirovna

PhD, Senior Researcher at the Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Kerzhaev, Alexandr Petrovich

PhD, Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow