

К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев, Ю. В. Немировский

## ПРЕДЕЛЬНОЕ УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ СЖИМАЕМЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СТРУКТУРАХ АРМИРОВАНИЯ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
Новосибирский государственный технический университет*

**Аннотация.** Рассматривается предельное упругое состояние кольцевых криволинейно армированных пластин при различных структурах армирования: радиально-окружных, спиральных и комбинированных. Сформулированы условия предельного упругого состояния. Получены постановки плоской задачи теории упругости и задачи устойчивости в полярной системе координат. Определены предельные нагрузки для различных законов армирования и даны оценки эффективности разных структур.

**Ключевые слова:** устойчивость, композитные пластины, структуры армирования, полярная ортотропия.

УДК: 539.401

**1. Введение.** При росте внешней нагрузки напряженно-деформированное состояние в композитной пластине изменяется пропорционально этой нагрузке только до определенного предельного значения. В этом случае пластина переходит в предельное упругое состояние. Это связано с тем, что либо материалы связующего или волокна входят в зону пластичности, либо пластина выпучивается из своей плоскости, то есть теряет устойчивость. В первом случае композитная структура претерпевает необратимые изменения, а во втором – резко падает жесткость пластины как элемента конструкции. Для большинства конструкций недопустимы как первый, так и второй варианты состояния пластины, и внешняя нагрузка не должна превышать предельную. Возникает очевидный вопрос: какова должна быть структура армирования, которая бы обеспечивала максимальную предельную нагрузку при одном и том же расходе материалов арматуры и связующего. Представленная задача оптимизации требует максимально возможного упрощения постановки задачи для конкретного расчетного случая, чтобы время машинного счета было минимальным.

В данной работе рассматривается предельное упругое состояние кольцевой пластины с непрерывным армированием, нагруженной нормальным давлением  $q_1$  и  $q_2$  (рис. 1). Считается, что арматура равномерно распределена по толщине пластины. Используя модели структурной механики, определены эффективные упругие характеристики пластины  $a_{ijkl}$  и  $b_{ijkl}$ :  $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ ,  $\varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl}$  (по повторяющимся в выражениях индексам  $i, j, k, l$  ведется суммирование от 1 до 2). Величины  $a_{ijkl}$  и  $b_{ijkl}$  изменяются лишь в радиальном направлении  $a_{ijkl} = a_{ijkl}(r)$ ,  $b_{ijkl} = b_{ijkl}(r)$ , благодаря чему двумерная задача сводится к одномерной.

---

Поступила 08.10.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102) и Министерства образования и науки РФ по государственному заданию №2014/138 (проект № 435).

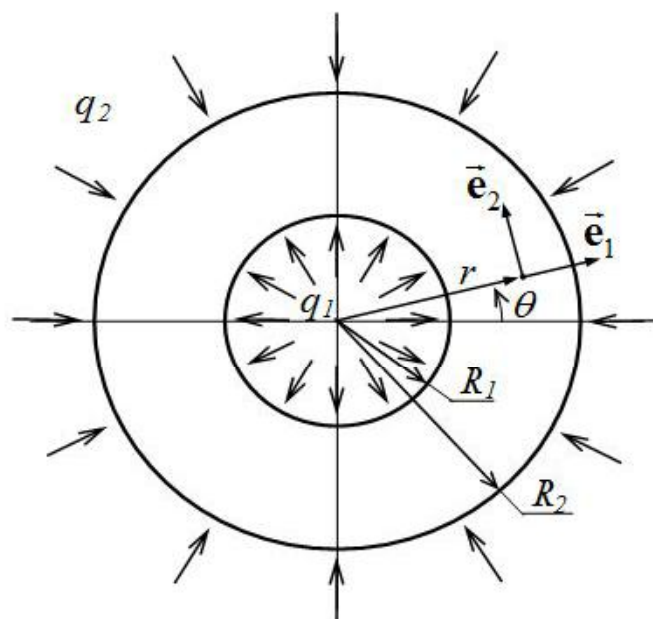


Рис. 1. Расчетная схема

При изменении структуры армирования и сохранении общей доли волокон и связующего предельная нагрузка будет изменяться. Область упругого состояния пластины будет нижней гранью графиков зависимости трех различных предельных состояний (рис. 2). На рис. 2  $\alpha$  – некоторый параметр армирования, изменяющийся от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ ,  $q$  – предельная нагрузка. Пластические деформации в связующем появятся, когда максимальное напряжение по Мизесу в связующем достигнет предела текучести:  $\max_{R_1 \leq r \leq R_2} \sigma_{\text{эКВ}}^c = \sigma_T^c$ . В условиях плоского напряженного состояния с учетом отсутствия касательных напряжений, что имеет место в данной задаче, эквивалентные напряжения по Мизесу вычисляются по формуле  $\sigma_{\text{эКВ}}^c = \sqrt{(\sigma_{11}^c)^2 - \sigma_{11}^c \sigma_{22}^c + (\sigma_{22}^c)^2}$ . Здесь  $\sigma_{ij}^c$  – напряжения в связующем. Эти напряжения, а следовательно и эквивалентное напряжение, являются функциями радиальной координаты  $r$ . Решая экстремальную задачу для функции  $\sigma_{\text{эКВ}}^c(r)$  при значениях параметра армирования  $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$ , получим кривую 1 на рис. 2. Аналогично строится кривая 2, соответствующая появлению пластических деформаций в арматуре. Это произойдет, когда максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении арматуры по модулю достигнет предела текучести материала арматуры:  $\max_{R_1 \leq r \leq R_2} \sigma^a = \sigma_T^a$ . Кривая 3 соответствует выпучиванию пластины из своей плоскости.

Если пластина достаточно тонкая, то выпучивание произойдет значительно раньше, чем возникнут пластические деформации в арматуре и связующем, а область упругой устойчивости будет ограничена сверху только кривой 3. В дальнейшем ограничимся рассмотрением тонких пластин и предельное упругое состояние свяжем именно с потерей устойчивости их плоской формы равновесия.

**2. Докритическое напряженное состояние.** Для решения задачи устойчивости необходимо предварительно найти докритические плоские напряжения. Решим плоскую задачу теории упругости с помощью функционала дополнительной работы [1]. В случае статических граничных условий функционал можно записать в виде



Рис. 2. Область упругого состояния

$$\Psi [\sigma_{ij}^0] = h \iint_{\Omega} \Lambda (\sigma_{ij}^0) d\Omega, \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь  $\Lambda (\sigma_{ij}^0) = \frac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$  – удельная дополнительная работа. Деформации определяются по формуле:  $\varepsilon_{ij}^0 = \frac{\partial \Lambda (\sigma_{11}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0, \sigma_{22}^0)}{\partial \sigma_{ij}^0} = b_{ijkl} \sigma_{kl}^0$ . Компоненты тензоров  $b_{ijkl}$ ,  $\sigma_{ij}^0$ ,  $\varepsilon_{ij}^0$  записаны в базе полярной системы координат ( $\tilde{e}_1$  имеет радиальное направление,  $\tilde{e}_2$  – окружное). Функционал (1) задан на множестве статически допустимых напряжений, то есть напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{r} + \rho F_1 = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{12}^0 + \rho F_2 = 0 \quad (2)$$

и статическим граничным условиям

$$r = R_1 : \sigma_{11}^0 = -q_1, \sigma_{12}^0 = 0; \quad r = R_2 : \sigma_{11}^0 = -q_2, \sigma_{12}^0 = 0. \quad (3)$$

В случае отсутствия массовых сил ( $F_1 = F_2 = 0$ ) уравнения равновесия будут выполнены, если ввести функцию напряжений

$$\sigma_{11}^0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right); \quad \sigma_{22}^0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}. \quad (4)$$

Так как задача обладает круговой симметрией и ее решение единственно, то напряжения в докритическом состоянии, а следовательно и функция напряжений, не зависят от окружной координаты  $\theta$ . Тогда (4) и (3) примут вид

$$\sigma_{11}^0 = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}; \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = 0; \quad \sigma_{22}^0 = \frac{d^2 \phi}{dr^2}, \quad (5)$$

$$\sigma_{11}^0(R_1) = \frac{1}{R_1} \frac{d\phi(R_1)}{dr} = -q_1, \quad \sigma_{11}^0(R_2) = \frac{1}{R_2} \frac{d\phi(R_2)}{dr} = -q_2. \quad (6)$$

Из формул (5) видно, что функция напряжений определяется с точностью до константы. Поэтому можно принять, что

$$\phi(R_1) = 0. \quad (7)$$

В итоге, функционал (1) перепишется в виде

$$\Psi[\phi(r)] = \pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl}(r) \sigma_{ij}^0(r) \sigma_{kl}^0(r) r dr. \quad (8)$$

Из вариационного уравнения  $\delta\Psi=0$  следуют уравнение совместности деформаций и дополнительное условие к уравнению, возникающее вследствие неодносвязности области пластины:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\varepsilon_{22}^0) - \frac{d\varepsilon_{11}^0}{dr} = 0, \quad r = R_1 : \varepsilon_{11}^0 - \frac{d}{dr} (r\varepsilon_{22}^0) = 0. \quad (9)$$

Условия интегрируемости деформаций (9) можно записать через функцию напряжений:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left( b_{1122} \frac{d\phi}{dr} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left( r b_{2222} \frac{d^2\phi}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} b_{1111} \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left( b_{1122} \frac{d^2\phi}{dr^2} \right) = 0, \quad (10)$$

$$r = R_1 : b_{1111} \frac{1}{R_1} \frac{d\phi}{dr} + b_{1122} \frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left( b_{2211} \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left( r b_{2222} \frac{d^2\phi}{dr^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Добавляя к (10) и (11) условия (6) и (7), выраженные через  $\phi$

$$\frac{d\phi(R_1)}{dr} = -q_1 R_1; \quad \frac{d\phi(R_2)}{dr} = -q_2 R_2; \quad \phi(R_1) = 0, \quad (12)$$

получаем полную постановку плоской задачи теории упругости для кольцевой армированной пластины. В общем случае задача (10)–(12) не имеет аналитического решения и поэтому докритические напряжения проще определять численно из вариационной задачи для функционала (8). Искомые напряжения в докритическом состоянии удобно представить в виде суммы  $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^+$ , где  $\sigma_{ij}^s$  – напряжения аналогичной изотропной пластины:  $\sigma_{11}^s(r) = p_1 + \frac{p_2}{r^2}$ ;  $\sigma_{12}^s = \sigma_{21}^s = 0$ ;  $\sigma_{22}^s(r) = p_1 - \frac{p_2}{r^2}$ ;  $p_1 = \frac{q_1 R_1^2 - q_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ ;  $p_2 = (q_2 - q_1) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ ;  $\sigma_{ij}^+$  – дополняющие напряжения, удовлетворяющие однородным граничным условиям:  $\sigma_{11}^+(R_1) = 0$ ;  $\sigma_{11}^+(R_2) = 0$ ;  $\phi^+(R_1) = 0$ . Тогда от функционала (8) переходим к функционалу

$$\Psi^+[\phi^+] = \pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl}(r) \sigma_{ij}^+(r) \sigma_{kl}^+(r) r dr + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl}(r) \sigma_{ij}^s(r) \sigma_{kl}^+(r) r dr, \quad (13)$$

где  $\phi^+$  – функция напряжений, определяющая напряженное состояние  $\sigma_{ij}^+$ . Задаем функцию  $\phi^+$  в виде ряда, удовлетворяющего однородным граничным условиям:

$$\tilde{\phi}^+(\rho) = C \left[ 1 - 3 \left( \frac{\rho-1}{s-1} \right)^2 + 2 \left( \frac{\rho-1}{s-1} \right)^3 \right] + \sum_{\mu=-m_1}^{m_1} C_\mu (\rho-1) (\rho^{-1}-1) (\rho-s) (\rho^{-1}-s^{-1}) \rho^\mu, \quad (14)$$

где  $\rho = \frac{r}{R_1}$ ;  $s = \frac{R_2}{R_1}$ ;  $\tilde{\phi}^+(\rho) = \frac{1}{q R_1^2} \phi^+(r)$ ;  $q_1 = \xi_1 q$ ;  $q_2 = \xi_2 q$ .

Решая полученную задачу методом Рунге, определяем коэффициенты ряда (14) и таким образом определяем докритическое напряженное состояние.

**3. Задача устойчивости.** Рассмотрим функционал Брайана [2], [4], [5]:

$$I[u_3] = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} D_{ijkl} v_{ij} v_{kl} d\Omega + \frac{qh}{2} \iint_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij}^0 w_i w_j d\Omega, \quad (15)$$

где  $D_{ijkl} = \frac{h^3}{12} a_{ijkl}$ ,  $u_3$  – прогиб пластины,  $\tilde{\sigma}_{ij}^0 = \frac{1}{q} \sigma_{ij}^0$ . В цилиндрической системе координат  $v_{11} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}$ ;  $v_{12} = v_{21} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right)$ ;  $v_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2}$ ;  $w_1 = \frac{\partial u_3}{\partial r}$ ;  $w_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta}$ . Функционал (15) задан на множестве кинематически допустимых прогибов  $u_3$ . Нулевые экстремали функционала (15) определяют формы потери устойчивости. Им соответствуют собственные значения задачи устойчивости, нагрузки  $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, \dots$ . В действительности пластина выпучивается при наименьшем  $q^{(i)}$  по соответствующей этой нагрузке форме, а сама нагрузка называется критической. Цель расчета на устойчивость – определение критической нагрузки.

Из вариационного уравнения  $\delta I = 0$  следуют дифференциальное уравнение устойчивости

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r D_{ij11} v_{ij}) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r D_{ij12} v_{ij}) - \frac{\partial}{\partial r} (r D_{ij22} v_{ij}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D_{ij22} v_{ij}) - q h r \tilde{\sigma}_{ij}^0 v_{ij} = 0 \quad (16)$$

и граничные условия

$$r = R_1; R_2 : \quad u_3 = 0 \text{ или } Q_r^* = 0, \quad (17)$$

$$r = R_1; R_2 : \quad \frac{\partial u_3}{\partial r} = 0 \text{ или } M_r = 0, \quad (18)$$

где  $Q_r^* = -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r D_{ij11} v_{ij}) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (D_{ij12} v_{ij}) - D_{ij22} v_{ij} \right] + h q \tilde{\sigma}_{i1}^0 w_i$ ,  $M_r = -D_{ij11} v_{ij}$ .

Формулы (16)–(18) дают полную постановку задачи устойчивости армированной кольцевой пластины в полярной системе координат.

Разложим функцию прогибов  $u_3$  в тригонометрический ряд по координате  $\theta$ :

$$u_3(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [w_n^c(r) \cos(n\theta) + w_n^s(r) \sin(n\theta)]. \quad (19)$$

Подставив ряд (19) в дифференциальное уравнение (16), получим:

$$\begin{aligned} L_0^{(1)} [w_0^c(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ L_n^{(1)} [w_n^c(r)] + L_n^{(2)} [w_n^s(r)] \right\} \cos(n\theta) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ L_n^{(1)} [w_n^s(r)] - L_n^{(2)} [w_n^c(r)] \right\} \sin(n\theta) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $L_n^{(1)}$  и  $L_n^{(2)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) – дифференциальные операторы. Так как система функций  $1, \cos(n\theta), \sin(n\theta)$  является линейно независимой, то равенство (20) возможно только тогда, когда каждое из его слагаемых равно нулю:

$$L_0^{(1)} [w_0^c(r)] = 0, \quad (21)$$

$$L_n^{(1)} [w_n^c(r)] + L_n^{(2)} [w_n^s(r)] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

$$L_n^{(1)} [w_n^s(r)] - L_n^{(2)} [w_n^c(r)] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Из уравнения (21) определяется функция  $w_0^c(r)$ , а функции  $w_n^c(r)$  и  $w_n^s(r)$  – из системы двух уравнений (22) и (23) при одинаковых  $n$ . Аналогично можно показать, что после подстановки ряда (19) в граничные условия (17) и (18) они распадутся так, что в каждое из них будут входить функции  $w_n^c(r)$  и  $w_n^s(r)$  только с одинаковыми номерами  $n$ . Отсюда следует, что армированная кольцевая пластина, нагруженная на кромках нормальным давлением  $q_1$  и  $q_2$ , теряет устойчивость по одной из следующих форм:  $w_0(r), w_n^c(r) \cos(n\theta) + w_n^s(r) \sin(n\theta), n=1,$

2, 3, ... А в случае полярной ортотропии ( $D_{1112} = D_{2221} = 0$ ) оператор  $L_n^{(2)} \equiv 0$  и вид форм потери устойчивости упрощается:  $w_0(r)$ ,  $w_n(r) \cos(n\theta)$ ,  $w_n(r) \sin(n\theta)$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ , причем одному критическому параметру нагрузки  $q_n$  будут соответствовать две формы:  $w_n(r) \cos(n\theta)$  и  $w_n(r) \sin(n\theta)$ . В силу этого, можно рассматривать только следующие варианты форм потери устойчивости:  $w_n(r) \cos(n\theta)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ . При рассматриваемых структурах армирования материал пластины будет полярно ортотропным и неоднородным. Функционал (15) в этом случае примет вид:

$$I_n [w_n] = \int_{R_1}^{R_2} D_{ijkl} v_{nij} v_{nkl} r dr + \frac{qh}{2} \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\sigma}_{ij}^0 w_{ni} w_{nj} r dr, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

где  $v_{n11} = \frac{d^2 w_n}{dr^2}$ ;  $v_{n12} = v_{n21} = -n \frac{d}{dr} \left( \frac{w_n}{r} \right)$ ;  $v_{n22} = \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n$ ;  $w_{n1} = \frac{dw_n}{dr}$ ;  $w_{n2} = -\frac{n}{r} w_n$ . Для решения задачи методом Ритца необходимо представить функции  $w_n(r)$  в виде рядов, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Пусть пластина защемлена на обоих контурах. Тогда граничные условия примут вид  $w_n(R_1) = 0$ ;  $w_n(R_2) = 0$ ;  $\frac{dw_n(R_1)}{dr} = 0$ ,  $\frac{dw_n(R_2)}{dr} = 0$ , а функции  $w_n(r)$  можно задать в виде рядов:

$$\tilde{w}_n(\rho) = \sum_{\alpha=-m_2}^{m_2} A_\alpha^n f(\rho) \rho^\alpha, \quad (25)$$

где  $w_n(r) = R_1 \tilde{w}_n(\rho)$ ,  $f(\rho) = (\rho - 1)(\rho^{-1} - 1)(\rho - s)(\rho^{-1} - s^{-1})$ . Можно рассмотреть и другие варианты закрепления пластины. Например, шарнирное опирание на двух кромках  $w_n(R_1) = 0$ ;  $w_n(R_2) = 0$ ;  $f(\rho) = (\rho - 1)(\rho - s)$ . Или внутренняя кромка защемлена, внешняя свободна  $w_n(R_1) = 0$ ;  $\frac{dw_n(R_1)}{dr} = 0$ ;  $f(\rho) = (\rho - 1)(\rho^{-1} - 1)$ . Либо внутренняя кромка свободна, внешняя защемлена  $w_n(R_2) = 0$ ;  $\frac{dw_n(R_2)}{dr} = 0$ ;  $f(\rho) = (\rho - s)(\rho^{-1} - s^{-1})$ . Подставляя (25) в (24) получаем системы уравнений для задач о собственных значениях:

$$\mathbf{T}^{(n)} \mathbf{A}^{(n)} + q \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Здесь  $\mathbf{T}^{(n)}$  и  $\mathbf{P}^{(n)}$  – симметричные матрицы, причем  $\mathbf{T}^{(n)}$  положительно определена,  $\mathbf{A}^{(n)}$  – вектор, составленный из коэффициентов ряда (25). Решаем каждую из систем (26), находим наименьшие положительные  $q_{сж}^{(n)}$  и наибольшие отрицательные  $q_{раст}^{(n)}$  собственные значения каждой из систем, а затем определяем  $q_{сж} = \min_n \left( q_{сж}^{(n)} \right)$  – критическая нагрузка при “сжатии” (как показано на рис. 1) и  $q_{раст} = \max_n \left( q_{раст}^{(n)} \right)$  – критическая нагрузка при “растяжении” (противоположно направлению на рис. 1). Соответствующие критическим нагрузкам  $q_{сж}$  и  $q_{раст}$  собственные векторы определяют формы потери устойчивости при “сжатии” и “растяжении”.

**4. Упругие характеристики армированных пластин.** Полагаем, что кольцевые изотропные пластины армированы так, как показано, к примеру, на рис. 3 и рис. 4. Это структурно неоднородные и ортотропные конструкции. Наша цель – определить упругие характеристики материала конструкции, эквивалентной – в некотором смысле – заданной. Здесь используется модель, предложенная Ю. В. Немировским (“мягкий вариант”) [3]. В дополнение, предложен “жёсткий вариант”. Суть в следующем: упругий потенциал эквивалентной сплошной среды представляется в виде следующих сумм:

(“мягкий вариант”)

$$W_1^a = \frac{1}{2} a_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (1 - \omega) a_{ijkl}^c \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \omega_k E^a (\varepsilon_k^a)^2; \quad (27)$$

(“жёсткий вариант”)

$$W_2^a = \frac{1}{2} a_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} a_{ijkl}^c \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \omega_k (E_k^a - E) (\varepsilon_k^a)^2. \quad (28)$$

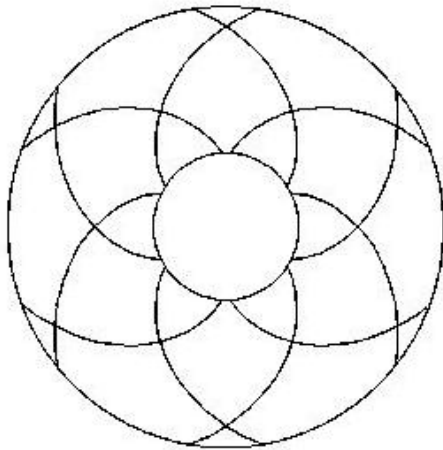


Рис. 3. Спиральное Архимеда

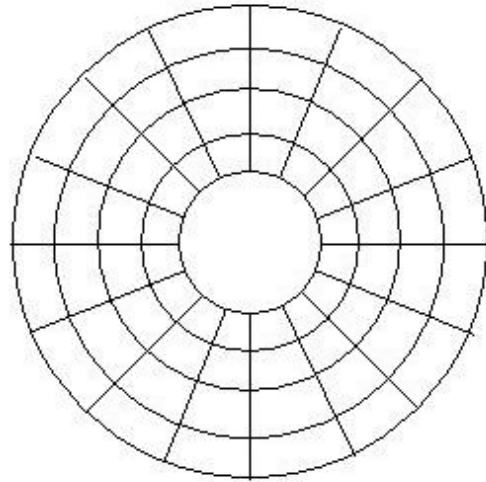


Рис. 4. Радиально-окружное армирование

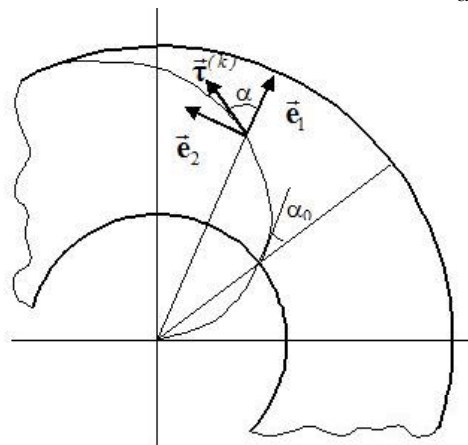


Рис. 5. Параметры армирования

В этих формулах  $a_{ijkl}^c$  – тензор упругих постоянных для изотропной среды (связующего);  $\omega = \omega_1 + \omega_2 < 1$ ,  $\omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) – удельная плотность упаковки  $k$ -го семейства арматуры;  $\varepsilon_k^a = \varepsilon_{ij} t_i^{(k)} t_j^{(k)}$ , где  $t_i^{(k)} = \tilde{r}^{(k)} \cdot \tilde{e}_i$  – направляющие косинусы  $k$ -го семейства арматуры в базисе полярной системы координат;  $E_k^a$  – модули Юнга  $k$ -го семейства арматуры. Для армирования по спиральям (рис. 3) примем, что оба семейства арматуры выполнены из одного материала с модулем упругости  $E_k^a = E^a$ , причем считается, что они имеют взаимно обратные направления, то есть  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$ , и кроме того  $\omega_1 = \omega_2$ . В случае радиально-окружного армирования (рис. 3) параметры радиального и окружного семейств арматуры задаются независимо друг от друга. Для указанных на рис. 3 схем непрерывного армирования должны

выполняться и условия постоянства сечений волокон арматуры (кроме окружных волокон):  $\rho\omega_k(\rho)t_1^{(k)}(\rho) = \omega_k(1)t_1^{(k)}(1)$ . Относительный объем арматуры в пластине может быть вычислен по формуле:  $\Omega = \frac{2}{s^2-1} \int_1^s \omega(\rho)\rho d\rho$ . Применяв формулу Грина [1]  $\sigma_{ij} = \partial W/\partial \varepsilon_{ij}$  к выражениям (27) и (28), определяем  $a_{ijkl}$ , а затем и  $b_{ijkl}$ . При указанных ограничениях в обоих вариантах эквивалентный материал получается полярно ортотропным, и упругие характеристики меняются только в радиальном направлении. Были рассмотрены четыре закона армирования волокон: спираль Архимеда, логарифмическая спираль, радиальное и окружное армирование.

Спираль Архимеда ( $\rho = D\theta$ ):

$$\omega(\rho) = 2\omega_1(\rho) = 2\omega_1^0 \text{Cos}\alpha_o / (\rho \text{Cos}\alpha); \quad \text{Cos}^2\alpha(\rho) = 1 / (1 + \rho^2 \text{tg}^2\alpha_o); \quad D = 1/\text{tg}\alpha_o.$$

Логарифмическая спираль ( $\rho = e^{b\theta}$ ):

$$\cos\alpha = \cos\alpha_o; \quad \alpha = \alpha_o = \text{const}; \quad \omega(\rho) = 2\omega_1(\rho); \quad \omega_1(\rho) = \omega_1^0/\rho; \quad b = \text{ctg}\alpha_o.$$

Радиально-окружное армирование:

пусть 1 – семейство радиальной арматуры, 2 – семейство окружной арматуры,  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = \pi/2$ ;  $\omega_1(\rho) = \omega_1^0/\rho$ ;  $\omega_1^0 = \frac{s+1}{2}\Omega_1$ ; где  $\Omega_1$  – относительный объем радиальной арматуры. Функция  $\omega_2(\rho)$  может быть задана независимо, но так, чтобы выполнялось условие  $\omega_1 + \omega_2 < 1$ . Для расчетов выберем линейный закон распределения плотности окружной арматуры  $\omega_2 = k_1\rho + k_2$ . Относительный объем, коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  окружной арматуры связаны соотношением  $\Omega_2 = \frac{2}{3}k_1 \frac{s^3-1}{s^2-1} + k_2$ .

Здесь  $\alpha_0$  и  $\omega_k^0$  – направление траектории армирования и удельная плотность одного слоя арматуры, соответственно, на входе в пластину (при  $\rho=1$ ).

Решив плоскую задачу теории упругости, определяем осредненные напряжения в композитной пластине  $\sigma_{ij}^0$ , а затем осредненные деформации  $\varepsilon_{ij}^0$ , совпадающие с деформациями в связующем  $\varepsilon_{ij}^c$  и волокне  $\varepsilon_k^a$ :

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^0 = b_{ijkl}\sigma_{kl}^0; \quad \varepsilon_k^a = \varepsilon_{ij}^0 t_i^{(k)} t_j^{(k)}.$$

Затем можно выразить напряжения в связующем и волокне через осредненные напряжения композитной пластины:

$$\sigma_{ij}^c = a_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c = a_{ijkl}^c b_{klmn} \sigma_{mn}^0 = (a_{ij11}^c b_{11mn} + 2a_{ij12}^c b_{12mn} + a_{ij22}^c b_{22mn}) \sigma_{mn}^0,$$

$$\sigma_k^a = E^a \varepsilon_k^a = E^a \varepsilon_{ij}^0 t_i^{(k)} t_j^{(k)} = E^a b_{ijmn} \sigma_{mn}^0 t_i^{(k)} t_j^{(k)},$$

где  $b_{ijkl}$  – упругие характеристики эквивалентного материала.

**5. Результаты.** На рис. 6, 7, 8 и 9 представлены графики зависимости безразмерного параметра критической нагрузки  $\lambda = q_{кр}^2/q_{кр}^H$  от угла армирования волокон на входе в пластину, содержащей 20% арматуры ( $\Omega=0,2$ ). Материал связующего – алюминий, материал волокна – бор. Здесь  $q_{кр}^H$  – критическое значение нагрузки изотропной пластины, изготовленной из материала связующего,  $q_{кр}^2$  – критическое значение нагрузки композитной пластины. Нагрузка приложена на отверстиях ( $q_1 = q; q_2=0$ ), пластина закреплена на обоих контурах. Отношение внешнего радиуса пластины к внутреннему  $s=3$ . На рис. 6 и 7 в качестве законов армирования были выбраны спираль Архимеда и логарифмическая спираль. Как видно из рисунков, для “сжатия” наиболее оптимальным является армирование с начальным углом армирования, равным 0; что соответствует радиальному армированию, а для “растяжения” наиболее выгодно армирование по логарифмической спирали с начальным углом армирования, равным 90; что соответствует окружному армированию. На рис. 8 и 9 представлены результаты для радиально-окружного армирования. Причем в пределах



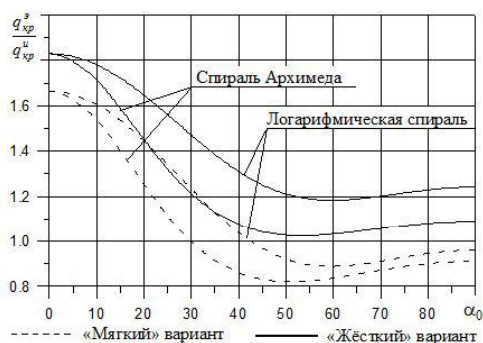


Рис. 6. “Сжатие”

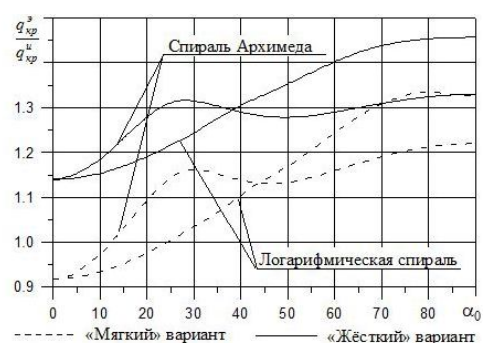


Рис. 7. “Растяжение”

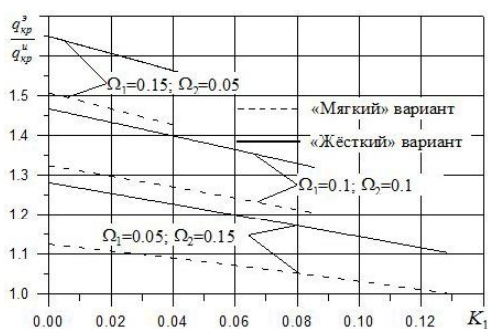


Рис. 8. Радиально-окружное армирование “Сжатие”

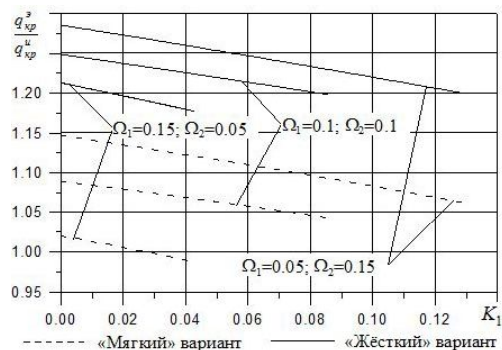


Рис. 9. Радиально-окружное армирование “Растяжение”

одного графика относительный объем радиальной  $\Omega_1$  и окружной  $\Omega_2$  арматуры не меняется. Из рисунков видно, что с увеличением коэффициента  $k_1$  (когда удельная плотность окружной арматуры увеличивается от центра к периферии) критическая нагрузка падает как для “сжатия”, так и для “растяжения”. Значит, наиболее оптимальное с точки зрения устойчивости распределение окружной арматуры, когда она концентрируется ближе к центру. Для “сжатия” более выгодно радиальное армирование, для “растяжения” – окружное.

**6. Заключение.** Основным результатом данной работы является сведение двумерной задачи устойчивости к одномерной и ее решение. Проведен анализ устойчивости композитных пластин для различных структур армирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Демидов, С. П. Теория упругости / С. П. Демидов. – М. : Высшая школа, 1979. – 432 с.
- [2] Матвеев, К. А. К исследованию общей и локальной устойчивости ортотропных пластин / К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев, А. В. Савельев // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1998. – № 2. – С. 127–139.
- [3] Немировский, Ю. В. Прочность элементов конструкций из композиционных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. – Новосибирск: Наука, 1986. – 165 с.
- [4] Немировский, Ю. В. Устойчивость композитных кольцевых пластин при различных структурах армирования / Ю. В. Немировский, К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев // Сборник научных трудов Sworld. – 2014. – Т. 30. – № 1. – С. 55–63.

[5] *Пустовой, Н. В.* Устойчивость кольцевых ортотропных пластин / Н. В. Пустовой, К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – № 2. – С. 165–170.

*Немировский Юрий Владимирович,*

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

*Матвеев Константин Александрович,*

доктор технических наук, профессор, декан факультета летательных аппаратов, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск

e-mail: matveev@craft.nstu.ru

*Моховнев Дмитрий Владимирович,*

кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск

e-mail: mohovnov@yandex.ru

Y. V. Nemirovsky, K. A. Matveev, D. V. Mokhovnev

**LIMITING ELASTIC STATE OF COMPRESSED RING PLATES WITH  
VARIOUS STRUCTURES OF REINFORCING**

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics. SA Christianovich SB RAS*

*Novosibirsk State Technical University*

**Abstract.** Limiting elastic state of ring curvilinear reinforced plates with various structures of reinforcing such as radial-peripheral, spiral and mixed one is considered. Conditions of limiting elastic state are formulated. Statements of flat stresses problem and buckling problem in terms of polar coordinate system are presented. The critical loads are determined for various laws of reinforcement and estimations of efficiency for various structures are presented.

**Keywords:** buckling, composite plate, structures of reinforcement, radial orthotropy.

**REFERENCES**

- [1] *Demidov, S. P.* Theory of elasticity / S. P. Demidov. – M. : The higher school, 1979. – 432 p.
- [2] *Matveev, K. A.* To research of the general and local stability ortotropnykh of plates / K. A. Matveev, D. V. Mokhovnev, A. V. Savelyev // Siberian magazine of industrial mathematics. – 1998. – № 2. – P. 127–139.
- [3] *Nemirovsky, Yu. V.* Durability of elements of designs from composite materials / Yu. V. Nemirovsky, B. S. Reznikov. – Novosibirsk : Nauka, 1986. – 165 p.
- [4] *Nemirovsky, Yu. V.* Stability of composite ring plates at various structures of reinforcing / Yu. V. Nemirovsky, K. A. Matveev, D. V. Mokhovnev // Collection of scientific works Sworld. – 2014. – Vol. 30. – № 1. – P. 55–63.
- [5] *Pustovoy, N. V.* Stability ring ortotropnykh of plates / N. V. Pustovoy, K. A. Matveev, D. V. Mokhovnev // Applied mechanics and technical physics. – 2000. – № 2. – P. 165–170.

*Nemirovsky, Yuri Vladimirovich*

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
SA Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

*Matveev, Konsantin Alexandrovich*

*Doctor of Technical Science, professor, dean of faculty of flying objects, Novosibirsk State  
Technical University, Novosibirsk*

*Mokhovnev, Dmitri Vladimirovich,*

*Candidate of Physical Science, associate professor, Novosibirsk State Technical University,  
Novosibirsk*