Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87

М. А. Артемов, Е. С. Барановский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ. ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Проведен сравнительный анализ теорий Сен-Венана, Леви и Мизеса. Дано сопоставление условия пропорциональности девиатора напряжений и девиатора скоростей пластических деформаций с условием соосности этих тензоров. Для плоского деформированного состояния обсуждается вопрос о нахождении среднего главного напряжения в рамках различных теорий пластического течения. Отмечается, что при выборе условия пластичности Треска значение среднего главного напряжения не определяется.

Обсуждаются следствия ассоциированного закона пластического течения для изотропной и нормально изотропной среды при выборе гладких и кусочно-гладких функций текучести.

Рассмотрены особенности альтернативных форм записи условия пластичности Треска и отмечены имеющиеся несоответствия.

Для идеальной жесткопластической и сжимаемой упругопластической среды рассмотрена осесимметричная задача для случая плоской деформации. Найдены диапазоны изменения значений напряжений на границах, в пределах которых для условия текучести Треска в пластической области реализуется только один режим пластичности. Рассмотрены случаи, когда задача является статически определимой. Показано, что при определенных значениях напряжений на границах области решения реализуется режим полной пластичности.

Приводятся формы записи обобщений условий текучести Треска, Шмитда-Ишлинского и Мизеса, рассмотренные в работах Херши, Хосфорда, Барлата, Карафиллиса, Бойса, Брона и Бессона, как функции главных значений девиатора напряжений через квадратичный и кубический инварианты девиатора напряжений.

Ключевые слова: сжимаемая упругопластическая среда, обобщенное условие пластичности Треска, плоское деформированное состояние, теория пластического течения

УДК: 539.214

Краткий обзор работ по теории идеально пластической среды

Теория Сен-Венана. Первые статьи по математической теории пластичности, в которых были приведены замкнутые системы уравнений, определяющие поведение пластического тела, принадлежат Б. Сен-Венану [1] и М. Леви [2].

В статье [1] рассмотрен случай плоской деформации для несжимаемого пластического тела. Сен-Венан [1] предположил совпадение площадок, на которых касательные напряжения и скорости сдвига принимают максимальное значение, а также выполнение условия текучести (пластичности) Треска. Если оси декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ направлены так, что для компонент тензора деформаций выполнены равенства

$$e_{j3} = 0, \ j = 1, 2, 3,$$

Поступила 29.04.2015

то максимальное касательное напряжение определяется по формуле [1]

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4\tau_{12}^2} = K,$$

а нормальное напряжение на площадках параллельных оси Ox_3[2] вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{1}$$

В [1] утверждается, что «напряжения в теле сводятся к нормальному давлению

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \tag{2}$$

одинаковому во всех направлениях, и касательному напряжению K, действующему на определенной площадке».

Поскольку нормальное напряжение на площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$ вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$$

а гидростатическое давление (среднее нормальное напряжение)

$$p = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{11} + \sigma_{33}),$$

то соотношение (2) справедливо, когда главное среднее напряжение $\sigma_3 = \sigma_{33}$ определяется по формуле

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \tag{3}$$

Однако, если не принимать это предположение, то для гидростатического давления имеет место соотношение

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \neq \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

соответственно для компоненты девиатора напряжений имеем

$$s_{33} = \frac{1}{3}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) \neq 0.$$

Соотношение [1]

$$\frac{\sigma_{12}}{\varepsilon_{12}} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}, \tag{4}$$

определяющее связь напряжений и скоростей пластических деформаций для плоского деформированного состояния, является следствием коммутативности (условие соосности тензоров) [3]–[5]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \tag{5}$$

Из условия соосности (5) тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ следует также соосность всех тензоров вида $\alpha_1\boldsymbol{E}+\beta_1\boldsymbol{\sigma}+\gamma_1\boldsymbol{\sigma}^2$ и $\alpha_2\boldsymbol{E}+\beta_2\boldsymbol{\sigma}+\gamma_2\boldsymbol{\sigma}^2$, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ изотропные скалярные функции тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и ε, $\boldsymbol{E}$ — единичный тензор второй валентности (ранга).

Теория Леви. В [6] при рассмотрении плоского деформированного состояния изотропного идеально жесткопластического тела осевое напряжение определяется формулой

$$\sigma_{33} = p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \tag{6}$$

«которая получается как по уравнениям деформационной теории, так и по уравнениям теории течения» (имеется ввиду теория Сен-Венана–Мизеса). При этом отмечается, что для вывода (6) достаточно принять условие несжимаемости. Последнее утверждение, по-видимому, основано на работе Леви [2], в которой для несжимаемого пластического тела предложена

[2]Главные (собственные) значения тензора второй валентности — инварианты [12]. При плоском деформированном состоянии напряжение σ_{33} — главное нормальное напряжение, поэтому $\sigma_{11}+\sigma_{22}$ — инвариант.

математическая модель, включающая условие текучести Треска (в форме Леви) и условие пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций

$$\frac{s_{ij}}{\varepsilon_{ij}} = \lambda, \quad i,j = 1,\, 2,\, 3. \tag{7}$$

В случае плоской деформации соотношения (7) принимают вид

$$\frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3\varepsilon_{11}} = \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3\varepsilon_{22}} = \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3\varepsilon_{33}} = \frac{\sigma_{12}}{\varepsilon_{12}}.$$

Отсюда, учитывая соотношение $\varepsilon_{33} = 0$, приходим к равенству (4), полученному в работе Леви [2] несколько иным путем.

Из того, что условие пропорциональности и условие соосности в случае плоской деформации приводят к одному и тому же соотношению, не следует их совпадение, поскольку при совпадении этих условий, например, должно выполняться подобие соответствующих кругов Мора для тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций. Если выполняется пропорциональность девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций (7), то имеет место соосность тензоров (5); обратное утверждение в общем случае не справедливо, что наглядно показывает рассмотрение кругов Мора [6].

Теория пластического потенциала. Рассмотрим вариант теории пластического потенциала [6, 7]). Согласно этой теории для пластического потенциала

$$f(tr(\boldsymbol{\sigma}), tr(\boldsymbol{s}^2), tr(\boldsymbol{s}^3)), \ \ \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{E},$$

главные компоненты тензора скоростей пластических деформаций связаны с напряжениями по формуле

$$\varepsilon_k = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_k} = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{\sigma})} + 2\frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^2)}s_k + \frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^3)}(2s_k^2 - s_i^2 - s_j^2)\right), \quad \lambda \geq 0. \tag{8}$$

Из этого равенства следует, что девиаторы напряжений и скоростей пластических деформаций пропорциональны, если пластический потенциал не зависит от кубического инварианта девиатора напряжений (см. [8–11]).

Из закона нормальной связи (8) следует соосность тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций [12].

Ассоциированный закон пластического течения предполагает равенство пластического потенциала и функции текучести. Поэтому для несжимаемого изотропного идеально пластического тела вектор скоростей деформаций в девиаторной плоскости пространства напряжений направлен по нормали к гладкой кривой текучести [5], [6], [13]–[16]. Если пластический потенциал является гладкой четной функцией девиатора напряжений

$$f(tr(\boldsymbol{s}^2), tr^2(\boldsymbol{s}^3)),$$

то из соотношения

$$\varepsilon_k = 2\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^2)}s_k + tr(\boldsymbol{s}^3)\frac{\partial f}{\partial\, tr^2(\boldsymbol{s}^3)}(2s_k^2 - s_i^2 - s_j^2)\right)$$

следует, что равенство $\varepsilon_3 = 0$ ($\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$) выполняется, когда

$$2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22} = 0.$$

Рассмотрим условие текучести Треска [13]

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_2|\} = 2k,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — собственные значения тензора напряжений.

Поскольку из ассоциированного закона пластического течения следуют соотношения

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\partial f/\partial \sigma_{ij}} = \lambda,$$

то в случае плоской деформации ($\varepsilon_{33} = 0$) при выборе условия текучести Треска имеем

$$\frac{\varepsilon_{33}}{\partial f/\partial\sigma_{33}} \neq 0,$$

если

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_3} = 0,$$

что соответствует выбору режима текучести

$$\begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k, \\ \min\{\sigma_1, \sigma_2\} < \sigma_3 < \max\{\sigma_1, \sigma_2\}. \end{cases}$$

В работе [14] для несжимаемой идеально пластической среды рассматривается пластический потенциал общего вида

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = g(\boldsymbol{s}) = G(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = G(s_1, s_2, s_3) = K(\tau_1, \tau_2, \tau_3),$$

где G, K — симметричные функции своих аргументов, τ_i — главные касательные напряжения. На основе соотношения

$$\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} \tag{9}$$

нормальный закон пластического течения [16] записывается в виде

$$\dot{e}_{ij} = \lambda\frac{\partial g}{\partial s_{ij}},$$

где $\dot{e}_{ij}$ — компоненты девиатора скоростей деформаций.

В [13] вводится понятие о нормальном характере изотропии, что соответствует предположению о четности функции пластичности относительно своих аргументов

$$f(tr(\boldsymbol{s}^2), tr^2(\boldsymbol{s}^3)) = K(|\tau_1|, |\tau_2|, |\tau_3|).$$

Вообще говоря, для изотропной среды четность функции пластичности (пластического потенциала) относительно аргументов не предполагается

$$f\left(tr(\boldsymbol{s}^2), tr(\boldsymbol{s}^3)\right) = K(\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

При зависимости пластического потенциала от кубического инварианта девиатора напряжений для нормально изотропной идеально пластической среды получаем

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{s}}\cdot\cdot\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{s}}\cdot\cdot{}^4\boldsymbol{D} = 2\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^2)}\boldsymbol{s} + tr(\boldsymbol{s}^3)\frac{\partial f}{\partial\, tr^2(\boldsymbol{s}^3)}(3\boldsymbol{s}^2 - tr(\boldsymbol{s}^2))\boldsymbol{E}\right),$$

а также

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{s}} = 2\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^2)}\boldsymbol{s} + 3tr(\boldsymbol{s}^3)\frac{\partial f}{\partial\, tr^2(\boldsymbol{s}^3)}\boldsymbol{s}^2\right);$$

для изотропной идеально пластической имеет место

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \lambda\left(2\frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^2)}\boldsymbol{s} + \frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^3)}(3\boldsymbol{s}^2 - tr(\boldsymbol{s}^2)\boldsymbol{E}\right),$$

соответственно

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{s}} = \lambda\left(2\frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^2)}\boldsymbol{s} + 3\frac{\partial f}{\partial\, tr(\boldsymbol{s}^3)}\boldsymbol{s}^2\right),$$

где ${}^4\boldsymbol{D}$ — изотропный тензор четвертой валентности, который при свертке по двум парам индексов с тензором второй валентности (двукратное скалярное умножение) выделяет девиатор последнего [12].

Поскольку тензор $\boldsymbol{s}^2$ не является девиатором, то в общем случае, когда пластический потенциал зависит от кубического инварианта девиатора напряжений, производная $\partial g/\partial \sigma_{ij}$ — девиатор, а $\partial g/\partial s_{ij}$ — нет. Следовательно,

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \neq \frac{\partial g}{\partial s_{ij}}.$$

Равенство (9) выполняется, если пластический потенциал зависит только от квадратичного инварианта, а при равенстве пластического потенциала функции текучести это соответствует выбору условия пластичности Мизеса.

В работе [14] показано, что в случае плоской деформации для пластического потенциала общего вида осевое напряжение (главное нормальное напряжение)

$$\sigma_3 = m(\sigma_1, \sigma_2).$$

Если пластический потенциал является гладкой функцией, то для нормально изотропного пластического тела[3]

$$m(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

а для изотропного пластического тела[4] [8, 9]

$$m(\sigma_1, \sigma_2) \neq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

В отличие от гладких функций пластичности кусочно-линейное условие пластичности Треска из равенства

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0$$

не позволяет определить зависимость $\sigma_3 = m(\sigma_1, \sigma_2)$.

Плоское деформированное состояние при выборе условия пластичности Шмидта-Ишлинского рассматривалось в [10].

Условие пластичности Леви. В работе [17] было показано, что из равенства

$$((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2)((\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 4k^2)((\sigma_3 - \sigma_2)^2 - 4k^2) = 0$$

следует условие пластичности Леви [2]

$$4(k^2 - J_2)(4k^2 - J_2)^2 + 27J_3^2 = 0, \tag{10}$$

где

$$J_2 = \frac{1}{2}tr(\boldsymbol{s}^2),\ J_3 = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{s}^3),$$

J_2, J_3 — второй и третий основные инварианты девиатора напряжений, являющиеся коэффициентами характеристического уравнения [6, 15][5]

Условие Леви (10) не эквивалентно условию пластичности Треска, что видно при изображении кривых пластичности на девиаторной плоскости в пространстве главных напряжений (рис.1).

Кривую пластичности Треска на девиаторной плоскости определяет, например, система [9, 17, 19, 20]

$$\begin{cases} 4(k^2 - J_2)(4k^2 - J_2)^2 + 27J_3^2 = 0, \\ 3J_2 \leq k^2. \end{cases}$$

---

[3]Пластический потенциал является четной функцией главных нормальных напряжений.

[4]Пластический потенциал не является четной функцией главных нормальных напряжений.

[5]Иная расстановка знаков в характеристическом уравнении $-\lambda^3 - \lambda J_2(\boldsymbol{s}) + J_3(\boldsymbol{s}) = 0$, принятая в ряде работ (см., например, [12]), приводит к тому, что второй основной инвариант девиатора напряжений будет иметь противоположный знак: $J_2 = -tr(\boldsymbol{s}^2)/2$.

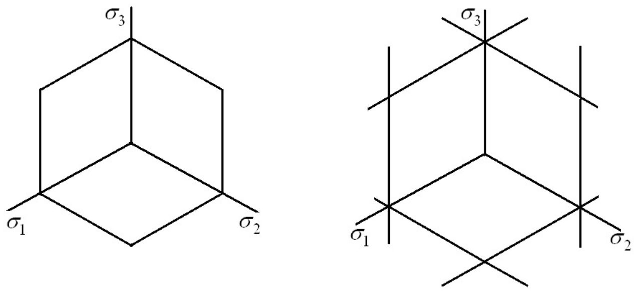

Рис. 1. Визуальная интерпретация на девиаторной плоскости условия пластичности Треска (слева) и условия Леви (справа)

При подстановке в уравнение Леви соотношений

$$(\sigma_i - \sigma_j)^2 - 4k^2 = 0,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,3,$$

то есть при рассмотрении определенной грани, получаем тождество [20].

Использование в качестве пластических потенциалов функций пластичности Треска и Леви приводит к разным соотношениям [9], [19], [20].

О соответствии условий пластичности Леви, Треска, Мизеса в случае плоской деформации. В декартовой прямоугольной системе координат условие пластичности Треска в случае плоской деформации записывается в виде

$$\begin{cases} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = 2k, \\ \min\{\sigma_1, \sigma_2\} < \sigma_{33} < \max\{\sigma_1, \sigma_2\}, \end{cases}$$

который не следует из условия Леви (10).

Условие пластичности Мизеса [21]

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}tr(s^2)} = k$$

в случае плоской деформации принимает вид

$$\begin{cases} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = 2k, \\ \sigma_{33} = \dfrac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{cases} \tag{11}$$

Второе соотношение в (11) следует из рассмотрения определяющих соотношений деформационной теории и теории течения Сен-Венана–Мизеса [6]. Для нормально изотропного тела к системе (11) приходим при выборе любого гладкого пластического потенциала общего вида, не зависящего от первого инварианта тензора напряжений [8].

Задача о толстостенной трубе. Жесткопластическая среда.

В качестве примера рассмотрим задачу об определении предельного состояния круговой цилиндрической трубы для плоского случая деформированного состояния в рамках теории пластического течения.

Обозначим через a и b внутренний и внешний радиус трубы, а через p_a и p_b — давление на внутренней и внешней стенках трубы соответственно.

Теория Леви. При выборе условия текучести Треска в рамках теории пластического течения Леви равенство нулю осевой компоненты тензора скоростей деформаций

$$\varepsilon_z = 0$$

выполняется только для режима пластичности (r, θ, z — цилиндрические координаты)

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_r = 2\varkappa k, \ \varkappa = \operatorname{sign}(\sigma_\theta - \sigma_r), \\ \min\{\sigma_\theta, \sigma_r\} < \sigma_z < \max\{\sigma_\theta, \sigma_r\}. \end{cases} \tag{12}$$

Относительно компонент σ_θ, σ_r задача статически определимая.

Распределение напряжений определяется по формулам:

$$\sigma_r = -p_a + 2\varkappa k \ln\frac{r}{a},$$
$$\sigma_\theta = \sigma_r + 2\varkappa k,$$
$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \sigma_r + \varkappa k,$$
$$\varkappa = \operatorname{sign}(\sigma_\theta - \sigma_r).$$

Компоненты девиатора напряжений имеют фиксированные значения $s_\theta = -s_r = \varkappa k$, $s_z = 0$, среднее напряжение $\sigma = \sigma_z$.

Из того, что труба находится в предельном состоянии, следует равенство

$$p_b - p_a = 2k\varkappa \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Теория пластического потенциала. В рамках теории пластического течения, использующей ассоциированный закон пластического течения, при выборе условия текучести Треска можно получить решение для случая полной пластичности, когда

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \\ \sigma_\theta - \sigma_z = 2k. \end{cases} \tag{13}$$

Из обобщенного ассоциированного закона пластического течения следует, что

$$\varepsilon_z = \lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2.$$

При условии $\varepsilon_z = 0$ получаем, что $\lambda_2 = 0$.

Для режима пластичности (13) задача является статически определимой: для определения напряжений не требуется привлекать уравнения связи напряжений и скоростей деформаций. В этом случае распределение напряжений определяется по формулам:

$$\sigma_r = -p_a + 2\varkappa k \ln\frac{r}{a},$$
$$\sigma_\theta = \sigma_r + 2\varkappa k,$$
$$\sigma_z = -p_a + 2\varkappa k \ln\frac{r}{a}.$$

Компоненты девиатора напряжений имеют фиксированные значения

$$s_\theta = \frac{4}{3}\varkappa k, \quad s_r = s_z = -\frac{2}{3}\varkappa k,$$

среднее напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma = \sigma_r + \frac{2}{3}k.$$

Если рассматривается режим пластичности (12), то

$$\sigma_r = -p_a + 2\varkappa k \ln\frac{r}{a},$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + 2\varkappa k,$$

$$\sigma_{\min} \le \sigma_z \le \sigma_{\max}.$$

Задача о толстостенной трубе. Сжимаемая упругопластическая среда

Жесткопластическое тело не является частным случаем упругопластического тела, или тела, проявляющего иные механические свойства кроме свойства пластичности [18].

При учете упругой сжимаемости упругопластического тела аналитическое решение задачи о толстостенной трубе в рамках теории пластического течения можно получить для кусочно-линейного условия пластичности общего вида [22, 23]

$$\begin{aligned}
&\alpha\sigma_\theta + \beta\sigma_r + \gamma\sigma_z = 2k, \quad \alpha+\beta+\gamma \ne 0,\\
&\sigma_r = C_1 r^{-1+m} + C_2 r^{-1-m} + N,\\
&\sigma_\theta = m(C_1 r^{-1+m} - C_2 r^{-1-m}) + N,\\
&\sigma_z = C_2\frac{\alpha m - \beta}{\gamma} r^{-1-m} - C_1\frac{\alpha m + \beta}{\gamma} r^{-1+m} + 2\nu N,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$m = \sqrt{\frac{D}{A}},\ A = \gamma^2 + 2\nu\alpha\gamma + \alpha^2,\ D = \gamma^2 + 2\nu\beta\gamma + \beta^2,\ N = \frac{2k(\alpha-\beta)}{\gamma(A-D)},$$

α, β, γ, k — константы. Величины C_1, C_2 определяются из граничных условий.

Реализация того или иного режима пластичности, определяемого заданием параметров α, β, γ, будет зависеть от выбора граничных условий.

При $\gamma = 0$ задача в пластической области является статически определимой относительно компонент σ_θ, σ_r:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = \frac{2k}{\delta\alpha} + Cr^{-\delta},\\
&\sigma_\theta = \frac{2k}{\delta\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\delta\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha} Cr^{-\delta},
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\delta = 1 + \alpha/\beta$.

Выполняя предельный переход при $\delta \to 0$, из (15) получаем $(\alpha = -\beta = 1)$

$$\sigma_r = 2k\ln(r) + C.$$

$$\sigma_\theta = 2k + \sigma_r.$$

Переход некоторой области из упругого состояние в пластическое при заданных значениях коэффициента Пуассона ν, предела пластичности k, радиусов a, b и коэффициентов α, β, γ, фигурирующих в условии пластичности, наступает при определенном соотношении между давлениями p_a и p_b [24, 25].

Поскольку в области упругого состояния [26]

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2},\quad \sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2},\quad \sigma_z = 2\nu A,$$

(величины A и B определяются из граничных условий), то из анализа этих формул следует, что при выборе условия пластичности Треска пластическая зона будет зарождаться на внутренней стенке $r = a$.

Так, на границе $r = a$ зарождается пластическая область, в которой реализуется режим пластичности

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k,\quad \sigma_\theta - \sigma_z < 2k,\quad \sigma_z - \sigma_r < 2k, \tag{16}$$

когда давления p_a и p_b связаны соотношением

$$p_a - p_b = k\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right),$$

которое получается из решения для упругого состояния при учете (16).

Режиму (16) в пластической области соответствует следующее распределение напряжений:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = -p_a + 2\varkappa k \ln(\frac{r}{a}),\\
&\sigma_\theta = \sigma_r + 2\varkappa k,\\
&\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta).
\end{aligned}$$

Поскольку при определении напряжений в пластической области решаем задачу Коши, то два последних неравенства (16) определяют диапазон изменения только давления p_a

$$-\frac{2\nu k}{1-2\nu} \le p_a \le \frac{2\nu k}{1-2\nu}, \tag{17}$$

Вне этого диапазона в пластической области возникают зоны, в которых нарушается режим (16).

При выполнении условия (17) режим (16) для условия пластичности Треска будет выполняться в области

$$a \le r \le c_1 = a\exp\left(\frac{p_a}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right).$$

Если $c_1 \le r \le c \le b$, где c — радиус упругопластической границы, то на границе $r = c_1$ происходит переход к режиму пластичности

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \;\; \sigma_\theta - \sigma_z < 2k, \;\; \sigma_z - \sigma_r < 2k, \tag{18}$$

Напряжения для режима (18) определяются по формулам (14).

Пластическая зона, в которой реализуется статически определимое состояние (13), возникает при определенном соотношении между внешним и внутренним давлением. Так, зарождение зоны статической определимости на границе $r = a$ начинается, когда

$$p_a = -\frac{2\nu k}{1-2\nu}, \;\; p_b = p_a - k\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

На упругопластической границе $r = c$ должны выполняться условия непрерывности напряжений, из которых следует, что

$$c = a\exp\left(\frac{p_a}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right), \;\; p_a \ge -\frac{2\nu k}{1-2\nu},$$

а в упругой области $c \le r \le b$ напряжения вычисляются по формулам:

$$\sigma_r = k\left(\frac{1}{1-2\nu} - \frac{c^2}{r^2}\right), \;\; \sigma_\theta = k\left(\frac{1}{1-2\nu} + \frac{c^2}{r^2}\right), \;\; \sigma_z = \frac{2\nu k}{1-2\nu}.$$

Для того чтобы в пластической области $a \le r \le c$ имело место статически определимое состояние, на границе $r = b$ внешнее давление должно принимать значение

$$p_b = k\left(\frac{a^2}{b^2}\exp^2(\frac{p_a}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}) - \frac{1}{1-2\nu}\right).$$

Предельное состояние (вся область $a \le r \le b$ находится в пластическом состоянии) наступает, когда давление на внутренней границе достигает значения

$$p_a = 2k\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{2\nu k}{1-2\nu}.$$

Если в пластической области $a \leq r \leq c$ ($c_1 \leq c \leq b$) реализуются два режима (16) и (18), то между ними не может возникнуть зона статической определимости (13). Это следует из того, что для области $a \leq r \leq c_1$ существования режима (16) величина

$$c_1 = a \exp\left(\frac{p_a}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right)$$

должна быть больше радиуса упругопластической границы для зоны статической определимости

$$c = a \exp\left(\frac{p_c}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right), \quad p_c = -\sigma_r \ \ (r = c),$$

что не имеет места.

Поскольку при активном процессе нагружения в пластической области между зонами, где реализуются режимы (16) и (18), зона, в которой реализуется условие полной пластичности не развивается, то на границе $r = c_1 \leq c \leq b$ перехода от режима (16) к режиму (18) деформации ε_r^p будут претерпевать скачок [20].

Альтернативные формы записи условия пластичности Треска

В качестве альтернативной формы записи условия пластичности Треска рассматривается соотношение [27], [28]

$$|\sigma_1 - \sigma_3| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1| = 4k \tag{19}$$

Однако только при условии $\sigma_3 = \sigma_{33} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$ из (19) в случае деформации следует равенство

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = 2k.$$

Выбор функции (19) и функции Треска

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2k$$

в качестве пластических потенциалов приводит к одинаковым соотношениям [19, 28].

Обобщения условий пластичности Треска, Шмидта-Ишлинского и Мизеса

На примере осесимметричной упругопластической задачи для плоского деформированного состояния было показано, что рассмотрение кусочно-линейных условий пластичности может приводить к разрывам пластических деформаций [20, 37].

Непрерывные решения получаем при выборе гладких функций пластичности.

Известны обобщения [29–33] условий пластичности Треска, Мизеса и Шмидта-Ишлинского [1], [21], [34], [35]

$$|s_1 - s_2|^n + |s_2 - s_3|^n + |s_3 - s_1|^n = 2k^n, \tag{20}$$

$$|s_1|^n + |s_2|^n + |s_3|^n = \frac{2^n + 2}{3^n} k^n, \tag{21}$$

где s_i — собственные значения девиатора напряжений.

При $n = 2$ условия (20) и (21) переходят в условие пластичности Мизеса, а при $n = 1$ и $n \to \infty$ они переходят в условие пластичности максимального касательного и максимального приведенного напряжения соответственно.

Для четных значений показателя степени условия пластичности (20), (21) можно выразить через основные инварианты девиатора напряжений [36], [37]

$$(s_1 - s_2)^{2m} + (s_1 - s_3)^{2m} + (s_2 - s_3)^{2m} =$$

$$= 2tr(\boldsymbol{s}^{2m}) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i C_{2m}^i [tr(\boldsymbol{s}^i) tr(\boldsymbol{s}^{2m-i}) - tr(\boldsymbol{s}^{2m})] + \frac{(-1)^m}{2} C_{2m}^m [tr^2(\boldsymbol{s}^m) - tr(\boldsymbol{s}^{2m})].$$

В частных случаях справедливы формулы:

$$(s_1 - s_2)^4 + (s_1 - s_3)^4 + (s_2 - s_3)^4 = 18J_2^2,$$

$$(s_1 - s_2)^6 + (s_1 - s_3)^6 + (s_2 - s_3)^6 = 66J_2^3 - 81J_3^2,$$

$$(s_1 - s_2)^8 + (s_1 - s_3)^8 + (s_2 - s_3)^8 = (258J_2^3 - 648J_3^2)J_2.$$

Однако использование условий (19), (20) и их альтернативных форм записи порождает сложности, связанные с интегрированием соотношений ассоциированного закона пластического течения.

Выводы

Если под статически определимой задачей теории жесткопластического тела понимать возможность определения напряжений в теле, рассматривая только уравнение равновесия и условия пластичности, то задача о трубе, за исключением случая, когда условие пластичности определяется системой двух уравнений, не является таковой, поскольку, рассматривая только условия пластичности и уравнение равновесия, нельзя найти распределение напряжений. Необходимо также рассматривать уравнение связи напряжений и приращений деформаций и учитывать кинематические соотношения.

При решении задачи плоской деформации для жесткопластического тела при выборе условия пластичности Треска главное среднее напряжение не определяется. Главное среднее напряжение определяется для статически определимого состояния, например, при рассмотрении условия полной пластичности.

Условие пластичности максимального касательного напряжения не эквивалентно условию пластичности Леви.

Выбор кусочно-линейных условий пластичности при решении упругопластических задач в рамках теории пластического течения может приводить к разрывам пластических деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Saint-Venant, B.* Mémoire sur l'etablissement des équation différenielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites ou l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / B. Saint-Venant // J. d. Math. Pures Appl. Liouville. – 1871. – Ser. II. – V. 16. – P. 308-316. (Русский перевод: Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности. Сб. ст. М.: ИЛ, 1948. С. 11 19.)

[2] *Lévy, M.* Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / M. Lévy // J. Math. Pures Appl. – 1871. – Ser. II. – Vol. 16. – P. 369–372. (Русский перевод: Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности. Сб. ст. – М.: ИЛ, 1948. – С. 20–23.)

[3] *Ишлинский, А. Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Уч. Записки МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108.

[4] *Ишлинский, А. Ю.* Прикладные задачи механики. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А. Ю. Ишлинский. М. : Наука, 1986. С. 62 83.

[5] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с.

[6] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.

[7] *Mises, R.* Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen / R. Mises // Ztschr. Angew. Math. und Mech. – 1928. – Band 8. – Heft 3. – S. 161–185.

[8] *Артемов, М. А.* Следствия нормального закона пластического течения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5. – № 9. – С. 145–147.

[9] *Артемов, М. А.* О соотношениях, вытекающих из условия пластичности Треска. / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 3. – С. 7–8.

[10] *Артемов, М. А.* О соотношениях, вытекающих из условия пластичности максимального приведенного напряжения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 4. – С. 4–5.

[11] *Артемов, М. А.* Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 3. – С. 27–28.

[12] *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

[13] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.

[14] *Freudental, A. M.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum / A. M. Freudental, H. Geiringer. – Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and plasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1958. P. 229 433. (Русский пер. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М. : Физматгиз, 1962. – 432 с.)

[15] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.

[16] *Каменярж, Я. А.* Предельный анализ пластических тел и конструкций / Я. А. Каменярж. – М.: Наука, 1997. – 512 с.

[17] *Reuss, A.* Vereintachte Berechnung der plastischen Formanderungs-geschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung / A. Reuss // Ztschr. Angew. Math. und Mech. – 1933. – Band. 13. – Heft 5. – S. 356–360.

[18] *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971. – 232 с.

[19] *Артемов, М. А.* Кусочно-линейные условия пластичности / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула, 2014. – С. 103–110.

[20] *Артемов, М. А.* Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 81–91.

[21] *Mises, R.* Mechanik des festen Korpers im plastischen deformablen Zustand / R. Mises // Gottinger Nachr. Math. Phys. 1913. Heft 4. S. 582 592. (Русский пер. Мизес Р. Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии / Теория пластичности. Сб. ст. – М.: ИЛ, 1948. – С. 57–69.

[22] *Артемов, М. А.* Распределение напряжений и деформаций в цилиндрической трубе при выборе кусочно-линейного условия пластичности // М. А. Артемов, И. А. Ларин, Н. С. Потапов / Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – № 9. – С. 117–119.

[23] *Артемов, М. А.* Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7. № 5. С. 126 128.

[24] *Артемов, М. А.* К задаче Ламе / М. А. Артемов, А. П. Якубенко // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 11–12.

[25] *Артемов, М. А.* О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии / М. А. Артемов, Н. П. Бестужева, Н. С. Потапов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – № 7. – С. 88–92.

[26] *Беляев, Н. М.* Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1965. – 856 с.

[27] *Malvern, L. E.* Introduction to the mechanics of a continuous medium / L. E. Malvern. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969. – 713 p.

[28] *Артемов, М. А.* Предельные условия пластичности / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко// Теоретические и прикладные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. С. 13 14.

[29] *Hershey, A. V.* The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals / A. V. Hershey // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1954. – V. 21. – P. 241–249.

[30] *Hosford, W. F.* A generalize isotropic yield criterion / W. F. Hosford // J. Appl. Mech. – 1972. – V. 39. – № 2. – P. 607–609.

[31] *Karafillis, A. P.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor / A. P. Karafillis, M. C. Boyce // J. Mech. Phys. Solid. – 1993. – V. 41. – P. 1859–1886.

[32] *Barlat, F.* Yielding description of solution strengthened aluminum alloys / F. Barlat, R. C. Becker, Y. Hayashida, Y. Maeda, M. Yanagawa, K. Chung, J. C. Brem, D. J. Lege, K. Matsui, S. J. Murtha, S. Hattori // Int. J. Plasticity. – 1997. – V. 13. – P. 385–401.

[33] *Bron, F.* A yield function for anisotropic materials: Application to aluminium alloys / J. Besson, F. Bron // Int. J. Plast. – 2004. – V 20(4-5). – P. 937–963.

[34] *Schmidt, R.* Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet / R. Schmidt // Ingenieur archiv. 1932. Band. III. Heft 3. S. 215 235. (Русский перевод: Шмидт Р. О зависимости между напряжениями и деформациями в области упрочнения.Теория пластичности. – М. : ИЛ, 1948. – С. 321–256.)

[35] *Ишлинский, А. Ю.* Гипотеза прочности формоизменения / А. Ю. Ишлинский // Учен. записки МГУ. Механика. – 1940. – Вып. 46. – С. 117–124.

[36] *Артемов, М. А.* Альтернативная форма записи условия пластичности / М. А. Артемов, Е. С. Барановский // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12-3. – С. 292.

[37] *Артемов, М. А.* Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения течения / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 70–81.

Артемов Михаил Анатольевич,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: artemov_m_a@mail.ru

Барановский Евгений Сергеевич

кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: esbaranovskii@gmail.com

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii

MATHEMATICAL MODELING OF PLASTIC SATE OF THE BODIES IN CASE OF PLANE STRAIN

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. A comparative analysis of the theories of Saint-Venant, Levy and Mises has been presented. Comparison of condition of proportionality of stress deviator and plastic strain deviator has been given taking into account coaxiality of these two tensors. For plane strain case, the problem of obtaining of medium principle stress is discussed within different plastic flow theories. It is pointed out that the value of medium principle stress is undetermined in case of the Tresca plastic law.

The consequences of associated flow rule for regular isotropic and normally isotropic medium have been discussed in case of smooth and piecewise smooth flow functions.

The particularities of the alternative forms of statement of the Tresca yiled criterion are considered and respective modifications are discussed.

For ideal rigid-plastic and compressible elasto-plastic medium, the plane strain axisymmetric problem is considered. Stress range variations at the boundaries, within which the only one plastic regime takes place for the Tresca yield criterion, have been obtained. Particular cases are considered when the problem is statically determined. It is shown that for some stress values at the solution region boundaries the completely plastic regime takes place.

Generalized forms of statements for the Tresca, Shmidt-Ishlinskii and Mises yield criterions proposed by A. V. Hershey, W. F. Hosford, F. Barlat, A. P. Karafillis, M. C. Boyce, F. Bron, J. Besson as functions of principle values of stress deviator have been presented via quadratic and cubic stress tensor invariants.

Keywords: compressible elastic-plastic medium, generalized Tresca's yield criterion, plane strain, plasticity theory

REFERENCES

[1] *Saint-Venant, B.* Mémoire sur l'etablissement des équation differenielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites ou l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / B. Saint-Venant // J. d. Math. Pures Appl. Liouville. 1871. Ser. II. – V. 16. – P. 308-316.

[2] *Lévy, M.* Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / M. Lévy // J. Math. Pures Appl. – 1871. – Ser. II. – Vol. 16. – P. 369–372.

[3] *Ishlinskii, A. Y.* On the equations of deformation of bodies beyond the elastic limit / A. Y. Ishlinskii // Scientific notes of the Moscow State University. Mechanics. – 1946. – Vol. 117. – P. 90–108.

[4] *Ishlinskii, A. Y.* Applied problems of mechanics / A. Y. Ishlinskii. – Moscow: Nauka, 1986. – P. 62 83.

[5] *Ishlinskii, A. Y.* The Mathematical Theory of Plasticity / A. Y. Ishlinskii, D. D. Ivlev – Moscow: FIZMATLIT, 2001. – 704 p.

[6] *Kachanov, L. M.* Foundations of the Theory of Plasticity /L. M. Kachanov. – Moscow: Nauka, 1973. – 576 p.

[7] *Mises, R.* Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen / R. Mises // Ztschr. Angew. Math. und Mech. – 1928. – Band 8. – Heft 3. – S. 161–185.

[8] *Artemov, M. A.* Normal plastic flow implications / M. A. Artemov, N. S. Potapov, A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – № 9. – P. 145–147.

[9] *Artemov, M. A.* About relations arising from Treska plasticity condition / M. A. Artemov, N. S. Potapov, A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2011. – Vol. 7. – № 3. – P. 7–8.

[10] *Artemov, M. A.* About relations arising from the maximum reduced stress plasticity condition / M. A. Artemov, N. S. Potapov, A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2011. – Vol. 7. – № 4. – P. 4–5.

[11] *Artemov, M. A.* Isotropic relations and the associated flow law / M. A. Artemov, N. S. Potapov // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2011. – Vol. 7. – № 3. – P. 27–28.

[12] *Lurie, A. I.* Nonlinear theory of elasticity /A. I. Lurie. – Moscow: Nauka, 1980. – 512 p.

[13] *Ivlev, D. D.* Theory of Ideal Plasticity / D. D. Ivlev. – Moscow: Nauka, 1966. – 232 p.

[14] *Freudental, A. M.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and plasticity / A. M. Freudental, H. Geiringer. – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – P. 229–433.

[15] *Sokolovskii, V. V.* Theory of plasticity / V. V. Sokolovskii. Moscow: Vishaya Shkola, 1969. – 608 p.

[16] *Kamenjarzh, J. A.* Limit analysis of plastic bodies and structures / J. A. Kamenjarzh. – Moscow: Fizmatlit, 1997. – 512 p.

[17] *Reuss, A.* Vereintachte Berechnung der plastischen Formanderungs-geschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung / A. Reuss // Ztschr. Angew. Math. und Mech. – 1933. – Band. 13. – Heft 5. – S. 356–360.

[18] *Ivlev, D. D.* Theory of Hardening Plastic Solid / D. D. Ivlev, G. I. Bikovcev. – Moscow: Nauka, 1971. – 232 p.

[19] *Artemov, M. A.* Ratio isotropy and associated flow law / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Yakubenko // Modern Problems of Mathematics, Mechanics, Computer Science. Proceedings of the International Conference, Tula, 15–19 September 2014. – Tula: Tula State University, 2014. – P. 103–110.

[20] *Artemov, M. A.* Ratio isotropy and associated flow law / M. A. Artemov E. S. Baranovskii , A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics. – 2014. – № 4. – P. 81–91.

[21] *Mises, R.* Mechanik des festen Korpers im plastischen deformablen Zustand / R. Mises // Gottinger Nachr. Math. Phys. – 1913. – Heft 4. – S. 582–592.

[22] *Artemov, M. A.* Stress and strain distribution in a cylindrical tube with piecewise-linear plasticity condition / M. A. Artemov, I. A. Larin, N. S. Potapov // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2010. – Vol. 6. – № 9. – P. 117–119.

[23] *Artemov, M. A.* Mathematical modeling of the equilibrium state of a circular cylindrical tube / M. A. Artemov, N. S. Potapov, A. P. Yakubenko //Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2011. – Vol. 7. – № 5. – P. 126–128.

[24] *Artemov, M. A.* On the Lame problem / M. A. Artemov, A. P. Yakubenko // Theoretical and Applied Problems of Education and Science. Proceedings of the International Conference, Tambov, 31 March 2014. – Tambov: Ucom, 2014. – P. 11–12.

[25] *Artemov, M. A.* The implementation of full plasticity condition at flat strain state / M. A. Artemov, N. P. Bestuzheva, N. S. Potapov// Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2010. – Vol. 6. – № 7. – P. 88–92.

[26] *Belyaev N. M.* Strength of materials / N. M. Belyaev. – Moscow: Nauka, 1965. – 856 p.

[27] *Malvern, L. E.* Introduction to the mechanics of a continuous medium / L. E. Malvern. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969. – 713 p.

[28] *Artemov, M. A.* Extreme conditions of plasticity / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Yakubenko // Theoretical and Applied Problems of Education and Science. Proceedings of the International Conference, Tambov, 31 March 2014. – Tambov: Ucom, 2014. – P. 13–14.

[29] *Hershey, A. V.* The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals / A. V. Hershey // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1954. – V. 21. – P. 241–249.

[30] *Hosford, W. F.* A generalize isotropic yield criterion / W. F. Hosford // J. Appl. Mech. – 1972. – V. 39. – № 2. – P. 607–609.

[31] *Karafillis, A. P.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor / A. P. Karafillis, M. C. Boyce // J. Mech. Phys. Solid. – 1993. – V. 41. – P. 1859–1886.

[32] *Barlat, F.* Yielding description of solution strengthened aluminum alloys / F. Barlat, R. C. Becker, Y. Hayashida, Y. Maeda, M. Yanagawa, K. Chung, J. C. Brem, D. J. Lege, K. Matsui, S. J. Murtha, S. Hattori // Int. J. Plasticity. – 1997. – V. 13. – P. 385–401.

[33] *Bron, F.* A yield function for anisotropic materials: Application to aluminium alloys / J. Besson, F. Bron // Int. J. Plast. – 2004. – V 20(4-5). – P. 937–963.

[34] *Schmidt, R.* Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet / R. Schmidt // Ingenieur archiv. – 1932. – Band. III. – Heft 3. – S. 215–235.

[35] *Ishlinskii, A. Y.* Hypothesis strength forming / A. Y. Ishlinskii // Scientific notes of the Moscow State University. Mechanics. – 1940. – Vol. 46. – P. 117–124.

[36] *Artemov, M. A.* Alternative forms of the piecewise-linear conditions of plasticity and their generalizations / M. A. Artemov E. S. Baranovskii , A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics. – 2015. – № 1. – P. 70–81.

[37] *Artemov, M. A.* Alternative forms of plasticity condition / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii //Advances in Current Natural Sciences. – 2014. – № 12 (3). – P. 292.

Artemov Mikhail Anatolievich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Chair, Voronezh State University, Voronezh

Baranovskii Evgenii Sergeevich

PhD, Assoc. Professor, Voronezh State University, Voronezh