

К. Г. Дмитрик, А. Н. Спорыхин

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ СЖАТИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

**Аннотация.** В работе исследована устойчивость двухслойной сферической оболочки, внешний слой которой упругий, а внутренний – упругопластический. В первой части находим докритическое напряженно-деформированное состояние в осесимметричном случае в сферической системе координат. Во второй части исследуем устойчивость основного состояния составной оболочки. Для этого выписываем уравнения равновесия в возмущениях для оболочки и включения при соответствующих граничных условиях. Далее, задача определения критической нагрузки сводится к задаче на собственные значения относительно временного множителя. В результате получаем зависимость критического внешнего давления от внешнего и внутреннего радиуса оболочки, соответствующую осесимметричной форме потери устойчивости оболочки с включением.

**Ключевые слова:** устойчивость, оболочка, напряжения, деформация, пластичность, упругость.

УДК: 539.374

Исследованию устойчивости неоднородных сферических оболочек при нагружении посвящены работы [1], [3], [5], [6], [9]. При этом в [1], [3], [9] исследована устойчивость сферических упругих оболочек, в [5] – вязкоупругих оболочек, когда наполнитель описывался соотношениями теории упруговязкопластического тела [7], а в [6] – соотношениями модели Кельвина-Фойхта, точно так же, как в работах [3, 9] в предположении, что физико-механические параметры изменяются по экспоненциальному закону.

1. Ниже в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости исследуется устойчивость составной сферической оболочки, верхний слой которой является упругим, а внутренний – упругопластическим, описываемым соотношениями теории Генки-Ильюшина.

По внешнему контуру оболочки равномерно распределена нагрузка интенсивности  $p$ , а по внутреннему – нагрузка интенсивности  $q$ . Трением между оболочкой и включением пренебрегаем, полагая, что на границе контакта оболочка и наполнитель деформируются совместно, без проскальзывания и отставания. Таким образом, рассматривается двусвязная область при всестороннем равномерном сжатии: упругая оболочка с ЕР включением.

Обозначим через  $b$  внешний радиус оболочки, через  $\gamma$  – внешний радиус включения, через  $a$  – радиус полости. Докритическое состояние будем определять в рамках геометрически линейной теории.

Полагаем, что оболочка и включение несжимаемы, тогда

$$g_j^i \varepsilon_i^j = 0, \quad (1.1)$$

где  $g_j^i$  — компоненты метрического тензора,  $\varepsilon_i^j$  — компоненты тензора деформаций.

Упругая область представима законом Гука

$$S_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}g_{ij}. \quad (1.2)$$

Область включения подчиняется соотношениям теории малых упругопластических деформаций [4].

$$S_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}\varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_u = W(\varepsilon_u). \quad (1.3)$$

где  $\sigma_u$  — интенсивность напряжений,  $\varepsilon_u$  — интенсивность деформаций.

Для ряда материалов функцию  $W(\varepsilon_u)$  можно аппроксимировать при помощи степенной зависимости [4]

$$\sigma_u = k \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_\tau} \right)^m, \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon_\tau$  — деформация, соответствующая началу пластического течения,  $k$  — предел текучести материала.

Показатель степени  $m$  меняется в пределах  $0 \leq m \leq 1$ . Значению  $m = 0$  соответствует идеально пластическое тело, а значению  $m = 1$  — идеально упругое.

Заметим, что конкретизация (1.4) функции  $W(\varepsilon_u)$  позволяет получить решение задачи в аналитическом виде.

Деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия для оболочки и, соответственно, включения таковы:

$$\nabla_i \sigma^{ij} = 0. \quad (1.6)$$

В силу принятых предположений, на границе контакта оболочки и заполнителя выполняются условия совместности перемещений и напряжений. Условия на внешней границе оболочки, а также внутренней границе включения совместно с уравнениями (1.1)–(1.4) соответственно для оболочки и включения представляют собой связную краевую задачу.

Исходя из уравнений равновесия (1.6), привлекая соотношения (1.1)–(1.5), и учитывая при этом граничные условия на внешнем контуре оболочки и, соответственно, внутреннем контуре заполнителя, находим докритическое напряженно-деформированное состояние, которое в осесимметричном случае в сферической системе координат  $(\rho, \theta, \phi)$  таково

для оболочки

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 4\mu C_1 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3} \right) - p, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\phi = 2\mu C_1 \left( \frac{1}{r^3} + \frac{2}{b^3} \right) - p, \\ \varepsilon_r &= -\frac{2C_1}{r^3}, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{C_1}{r^3}, u_r = \frac{C_1}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

для заполнителя

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{2^{m+1}}{3m\varepsilon_\tau^m} k B_1^m \left( \frac{1}{a^{3m}} - \frac{1}{r^{3m}} \right) - q, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \sigma_\phi^{(1)} = \frac{2^{m+1}}{3m\varepsilon_\tau^m} k B_1^m \left( \frac{1}{a^{3m}} - \frac{1}{r^{3m}} \right) + \frac{2^m}{\varepsilon_\tau^m} k B_1^m \frac{1}{r^{3m}} - q, \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -\frac{2B_1}{r^3}, \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{B_1}{r^3}, u_r^{(1)} = \frac{B_1}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В соотношениях (1.7), (1.8)  $C_1$  и  $B_1$  — постоянные интегрирования.

Для идеального пластического заполнителя из (1.8) получаем следующее решение

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)} &= 2k \ln \frac{r}{a} - q, \\ \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\phi^{(1)} &= k \left[ \ln \left( \frac{r}{a} \right)^2 + 1 \right] - q, \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -\frac{2B_1}{r^3}, \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{B_1}{r^3}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $B_1$  определяем из условия на поверхности контакта  $\gamma$  оболочка-включение.

$$\sigma_r^{\text{об}} = \sigma_r^{\text{вкл}}, u_r^{\text{об}} = u_r^{\text{вкл}} \quad \text{при} \quad r = \gamma.\tag{1.10}$$

Для случая (1.7), (1.9) они таковы

$$\begin{aligned}C_1 = B_1 &= C_0, \\ C_0 &= \frac{\left( 2k \ln \frac{\gamma}{a} - q + p \right) \gamma^3 b^3}{4\mu (\gamma^3 - b^3)}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

2. Исследование устойчивости основного состояния составной оболочки сводится [8] к решению уравнения равновесия для оболочки и включения при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия и граничные условия имеют вид

$$\nabla_j \left( \overset{+}{\sigma}{}^{ij} + \overset{0}{\sigma}{}^{jk} \nabla_k \overset{+}{u}{}^i \right) + X^i - \rho_0 S^2 \overset{+}{u}{}^i = 0,\tag{2.1}$$

$$\left( \overset{+}{\sigma}{}^{ij} + \overset{0}{\sigma}{}^{jk} \nabla_k \overset{+}{u}{}^i \right) n_j = \overset{+}{p}{}^i.\tag{2.2}$$

Здесь и далее символ “+” сверху относится к амплитудным значениям соответствующих величин, а символ “0” — к величинам докритического состояния, которые определяются соотношениями (1.7) для оболочки и (1.9) — для включения;  $\rho_0$  — плотность среды в недеформированном состоянии;  $S = i\omega$  — комплексная величина,  $\omega$  — собственные значения.

В случае “мертвой” нагрузки

$$X^i = \overset{+}{p}{}^i = 0.\tag{2.3}$$

Связь между амплитудными значениями компонента тензора напряжений и деформации представим согласно (1.1)–(1.3) в форме

– для оболочки

$$\overset{+}{\sigma}{}^{ij} = \lambda \overset{+}{\varepsilon}{}_{kk} g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}{}_{\alpha\beta},\tag{2.4}$$

– для включения [2]

$$\overset{+}{\sigma}{}^{ij} = \frac{2}{3} E_c g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \left( K - \frac{2}{3} E_c \right) g^{ij} \overset{+}{\varepsilon}{}_{kk} + \frac{\overset{+}{e}_u}{\overset{+}{\sigma}_u} (E_k - E_c) \overset{0}{S}{}^{ij},\tag{2.5}$$

$$\overset{0}{S}{}^{ij} = \overset{0}{\sigma}{}^{ij} - \overset{0}{\sigma} g^{ij}, \overset{0}{\sigma} = \frac{1}{3} \overset{0}{\sigma}{}_{kk},$$

где

$$\begin{aligned} \overset{+}{e}_u = \frac{2}{9} \frac{e_u^0}{e_u^0} & \left[ (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) (\varepsilon_{11}^+ - \varepsilon_{22}^+) + (\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{33}^0) (\varepsilon_{22}^+ - \varepsilon_{33}^+) + (\varepsilon_{33}^0 - \varepsilon_{11}^0) (\varepsilon_{33}^+ - \varepsilon_{11}^+) \right. \\ & \left. + 6 (\varepsilon_{12}^0 \varepsilon_{12}^+ + \varepsilon_{23}^0 \varepsilon_{23}^+ + \varepsilon_{31}^0 \varepsilon_{31}^+) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$E_k = \frac{dW}{de_u} \Big|_{e_u^0}, \quad E_c = \frac{\sigma_u^0}{e_u}, \quad K = \frac{E}{1-2\nu}.$$

В соотношениях (2.4), соответственно, (2.5), связь между амплитудными величинами деформаций и перемещений согласно (1.5) такова

$$2 \varepsilon_{ij}^+ = \nabla_i u_j^+ + \nabla_j u_i^+. \quad (2.7)$$

Условие несжимаемости (1.1) для амплитуд деформаций записывается так

$$\varepsilon_k^k = 0. \quad (2.8)$$

При этом условии, (2.8), связь между амплитудными значениями компонент тензора напряжений и деформаций (2.4), соответственно, (2.5), принимает вид  
– для оболочки

$$S^{ij} = 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^+, \quad (2.9)$$

– для заполнителя

$$S^{ij}(1) = \frac{2}{3} E_c g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^+(1) + \frac{e_u^0}{\sigma_u} (E_k - E_c) S^{ij}(1). \quad (2.10)$$

Если включение – идеально пластическое тело, то в (2.10)  $E_k = 0$ . Далее ограничимся этим случаем. Условия на границе раздела сред таковы

$$[\sigma_{ij} n_j] = 0, \quad [u_j] = 0. \quad (2.11)$$

Таким образом, задача определения критической нагрузки согласно [7] сводится к задаче на собственные значения относительно  $\omega$ . Докритическое состояние будет устойчивым, если

$$Jm(\omega_n) \geq 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.12)$$

Эти условия определяют область устойчивости в пространстве параметров нагружения при конкретных физико-механических и геометрических характеристиках оболочки и включения. При этом граница области устойчивости определяется из условия

$$\min \{Jm(\omega_n)\} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.13)$$

Для осесимметричной формы потери устойчивости уравнения равновесия (2.1) в сферической системе координат имеют вид [8]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \sigma_r \frac{d^2 u}{dr^2} + \sigma_\theta \frac{1}{r} \left( \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) - \rho_0 S^2 u = 0. \quad (2.14)$$

Здесь и далее символ “–” опустим.

При этом согласно (2.7), (2.9), (2.10) имеем

– для оболочки

$$\sigma_r = p_1 + 2\mu \frac{du}{dr}, \quad \sigma_\theta = p_1 + 2\mu \frac{u}{r} \quad (2.15)$$

– для включения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p_2 + 2E_c \left( \frac{1}{3} \frac{du}{dr} - \frac{S_r^0}{\sigma_u} \right) \frac{u}{r} \\ \sigma_\theta &= p_2 + 2E_c \left( \frac{1}{3} - \frac{S_\theta^0}{\sigma_u} \right) \frac{u}{r}\end{aligned}\tag{2.16}$$

где  $p_i$  — гидростатическое давление ( $c = 1, 2$ ).

Условия несжимаемости (2.8) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = 0.\tag{2.17}$$

Из условий несжимаемости (2.17) находим для оболочки и, соответственно, включения

$$u_{об} = \frac{A_1}{r^2}, u_{вкл} = \frac{A_2}{r^2}.\tag{2.18}$$

Из соотношений (2.14)–(2.16), учитывая (2.18), находим решения:

– для оболочки

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left[ \left( \left( \frac{C}{b^3} - 1 \right) \frac{4}{3} \mu - p \right) \frac{1}{r^3} - 5\mu G \frac{1}{r^6} + \rho_0 \omega^2 \frac{1}{r} \right] A_1 + A_3, \\ \sigma_\theta &= \left[ \left( \left( \frac{2C}{b^3} + 1 \right) \frac{2}{3} \mu - p \right) \frac{1}{r^3} - 5\mu G \frac{1}{r^6} + \rho_0 \omega^2 \frac{1}{r} \right] A_1 + A_3,\end{aligned}\tag{2.19}$$

– для включения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left[ \frac{k}{c} \ln r + 2k \frac{1}{r^3} \left( \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{3} \right) + (p - k) \frac{3}{r^3} + \rho_0 \omega^2 \frac{1}{r} \right] A_2 + A_4, \\ \sigma_\theta &= \left[ \frac{k}{c} \left( \ln r + \frac{1}{2} \right) + 2k \frac{1}{r^3} \left( \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{3} \right) + (p - k) \frac{3}{r^3} + \rho_0 \omega^2 \frac{1}{r} \right] A_2 + A_4.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Для определения постоянных интегрирования  $A_1, A_2, A_3, A_4$  привлекаем граничные условия, которые, согласно (2.2), таковы

$$\sigma_{об}^r + \sigma_{об}^0 \frac{du_{об}}{dr} = p_r \quad \text{при } r = b,\tag{2.21a}$$

$$\sigma_{вкл}^r + \sigma_{вкл}^0 \frac{du_{вкл}}{dr} = q_r \quad \text{при } r = a,\tag{2.21б}$$

а также условия на границе контакта оболочка-включение, которые, согласно (2.11), таковы

$$\sigma_{об}^r = \sigma_{вкл}^r, u_{об} = u_{вкл} \quad \text{при } r = \gamma.\tag{2.22}$$

Ограничимся случаем “мертвой” нагрузки, тогда в (2.21a), (2.21б)  $p_r = q_r = 0$ . Из условия (2.18) следует, что  $A_1 = A_2 = A$ . Для определения трех оставшихся постоянных интегрирования  $A, A_3, A_4$ , согласно граничным условиям (2.21a), (2.21б), (2.22), имеем систему трех однородных линейных алгебраических уравнений. Условием существования нетривиального решения которой является равенство нулю определителя. Откуда приходим к характеристическому уравнению.

$$F = a_1 - a_2 + a_3 = 0,\tag{2.23}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left( \frac{1}{\gamma^3 - b^3} - \frac{1}{\gamma^3} - \frac{5}{4} \frac{b^3}{(\gamma^3 - b^3)\gamma^3} \right) p - \frac{2k \ln \frac{\gamma}{a} - q}{\gamma^3 - b^3} \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{b^3}{\gamma^3} \right) - \\
&\quad - \frac{4k\mu \ln \gamma (\gamma^3 - b^3)}{\gamma^3 b^3 \left( 2k \ln \frac{\gamma}{a} + p - q \right)} + \left( \frac{1}{3} k - 4\mu - 2k \ln \frac{\gamma}{a} + q \right) \frac{1}{\gamma^3}, \\
a_2 &= - \left( \frac{1}{b^3} + \frac{1}{4} \frac{\gamma^3}{b^3 (\gamma^3 - b^3)} \right) p - \frac{1}{4} \frac{\gamma^3}{b^3 (\gamma^3 - b^3)} \left( 2k \ln \frac{\gamma}{a} - q \right), \\
a_3 &= \frac{4k\mu (\gamma^3 - b^3) \ln a}{\left( 2k \ln \frac{\gamma}{a} + p - q \right) \gamma^3 b^3} - \left( \frac{k}{3} - q \right) \frac{1}{a^3}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

При выводе (2.23) силы инерции были опущены, что соответствует квазистатической постановке. Таким образом, вопрос определения критической комбинации нагрузок, соответствующих осесимметричной форме потери устойчивости оболочки с включением, сводится к разрешимости уравнения

$$F(p, q, a, b, \gamma, \mu, k, S) = 0. \tag{2.25}$$

Анализ такого уравнения затруднен ввиду того, что  $S = i\omega$  — в общем случае произвольное комплексное число. Поэтому для упрощения вычислений при численном анализе будем считать, что  $S$  — действительное число. В этом случае критерием устойчивости будет условие  $S < 0$ . Очевидно, в (2.25) оценка влияния каждого отдельного физико-механического и геометрического параметров оболочки и включения, изменяющихся в допустимых пределах, на критическую комбинацию нагрузок определяется, соотносясь с практической необходимостью. Поэтому здесь ограничимся лишь случаем, когда “определяющая” роль в явлении неустойчивости принадлежит внешней нагрузке при фиксированной внутренней нагрузке, геометрических и физико-механических параметров оболочки и включения. Подставляя (2.24) в уравнение (2.23) приходим к уравнению относительно внешней нагрузки  $p$

$$\bar{S} p^2 - \left( \bar{P} - \bar{S} \left( 2k \ln \frac{\gamma}{a} - q \right) \right) p - \bar{R} - \bar{P} \left( 2k \ln \frac{\gamma}{a} - q \right) = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \left[ \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{b^3} - \frac{1}{4(\gamma^3 - b^3)} \left( 4 - \frac{5b^3}{\gamma^3} + \frac{\gamma^3}{b^3} \right) \right], \\
\bar{P} &= \frac{2k \ln \frac{\gamma}{a} - q}{\gamma^3 - b^3} \left( 1 - \frac{5}{4} \frac{b^3}{\gamma^3} + \frac{1}{4} \frac{\gamma^3}{b^3} \right) + \left( \frac{1}{3} k - 4\mu - 2k \ln \frac{\gamma}{a} + q \right) \frac{1}{\gamma^3} - \left( \frac{1}{3} k - q \right) \frac{1}{a^3}, \\
\bar{R} &= \frac{4k\mu (\gamma^3 - b^3)}{\gamma^3 b^3} \ln \frac{a}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1 – рис. 6. На рис. 1 – рис. 3 показана зависимость критического внешнего давления  $\bar{p}$  от внешнего радиуса  $\bar{b}$  оболочки. При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими:  $k = 1, \gamma = 2, \mu = 0.1, q = 0.2; 0.7; 1.2$  – рис. 1;  $k = 1, \gamma = 2, q = 0.1, \mu = 0.2; 0.7; 1.2$  – рис. 2;  $k = 1, q = 0.1, \mu = 0.3, \gamma = 2; 2.5; 2.8$  – рис. 3.

На рис. 4 – рис. 6 показана зависимость критического внешнего давления  $\bar{p}$  от внутреннего радиуса  $\bar{a}$  включения. При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими:  $k = 1, \gamma = 0.5, q = 0.1, \mu = 0.1; 0.2; 0.5$  – рис. 4;  $k = 1, \gamma = 0.5, \mu = 0.3, q = 0.3; 0.5; 0.75$  – рис. 5;  $k = 1, \gamma = 0.5, q = 0.0001, \mu = 2.0$  – рис. 6.

Здесь, рис. 1 – рис. 6, величины, имеющие размерность давления, отнесены к пределу текучести  $k$ , имеющие размерность длины на рис. 1 – рис. 3 отнесены к внутреннему радиусу

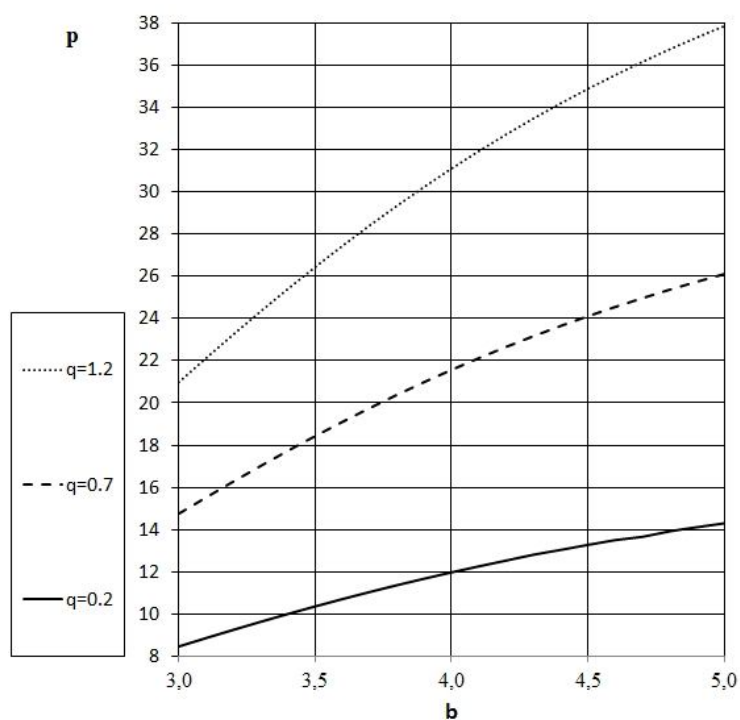


Рис. 1. Зависимость критического давления от внешнего радиуса  $b$

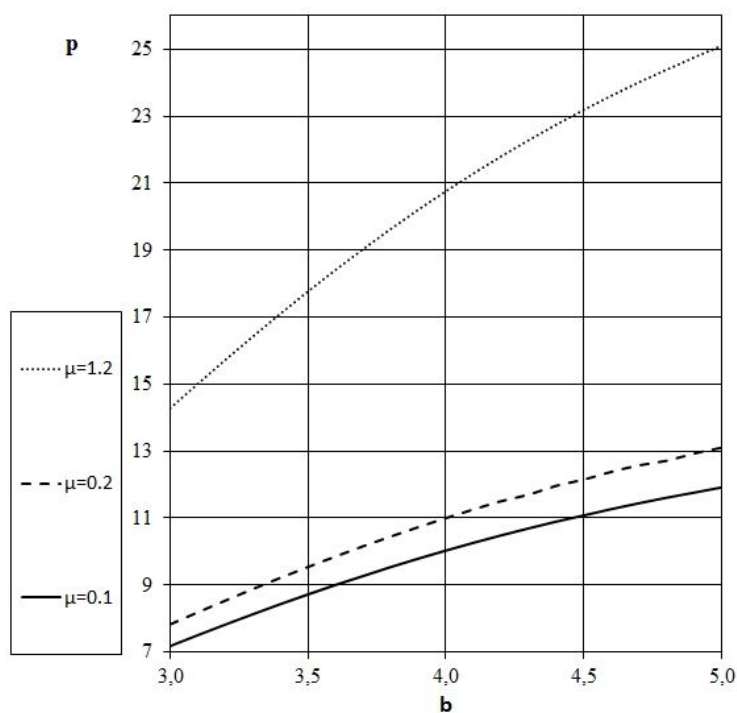
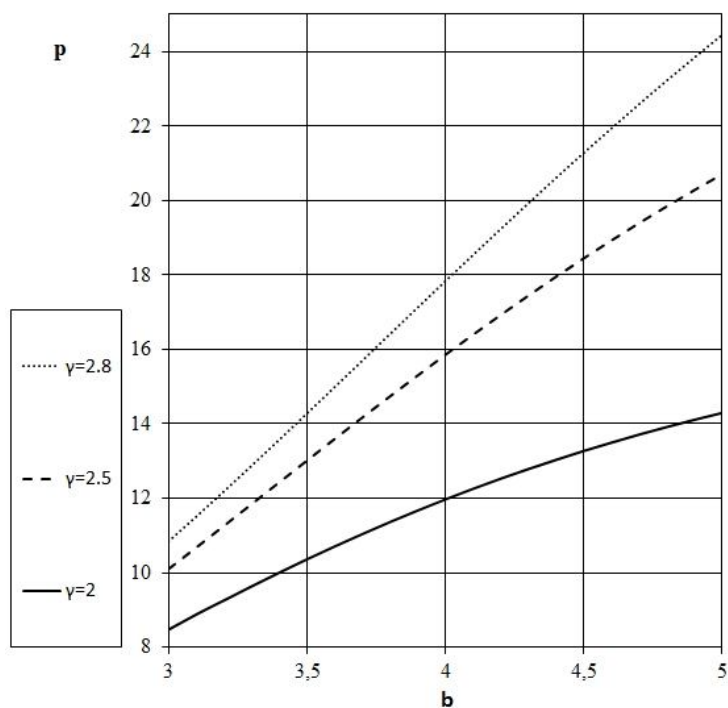
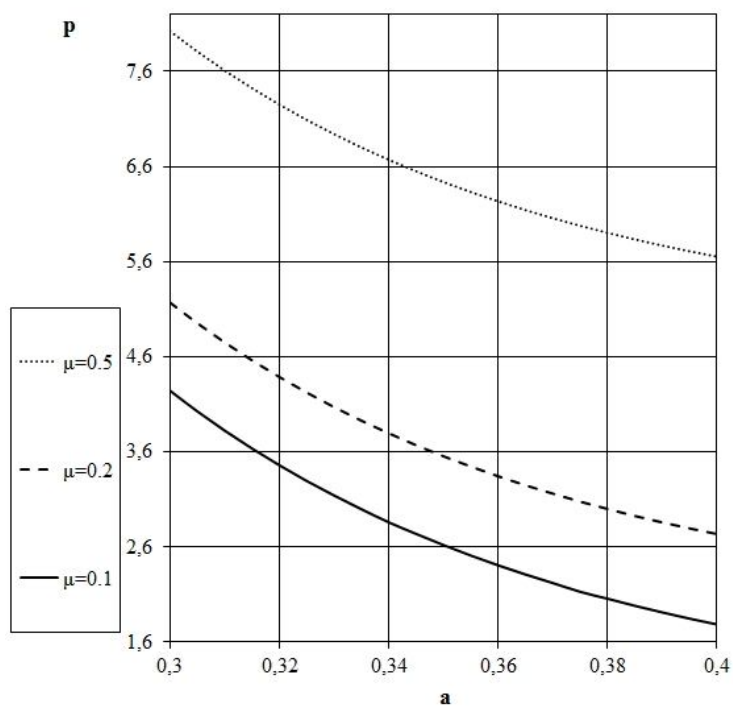


Рис. 2. Зависимость критического давления от внешнего радиуса  $b$

Рис. 3. Зависимость критического давления от внешнего радиуса  $b$ Рис. 4. Зависимость критического давления от внутреннего радиуса  $a$



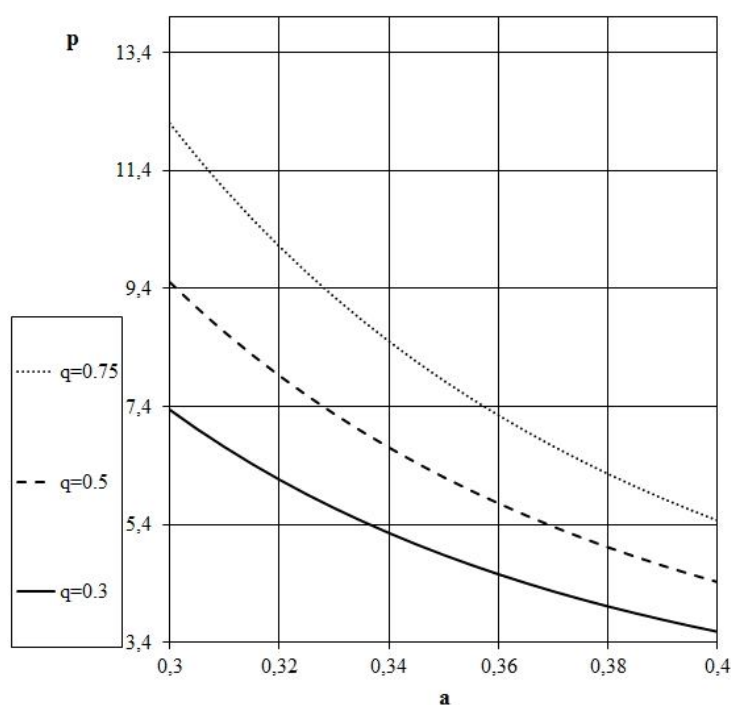


Рис. 5. Зависимость критического давления от внутреннего радиуса  $a$

а включения, а на рис. 4 – рис. 6 – к внешнему радиусу  $b$  оболочки, при этом сохранены прежние обозначения.

Из анализа результатов вычислительного эксперимента следует:

существенное влияние на потерю устойчивости оказывают как физико-механические, так и геометрические параметры составной оболочки (рис. 1 – рис. 6);

– при уменьшении внутреннего радиуса включения (увеличении ширины слоя – заполнителя) величина критической нагрузки возрастает, при увеличении – сжимается (рис. 4 – рис. 6).

– при увеличении упругой постоянной оболочки критическая нагрузка возрастает (рис. 2, рис. 4).

– при увеличении толщины упругой оболочки величина критической нагрузки увеличивается (рис. 1 – рис. 3).

при возрастании внутреннего давления критическое давление также возрастает (рис. 1, рис. 5).

– при стремлении внутреннего радиуса включения и внутреннего давления к нулю, а также при стремлении предела текучести к нулю, а упругой постоянной к бесконечности, что соответствует разномодульному упругому шару, находящемуся под действием гидростатического давления, критическая нагрузка неограниченно возрастает, то есть потери устойчивости не происходит.

Сделанные выводы согласуются с общими теоретическими представлениями и выводами работы [9].

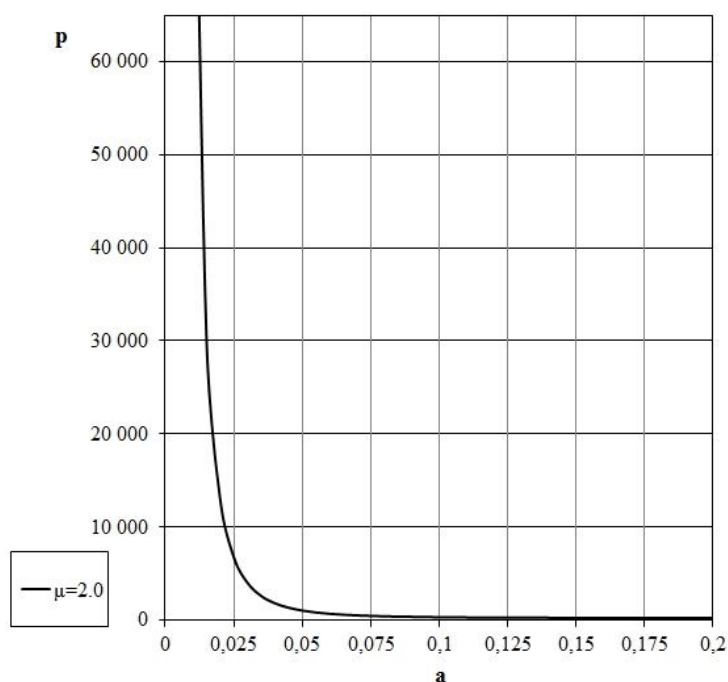


Рис. 6. Зависимость критического давления от внутреннего радиуса  $a$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андреева Ю. И. Устойчивость слоистой сферической оболочки с упруговязкопластичким наполнителем при нагружении / И. Ю. Андреева, Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Современные проблемы механики и прикладной математики. – Воронеж, 2004. – Ч. 1. – Т. 1. – С. 12–18.
- [2] Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь. – Киев : Вища школа, 1986. – 321с.
- [3] Зенин А. Н. К устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластичским наполнителем при нагружении / А. Н. Зенин, А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2008. – №1(4). – С. 88–95.
- [4] Ильюшин А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во А. Н. СССР, 1963. – 271с.
- [5] Спорыхин А. Н. Исследование устойчивости двухслойной кусочно-неоднородной сферической оболочки при нагружении / А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – №3(17). – С. 46–51.
- [6] Спорыхин А. Н. Исследование устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным вязкоупругим наполнителем при нагружении на конечном интервале времени / А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова // Сб. трудов . Международная конференция. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж. – 2011.
- [7] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. – 359с.
- [8] Спорыхин А. Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шапкин. – М. : Физматлит, 2004. – 231с.

[8] Спорыхин А. Н. Численно-аналитическое исследование устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим заполнителем при нагружении / А. Н. Спорыхин, Е. Д. Чуфринова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – №1(9). – С. 193–200.

*Спорыхин Анатолий Николаевич,*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский Государственный Университет, г. Воронеж*

*e-mail: shashkin@amm.vsu.ru*

*Дмитрик Кирилл Григорьевич,*

*аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский Государственный Университет, г. Воронеж*

*e-mail: kiriksoft@mail.ru*

*A. N. Sporykhin, K. G. Dmitrik*

**NUMERICAL-ANALITICAL SOLUTION OF STABILITY OF SPHERICAL ELASTIC SHELL WITH ELASTO-PLASTIC FILLER UNDER EXTERNAL PRESSURE**

*Voronezh State University*

**Abstract.** Stability of double layer spherical shell is under consideration. An internal layer of shell is elastic, an external one is elastoplastic. First, the subcritical stress-strain state has been determined. Second, stability of ground state of composite spherical shell has been examined. This involves balance equations for internal and for external layer of shell, that written in perturbations, using identified boundary conditions. Next, problem of critical pressure determination can be reduced to the eigenvalue problem with respect to the time factor. As a result, relations between critical external pressure and internal and external radius of the shell have been received.

**Keywords:** stability, shell, stress, strain, plasticity, elasticity.

**REFERENCES**

- [1] Andreeva Ju. I. Stability of layered spherical shell with elastoviscoplastic filler under pressure / I. Ju. Andreeva, D. V. Gocev, A. N. Sporykhin // Modern problems of mechanics and applied mathematics. – Voronezh, 2004. – Ch. 1. – Vol. 1. – P. 12–18. (in Russian)
- [2] Guz' A. N. Foundations of three dimensional stability theory of deformable solids / A. N. Guz'. – Kiev : Vishha shkola, 1986. – 321 p. (in Russian)
- [3] Zenin A. N. About the stability of spherical shell with inhomogeneous elastoviscoplastic filler under pressure / A. N. Zenin, A. N. Sporykhin // Vestnik I. Jakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2008. – № 1 (4). – P. 88–95. (in Russian)
- [4] Il'jushin A. A. Plasticity / A. A. Il'jushin. – M. : A. N. USSR, 1963. – 271 p. (in Russian)
- [5] Sporykhin A. N. Research of stability of double-layer sectionally inhomogeneous spherical shell under pressure / A. N. Sporykhin // Vestnik I. Jakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 3 (17). – P. 46–51. (in Russian)
- [6] Sporykhin A. N. The research of stability of elastic spherical shell with inhomogeneous viscoelastic filler under pressure during finite time interval / A. N. Sporykhin, Ju. D. Shheglva // Coll. Of scientific papers. International conference. Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics. – Voronezh. – 2011. (in Russian)
- [7] Sporykhin A. N. Perturbation method in problems of stability of continuum / A. N. Sporykhin. – Voronezh : Voronezh State University, 1997. – 359 p. (in Russian)
- [8] Sporykhin A. N. Stability of equilibrium of spatial solids and rock mechanics problems / A. N. Sporykhin, A. I. Shashkin. – M. : Fizmatlit, 2004. – 231 p. (in Russian)
- [9] Sporykhin A. N. Numerical-analitical research of stability of elastic spherical shell with inhomogeneous elastoviscoplastic filler under pressure / A. N. Sporykhin, E. D. Chufriņova // Vestnik I. Jakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – №1(9). – P. 193–200. (in Russian)

*Sporykhin Anatoliy Nicolaevich,*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, mechanics and computational modeling Department, Voronezh State University, Voronezh*

*Dmitrik Kirill Grigorievich,*

*Postgraduate student, mechanics and computational modeling Department, Voronezh State University, Voronezh*