Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 109–118

Т. Ю. Леонтьева

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. В настоящее время дифференциальные уравнения имеют широкое применение в различных сферах деятельности человека [1]–[5]. Теория линейных дифференциальных уравнений достаточно развита [6]–[8], что нельзя сказать о теории нелинейных дифференциальных уравнений. Их развитию препятствует наличие подвижных особых точек. В работах [9]–[12] предложен метод приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения с подвижными особыми точками, включающий решение шести задач. Первые две задачи: формулировка и доказательство теоремы существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения; построение приближенного решения и исследование влияния возмущения начальных условий на приближенное решение представлены в работах [13]–[14].

В данной работе дается исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области. Что является продолжением исследования работы [15]. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Ключевые слова: подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, приближенное решение, окрестность подвижной особой точки, комплексная область, апостериорная оценка.

УДК: 517.928.4

Материалы и методы решения задачи и принятые допущения. Большой вклад в развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений внесла Белорусская школа [16]–[22]. Простейшие нелинейные дифференциальные уравнения – уравнения Риккатти появились в публикации в конце 17 в.; в начале 18 в. миру стало известно нелинейное дифференциальное уравнение Абеля; с середины 18 в. появились нелинейные дифференциальные уравнения Пенлеве. Особенностью перечисленных уравнений является наличие подвижных особых точек, классифицированных Фуксом [23]. Теоретическое обоснование метода приближенного решения перечисленных дифференциальных уравнений даны в работах [9]–[12]. Предложенный в перечисленных работах приближенный метод успешно применяется и для других нелинейных дифференциальных уравнений [24]–[25].

Результаты. Для задачи Коши

$$y''(z) = y^5(z) + r(z), \tag{1}$$

Поступила 10.05.2015

$$y(z_0) = y_0, y'(z_0) = y_1. \tag{2}$$

в случае точного значения подвижной особой точки [15] было получено приближенное решение в окрестности подвижной особой точки z^* в виде

$$y(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0. \tag{3}$$

В работе [15] была получена структура приближенного решения, но так как возникает необходимость осуществлять аналитическое продолжение требующее изучение влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. Так как существующие методы нахождения подвижной особой точки позволяют находить последнее лишь приближенно, то возмущение подвижной особой точки отражается на аналитическом приближенном решении (3), в результате чего имеем:

$$\tilde{y}_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0, \tag{4}$$

где $\tilde{C}_n$ — возмущенные значения коэффициентов.

Теорема 3. Пустьz^* *подвижная особая точка* $y(z)$ *задачи (1)–(2) и выполняются следующие условия:*

$$r(z) \in C^1 \text{в области} \quad \text{K} = \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_3\}, \quad \rho_3 = const > 0;$$

$$\exists M_2 : \frac{\left|r^{(n)}(\tilde{z}^*)\right|}{n!} \leq M_2, \quad M_2 = const, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

$$|\tilde{z}^*| \leq |z^*|;$$

известны оценки погрешности $\tilde{z}^*$и$\tilde{\alpha}$:

$$|\tilde{z}^* - z^*| \leq \Delta\tilde{z}^*, \quad |\tilde{\alpha} - \alpha| \leq \Delta\tilde{\alpha};$$

$$\Delta\tilde{z}^* < 1\Big/\left(4 \cdot \sqrt[5]{(M+1)^2}\right).$$

Тогда для аналитического приближенного решения (4) задачи (1)–(2) в областях

$$\{z : |z| \leq |\tilde{z}^*| - \Delta\tilde{z}^*\} \cap \{\text{z}: |\tilde{z}^* - z| < \rho_3\}, \tag{5}$$

$$\{z : |\tilde{z}^*| - \Delta\tilde{z}^* < |z| \leq |\tilde{z}^*|\} \cap \{\text{z}: |\tilde{z}^* - z| < \rho_3\} \tag{6}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta\tilde{y}_N(z) \leq \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\tilde{z}^*}{|\tilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$\Delta_1 = \frac{2^N M (M+1)^{\left[\frac{N}{5}\right]} |\tilde{z}^* - z|^{\frac{N-1}{2}}}{1 - 2^5 (M+1) |\tilde{z}^* - z|^{5/2}} \sum_{i=0}^{8} \frac{2^i \eta (M+1)^{\left[\frac{i}{5}\right]} \cdot |\tilde{z}^* - z|^{\frac{i}{2}}}{(N+i+2)(N+i-6)},$$

$$\Delta_2 = \frac{2^5 M (M+1) \beta^{5/2}}{1 - 2^{10} (M+1)^2 \beta^5} \left(2 \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} (M+1)^{\gamma_1} \beta^i + \beta^{1/2} \sum_{i=0}^{4} 2^{2i} (M+1)^{\gamma_2} \beta^i \right),$$

$$\Delta_3 = \frac{2^7 \Delta\tilde{M} \mu \beta^2}{1 - 2^{15} \mu^2 \beta^5} \left(\sum_{i=0}^{4} 2^{3i} \mu^{\gamma_1} \beta^i + 2 (2\beta)^{1/2} \sum_{i=0}^{4} 2^{3i} \mu^{\gamma_2} \beta^i \right),$$

$$\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}, \quad \rho_1 = \frac{1}{4\sqrt[5]{(M+1)^2}} \text{ (из [15])}, \ \rho_2 = \frac{1}{8 (M + \Delta M + 1)^2},$$

$$\beta = \begin{cases} |\tilde{z}^* - z|, z \in (5) \\ \Delta\tilde{z}^*, z \in (6) \end{cases}, \mu = \tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1,$$

$$\eta = \begin{cases} i+1, i = 0,1,2,3,4, \\ 8 - i + 1, i = 5,6,7,8 \end{cases}, \gamma_1 = \begin{cases} 0, i = 0,1,2 \\ 1, i = 3,4 \end{cases},$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} 0, i = 0,1 \\ 1, i = 2,3,4 \end{cases}, M = \max\left\{ |\alpha|, \sup_n \frac{\left|r^{(n)}(z^*)\right|}{n!} \right\},$$

$$\Delta\tilde{M} = \sup_{n,G} \frac{\left|r^{(n+1)}(\tilde{z}^*)\right|}{n!} \Delta\tilde{z}^*, G = \{z : |\tilde{z}^* - z| \le \Delta\tilde{z}^*\}, n = 0,1,2,...,$$

где α — *параметр, зависящий от условий (3),* $n = 0,1,2,\dots$.

Доказательство. На основе правила треугольника в схеме оценок имеем:

$$\Delta\tilde{y}_N(z) = |y(z) - \tilde{y}_N(z)| \le |y(z) - \tilde{y}(z)| + |\tilde{y}(z) - \tilde{y}_N(z)|.$$

Рассмотрим $|y(z) - \tilde{y}(z)|$:

$$|y(z) - \tilde{y}(z)| \le \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z^* - z)^{(n-1)/2} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z^* - z)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n (z^* - z)^{(n-1)/2} \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n \left((z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n \left| (|\tilde{z}^* - z| + \Delta\tilde{z}^*)^{(n-1)/2} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\tilde{C}_n\right| \cdot \left| (z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right|.$$

Далее $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\tilde{C}_n\right| \cdot \left| (z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right|$.

Учитывая $|z| < |\tilde{z}^*| \le |z^*|$ и $|C_0| = \left|\tilde{C}_0\right| = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ при $n = 0$

$$\left|\tilde{C}_0\right| \cdot \left| (z^* - z)^{-1/2} - (\tilde{z}^* - z)^{-1/2} \right| \le \frac{\Delta\tilde{z}^*}{|\tilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Так как $|C_1| = \left|\tilde{C}_1\right| = 0$, $|C_2| = \left|\tilde{C}_2\right| = 0$, $|C_3| = \left|\tilde{C}_3\right| = 0$, $|C_4| = \left|\tilde{C}_4\right| = 0$ (из [15]), то следует:

$$|y(z) - \tilde{y}(z)| \le \frac{\Delta\tilde{z}^*}{|\tilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} + \sum_{n=5}^{\infty} \left|\tilde{C}_n\right| \cdot \left| (z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right| +$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n\left|\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(n-1)/2}\right| \text{при} \quad n=5,6,7,....$$

Упростим в случае $n=5,6,7,...$

$$\left|(z^*-z)^{(n-1)/2}-(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}\right|\le\left|\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(n-1)/2}-(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}\right|\le$$

$$\le\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(n-2)/2}\right|.$$

Тогда, для оценки приближенного решения (4) получаем:

$$|y(z)-\tilde{y}_N(z)|\le\frac{\Delta\tilde{z}^*}{|\tilde{z}^*-z|}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\tilde{C}_n\right|\cdot|\tilde{z}^*-z|^{(n-1)/2}+\sum_{n=5}^{\infty}\left|\tilde{C}_n\right|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(n-2)/2}\right|+$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_n\right|\cdot\left|\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(n-1)/2}\right|=\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,$$

где $\left|\tilde{C}_n-C_n\right|=\Delta\tilde{C}_n$.

Из последнего следует

$$\Delta_0=\frac{\Delta\tilde{z}^*}{|\tilde{z}^*-z|}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Δ_1 было получено по теореме 2 в работе [15].

Проведем оценку Δ_2. Осуществим суммирование отдельно по целым и дробным степеням, учитывая, что $\Delta\tilde{z}^*\le|\tilde{z}^*-z|$:

$$\Delta_2=\sum_{n=5}^{\infty}\left|\tilde{C}_n\right|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(n-2)/2}\right|=\sum_{n=3}^{\infty}\left|\tilde{C}_{2n-1}\right|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(2n-3)/2}\right|+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\left|\tilde{C}_{2n}\right|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{n-1}\right|=\Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}.$$

Учитывая закономерность получения оценок коэффициентов C_n, оценим $\Delta_{2,1}$:

$$\Delta_{2,1}=\sum_{n=3}^{\infty}\left|\tilde{C}_{2n-1}\right|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(2n-3)/2}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-5}|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(10k-7)/2}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-3}|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(10k-5)/2}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-1}|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(10k-3)/2}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k+1}|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(10k-1)/2}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k+3}|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(10k+1)/2}\right|=$$

$$=\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{C}_{10k-5+2t}\right|\cdot\left|\Delta\tilde{z}^*\left(|\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right)^{(10k-7+2t)/2}\right|\le$$

$$\le\frac{2^5\Delta\tilde{z}^*M(M+1)|\tilde{z}^*-z|^{3/2}}{1-2^{10}\cdot(M+1)^2\cdot|\tilde{z}^*-z|^5}\cdot\sum_{t=0}^{4}2^{2t}(M+1)^t|\tilde{z}^*-z|^t$$

при условии $|\tilde{z}^* - z| < 1 \Big/ \left(4 \cdot \sqrt[5]{(M+1)^2}\right)$ (из работы [15]). Рассмотрев случай $|\tilde{z}^* - z| < \Delta\tilde{z}^*$, имеем:

$$\Delta_{2,1} \le \frac{2^5 M (M+1) \Delta\tilde{z}^* 5/2}{1 - 2^{10} \cdot (M+1)^2 \cdot \Delta\tilde{z}^* 5} \cdot \sum_{t=0}^{4} 2^{2t} (M+1)^t \Delta\tilde{z}^* t.$$

А для $\Delta_{2,2}$ соответственно получим оценку

$$\Delta_{2,2} \le \frac{2^5 M (M+1) \Delta\tilde{z}^* 3}{1 - 2^{10} \cdot (M+1)^2 \cdot \Delta\tilde{z}^* 5} \cdot \sum_{t=1}^{4} 2^{2t} (M+1)^t \Delta\tilde{z}^* t.$$

Перейдем к оценке Δ_3. Из предположения оценок для $\Delta\tilde{C}_n$

$$\Delta\tilde{C}_{5n} \le \frac{2^{5n} \Delta\tilde{M} \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^n}{(5n+2)(5n-6)}, \quad \Delta\tilde{C}_{5n+1} \le \frac{2^{5n+1} \Delta\tilde{M} \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^n}{(5n+3)(5n-5)},$$

$$\Delta\tilde{C}_{5n+2} \le \frac{2^{5n+2} \Delta\tilde{M} \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^n}{(5n+4)(5n-4)}, \quad \Delta\tilde{C}_{5n+3} \le \frac{2^{5n+3} \Delta\tilde{M} \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^n}{(5n+5)(5n-3)},$$

$$\Delta\tilde{C}_{5n+4} \le \frac{2^{5n+4} \Delta\tilde{M} \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^n}{(5n+6)(5n-2)},$$

где $M = \sup\limits_{n} \dfrac{\left|r^{(n)}(\tilde{z}^*)\right|}{n!}$, $\Delta\tilde{M} = \sup\limits_{n,G} \dfrac{\left|r^{(n+1)}(\tilde{z}^*)\right|}{n!} \Delta\tilde{z}^*$, $G = \{z : |\tilde{z}^* - z| \le \Delta\tilde{z}^*\}, n = 0, 1, 2, ...,$ докажем нашу гипотезу для $\Delta\tilde{C}_{5n}$ в случае $N + 1 = 5(2n+1)$

$$\Delta\tilde{C}_{10n+5} = \left|\tilde{C}_{10n+5} - C_{10n+5}\right| \le \left| \frac{2^{10n+5} \tilde{M} \left(\tilde{M}+1\right)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)} - \frac{2^{10n+5} M (M+1)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)} \right| =$$

$$= \frac{2^{10n+5}}{(10n+7)(10n-1)} \left| \tilde{M} \left(\tilde{M}+1\right)^{2n+1} - \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M}\right) \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^{2n+1} \right| =$$

$$= \frac{2^{10n+5} \Delta\tilde{M} \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)} \cdot \left| \frac{\tilde{M}}{\Delta\tilde{M}} \left(\frac{\tilde{M}+1}{\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1} \right)^{2n+1} - \left(\frac{\tilde{M}}{\Delta\tilde{M}} + 1 \right) \right| \le$$

$$\le \frac{2^{10n+5} \Delta\tilde{M} \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)}.$$

Подобные выражения получим и в случаях $N+1 = 5n+1$, $N+1 = 5n+2$, $N+1 = 5n+3$ и $N+1 = 5n+4$. В результате справедлива оценка

$$\Delta\tilde{C}_{n+1} \le \frac{2^{n+1} \Delta\tilde{M} \left(\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1\right)^{[(n+1)/5]}}{(n+3)(n-5)}.$$

В выражении Δ_3 проведем суммирование отдельно по целым и дробным степеням:

$$\Delta_3 = \sum_{n=5}^{\infty} \left|\Delta\tilde{C}_n\right| \cdot \left| (|\tilde{z}^* - z| + \Delta\tilde{z}^*)^{(n-1)/2} \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \Delta\tilde{C}_{2n-1} \left||\tilde{z}^* - z| + \Delta\tilde{z}^*\right|^{n-1} +$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{2n}\left||\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(2n-1)/2}=\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{10k-5+2t}\left||\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right|^{5k-3+t}+$$

$$+\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{10k-4+2t}\left||\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(10k-5+2t)/2}\leq$$

$$\leq\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-5+2t}\Delta\tilde{M}\left(\tilde{M}+\Delta\tilde{M}+1\right)^{[(10k-5+2t)/5]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)}\left||\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right|^{5k-3+t}+$$

$$+\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-4+2t}\Delta\tilde{M}\left(\tilde{M}+\Delta\tilde{M}+1\right)^{[(10k-4+2t)/5]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)}\left||\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(10k-5+2t)/2}=$$

$$=\sum_{t=0}^{4}2^{2t-5}\Delta\tilde{M}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k}\left(\tilde{M}+\Delta\tilde{M}+1\right)^{[(10k-5+2t)/5]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)}\left||\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right|^{5k-3+t}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k+1}\left(\tilde{M}+\Delta\tilde{M}+1\right)^{[(10k-4+2t)/5]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)}\left||\tilde{z}^*-z|+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(10k-5+2t)/2}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^7\Delta\tilde{M}\mu\beta^2}{1-2^{15}\mu^2\beta^5}\left(\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_1}\beta^i+2\,(2\beta)^{1/2}\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_2}\beta^i\right),$$

где $\beta=\begin{cases}|\tilde{z}^*-z|\,,z\in(5)\\ \Delta\tilde{z}^*,z\in(6)\end{cases}$, $\mu=\tilde{M}+\Delta\tilde{M}+1$, $\gamma_1=\begin{cases}0,i=0,1,2\\ 1,i=3,4\end{cases}$, $\gamma_2=\begin{cases}0,i=0,1\\ 1,i=2,3,4\end{cases}$.

Таким образом, для оценки погрешности приближенного решения (4) получаем области:

$$\{z:|z|\leq|\tilde{z}^*|-\Delta\tilde{z}^*\}\cap\{\text{z}:|\tilde{z}^*-z|\,<\rho_3\},$$

$$\{z:|\tilde{z}^*|-\Delta\tilde{z}^*<|z|\leq|\tilde{z}^*|\}\cap\{\text{z}:|\tilde{z}^*-z|\,<\rho_3\},$$

где $|\tilde{z}^*-z^*|\leq\Delta\tilde{z}^*$ и $\rho_3=\min\left\{\dfrac{1}{4\sqrt[5]{(M+1)^2}},\dfrac{1}{8\,(M+\Delta M+1)^2}\right\}$.

Пример. Найдем приближенное решение задачи (1)-(4) в случае $r(z)=0$при начальных данных $y\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1+i$, $y'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i$ и $\alpha=0,001$. Величина возмущения не превышает $\varepsilon=0,7\cdot10^{-3}$. Данная задача имеет точное решение $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{1+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i-2z}}$.

Найдем радиус окрестности подвижной особой точки $\rho_3\approx0,021443$. Точное значение подвижной особой точки $z^*=\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}i$. В случае $\tilde{z}^*=0,5+0,93301i$, $\Delta\tilde{z}^*=0,000003$. Выберем значение аргумента $z=0,5+0,915i\in|z^*-z|<\rho_2$. Применяя (4), $N=12$, вычислим приближенное значение решения. Расчеты представлены в таблице 1:

Таблица 1

z	y	$\tilde{y}_{12}$	Δy	$\Delta\tilde{y}_{12}$	$\Delta_1 y$
$0{,}5+0{,}915i$	4,9029886-4,9029886i	4,9033564-4,9033564i	0,0005	0,004	0,0007

где $\tilde{y}_{12}$ – приближенное решение (4); y – значение точного решения; $\Delta\tilde{y}_{12}$ – оценка погрешности приближенного решения, полученная по теореме 3; Δy абсолютная погрешность приближенного решения $\tilde{y}_{12}$; $\Delta_1 y$ – апостериорная оценка погрешности, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности для $\varepsilon = 0,7\cdot 10^{-3}$. В этом случае для $N = 16$ априорная оценка будет удовлетворять требуемой точности $\varepsilon = 0,7\cdot 10^{-3}$, но с учетом того, что для номеров $n = 13, 14, 15, 16$ коэффициенты $C_n = 0$, в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 12$, при котором приближенное решение будет иметь погрешность $\varepsilon = 0,7\cdot 10^{-3}$.

Выводы. В статье сформулирована и доказана теорема, отражающая влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в комплексной области. Для оптимизации структуры приближенного решения была использована апостериорная погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hill, J. M.* Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings / J. M. Hill // Internat. J. Solids Structures. – 1977. № 13. – P. 93104.

[2] *Ockendon, J. R.* Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. – New York, 1978. – P. 129145.

[3] *Axford, R. A.* Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion / R. A. Axford // Los Alamos Report. 1970. (LA-4517, UC-34).

[4] *Kalman, R.* New results in linear filtering and predication theory / K. Kalman, R. Busy // J. Basic Engr. (ASME Trans.). – 1961. – V. 83D. – P. 95108.

[5] *Shi, M.* On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem / M. Shi // Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math. – 2005. – 34, N 1. – P. 1724.

[6] *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М.: Наука,1970. – 632 с.

[7] *Березин, И. С.* Методы вычислений: в 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1960.

[8] *Фильчаков, П. Ф.* Численные и графические методы прикладной математики / П. Ф. Фильчаков. – Киев: Наукова думка. – 1970. – 800 с.

[9] *Орлов, В. Н.* О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В.Н. Орлов // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. — 2008. — № 2. — С. 42–46.

[10] *Орлов, В. Н.* Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В.Н. Орлов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. — 2009. — № 4 (35). — С. 102–108.

[11] *Орлов, В. Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов // Вестник МАИ. Москва, 2008. Т. 15, № 5. С. 128 135.

[12] *Орлов, В. Н.* Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов // Вестник Самарского ГУ. Естеств. научная серия. — 2006. — № 6/1 (46). — С. 64–69.

[13] *Орлов, В. Н.* Влияние возмущения начальных данных на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области аналитичности /

В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 3 (17). – С.103 – 109.

[14] *Орлов, В. Н.* Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области голоморфности / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – № 4 (80). – С.156 – 162.

[15] *Орлов, В. Н.* Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 157–166.

[16] *Чичурин, А. В.* Об интегрируемости систем третьего порядка, эквивалентных уравнению Шази с шестью неподвижными полюсами / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 176–187.

[17] *Лукашевич, Н. А.* Простейшие дифференциальные уравнения третьего порядка P-типа / Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1995. – 31, № 6. – С. 955 – 961.

[18] *Еругин, Н. П.* Аналитическая теория и проблемы вещественной теории дифференциальных уравнений, связанные с первым методом и методами аналитической теории / Н. П. Еругин // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 11. – С. 1821 – 1864.

[19] *Мататов, В. И.* О подвижных особенностях автономных систем Гамильтона / В. И. Мататов, Л. В. Сабынич // Ред. ж. Вестник Белоруск. ун-та. Сер. 1. – Минск,1991. – 8 с. – Деп. в ВИНИТИ 09.04.91, № 1532-В91.

[20] *Самодуров, А. А.* Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде / А. А. Самодуров // Вестник БГУ. Сер. 1. Физ. мат. и мех. 1983. №2. – С. 57 – 59.

[21] *Кондратеня, С. Г.* К вопросу о существовании полярных решений у дифференциальных уравнений первого порядка / С. Г. Кондратеня, Е. Г. Пролиско, Т. И. Шило // Дифференциальные уравнения. – 1988. – 24, №10. – С. 1824 – 1826.

[22] *Яблонский, А. И.* Асимптотическое разложение правильных решений некоторых классов дифференциальных уравнений / А. И. Яблонский // Доклад АН БССР. 1964. Т. 8, № 2. С. 7780.

[23] *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2 изд. М.- Л: Гос. изд.-во технико-теоретической литературы. – 1950. – 436 с.

[24] *Орлов, В. Н.* Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22).

[25] *Пчелова, А. З.* Границы области применения приближенного решения в окрестности возмущенной подвижной особой точки одного дифференциального уравнения в комплексной области / А. З. Пчелова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4.

Леонтьева Татьяна Юрьевна,

аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: betty2784@mail.ru

T. Y. Leonteva

INFLUENCE OF PERTURBATION OF MOVING SINGULAR POINT ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN THE COMPLEX REGION

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. Currently, the differential equations are widely used in various fields of human activity [1] - [5]. The theory of linear differential equations is well developed [6] - [8], which is not true of the theory of nonlinear differential equations. Their development is hampered by moving singular points. In [9] - [12] proposed a method for the approximate solution of nonlinear differential equations with movable singularities, including the decision of six tasks. The first two problems: the formulation and proof of the existence and uniqueness of solutions of the nonlinear differential equation; construction of an approximate solution and investigation of the influence of the perturbation of the initial conditions for the approximate solution are presented in [13] - [14].

This paper presents a study of influence of the disturbance moving singular point on the approximate solution of nonlinear differential equations in the complex region. What is the continuation of the investigation [15]. The results are accompanied by estimates.

Keywords: movable singular point, nonlinear differential equation of the second order, approximate solution, neighborhood of the movable singular point, the complex region, posteriori error estimate.

REFERENCES

[1] *Hill, J. M.* Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings / J. M. Hill // Internat. J. Solids Structures. – 1977. № 13. – P. 93104.

[2] *Ockendon, J. R.* Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. – New York, 1978. – P. 129145.

[3] *Axford, R. A.* Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion / R. A. Axford // Los Alamos Report. – 1970. (LA-4517, UC-34).

[4] *Kalman, R.* New results in linear filtering and predication theory / K. Kalman, R. Busy // J. Basic Engr. (ASME Trans.). – 1961. – V. 83D. – P. 95108.

[5] *Shi, M.* On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem / M. Shi // Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math. – 2005. – 34, N 1. – P. 1724.

[6] *Bahvalov, N. S.* Numerical Methods / N. S. Bakhvalov. – M.: Nauka, 1970. – 632 p.

[7] *Berezin, I. S.* Methods of calculations / I. S. Berezin, N. P. Zhidkov. – M.: Fizmatgiz, 1960.

[8] *Filchakov, P. F.* Numerical and graphical methods of Applied Mathematics / P. F. Filchakov. – Kiev: Naukova Dumka, 1970. – 800 p.

[9] *Orlov, V. N.* On the approximate solution of the first Painlevé equation / V. N. Orlov // Vestnik of Tupolev named KSTU. – 2008. – № 2. – P. 42–46.

[10] *Orlov, V. N.* Investigation of approximate solution of differential equations of Abel in the neighborhood of a singular point of mobile / V. N. Orlov // Vestnik Bauman named MSTU. Series: Natural sciences. – 2009. — № 4 (35). – P. 102–108.

[11] *Orlov, V. N.* On a method of approximate solution of matrix differential Riccati equations / V. N. Orlov // Vestnik MAI. – Moscow, 2008. – V. 15, № 5. – P. 128–135.

[12] *Orlov, V. N.* Criteria for the existence of movable singular points of solutions of differential equations Riccati / V. N. Orlov // Vestnik of the Samara State University. Nature. Science series. — 2006. – № 6/1 (46). – P. 64–69.

[13] *Orlov, V. N.* Influence of perturbation of the initial data on the approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in the analyticity region / V. N. Orlov, T. Y. Leonteva // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. 2013. № 3 (17). P.103 109.

[14] *Orlov, V. N.* Construction of an approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in a region of holomorphy / V. N. Orlov, T. Y. Leonteva // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Natural and Technical Sciences. – 2013. – № 4 (80). – P. 156 – 162.

[15] *Orlov, V. N.* Construction of an approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in a neighborhood of mobile singularity in the complex region / V. N. Orlov, T. Y. Leonteva // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2014. – № 4 (22). – P. 157–166.

[16] *Chichurin, A. V.* On the integrability of systems of the third order, Chazy equation equivalent to six poles fixed / A. V. Chichurin, E. N. Shvychkina // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. 2014. № 4 (22). P. 176–187.

[17] *Lukashevich, N. A.* Simple differential equation of the third order of the P-type / N. A. Lukashevich // Differential Equations. – 1995 – 31, № 6. – P. 955 – 961.

[18] *Erugin, N. P.* Analytic theory and the real problems of the theory of differential equations associated with the first method and the analytic theory / N. P. Erugin // Differential Equations. – 1967. – Volume 3, № 11. – P. 1821 – 1864.

[19] *Matatov, V. I.* About the features of mobile autonomous systems Hamilton / V. I. Matatov, L. V. Sabynich // Ed. Well. Bulletin of the Belarusian. Univ. Ser. 1. – Minsk, 1991. – 8. p. – Dep. VINITI 09.04.91, № 1532-V91.

[20] *Samodurov, A. A.* Integrability of Abel differential equation in parametric form / A. A. Samodurov // Vestnik BSU. Ser. 1. Def. mat. and fur. 1983. №2. – P. 57 – 59.

[21] *Kondratenya, S. G.* On the existence of polar solutions of first order differential equations / S. G. Kondratenya, E. G. Prolisky, T. I. Shilo // Differential Equations. – 1988 – 24, №10. – P. 1824 – 1826.

[22] *Yablonsky, A. I.* Asymptotic expansion of the right solutions of certain classes of differential equations / A. I. Yablonsky // Report of the Academy of Sciences of the BSSR. – 1964. – T. 8, № 2. – P. 77 – 80.

[23] *Golybev, V. V.* Lectures on the analytic theory of differential equations. 2nd ed. M. ; L. : Gos. izd. of technical and theoretical literature. – 1950. – 436 p.

[24] *Orlov, V. N.* Construction of an approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in a neighborhood of mobile singularity in the complex domain / V. N. Orlov, M. P. Guz // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2014. – № 4 (22).

[25] *Pchelova, A. Z.* Boundaries of the application of the approximate solution in the vicinity of the mobile perturbed singular point of the differential equation in the complex domain / A. Z. Pchelova // Herald of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. – 2014. – № 4.

Leonteva, Tatyana Yorevna

Post-graduate Student, Department of Mathematical analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary