Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 134–138

Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

К ВОПРОСУ О РЕБРЕ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ИДЕАЛЬНО СВЯЗНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Тульский государственный университет, г. Тула

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. Показано, что ребро полной пластичности формируется ребром сингулярности девиаторных функций на полуплоскостях кратности промежуточного главного напряжения и критериями предельного состояния при крайних значениях параметра Лоде.

Ключевые слова: ребро полной пластичности, ассоциированный закон пластического течения, ребро сингулярности, критерий предельного состояния.

УДК: 531.01

1. Закон течения, соответствующий сингулярному условию пластического течения рассматривал Рейс [3] (1933). Условие пластичности он представил в виде ребра пластичности

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \tag{1.1}$$

где σ_i – главные напряжения.

Закон пластического течения Рейс представил в виде

$$\varepsilon_1 = \lambda\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1}, \quad \varepsilon_2 = \lambda\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2}, \quad \varepsilon_3 = \lambda\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3}. \tag{1.2}$$

где ε_i — главные скорости деформации, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ – коэффициенты Лагранжа.

Теория ассоциированного закона пластического течения для сингулярных условий текучести получила развитие в работах В. Койтера [1] (1953) и В. Прагера [2] (1953). Соотношения обобщенного закона пластического течения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f_\alpha = f_\alpha(\sigma_{ij}), \tag{1.3}$$

где $\lambda_\alpha = 0$, если $f_\alpha < 0$, а так же если $f_\alpha = 0$, $f_\alpha \equiv \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \leq 0$ и $\lambda_\alpha \geq 0$ если $f_\alpha = 0$, $df_\alpha = 0$.

Для примера уравнение произвольного ребра кусочно-линейного условия текучести в пространстве главных напряжений запишем в виде пересечения двух плоскостей

$$a_1\Sigma_1 + b_1\Sigma_2 + c_1\Sigma_3 = 1, \quad a_2\Sigma_1 + b_2\Sigma_2 + c_2\Sigma_3 = 1, \tag{1.4}$$

причем

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0, \quad a_2 + b_2 + c_2 = 0 \tag{1.5}$$

Поступила 08.04.2015

Согласно (1.2) ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_1 = \lambda a_1 + \mu a_2, \quad \varepsilon_2 = \lambda b_1 + \mu b_2, \quad \varepsilon_3 = \lambda c_1 + \mu c_2. \tag{1.6}$$

Таким образом, через пересечение плоскостей (1.4) проходит пучок плоскостей

$$\lambda(a_1\Sigma_1 + b_1\Sigma_2 + c_1\Sigma_3) + \mu(a_2\Sigma_1 + b_2\Sigma_2 + c_2\Sigma_3) = 0. \tag{1.7}$$

Несложно установить, что угол схождения γ_1 плоскостей пластичности (1.4) и угол расхождения γ_2 пучка плоскостей (1.7) связаны соотношением

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \pi. \tag{1.8}$$

Иначе выглядит картина пластического течения, если ребро пластичности принадлежит полуплоскости кратности промежуточного главного напряжения.

В качестве примера рассмотрим условие пластичности Прагера (1956),

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 + \chi(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \sigma_p, \quad (\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3), \tag{1.9}$$

где Σ_i ранжированные главные напряжения.

Предел текучести при растяжении равен значению σ_p, а при сжатии $\sigma_c = \sigma_p/\chi$. Ребра полной пластичности получим при крайних значения параметра Лоде $\mu_\sigma = \mp 1$.

Рассмотрим полуплоскость кратности промежуточного главного напряжения $\mu_\sigma = -1$. На этой полуплоскости два главных напряжения одинаковы $\Sigma_2 = \Sigma_3$.

Ребро полной пластичности получается как пересечение граней

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 + \chi(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \sigma_p, \quad \Sigma_1 - \Sigma_3 + \chi(\Sigma_3 - \Sigma_2) = \sigma_p. \tag{1.10}$$

При условии кратности ранжированного напряжения $\Sigma_2 = \Sigma_3$ из (1.10) следует

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \sigma_p, \quad \Sigma_1 - \Sigma_3 = \sigma_p. \tag{1.11}$$

То есть сингулярность проявляется в виде ребра равно сторонней шестигранной призмы, причем $\gamma_1 = 2\pi/3$, $\gamma_2 = \pi/3$.

Ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_1 = \lambda + \mu, \quad \varepsilon_2 = -\lambda, \quad \varepsilon_3 = -\mu. \tag{1.12}$$

Рассмотрим полуплоскость кратности промежуточного главного напряжения $\mu_\sigma = 1$. На этой полуплоскости два главных напряжения одинаковы $\Sigma_2 = \Sigma_1$.

Ребро полной пластичности получается как пересечение граней

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 + \chi(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \sigma_p, \quad \Sigma_2 - \Sigma_1 + \chi(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \sigma_p. \tag{1.13}$$

При $\Sigma_2 = \Sigma_1$, получим

$$\Sigma_2 - \Sigma_3 = \sigma_p/\chi = \sigma_c, \quad \Sigma_1 - \Sigma_3 = \sigma_p/\chi = \sigma_c. \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует, что ребро полной пластичности проявляется в виде ребра равносторонней шестигранной призмы, причем $\gamma_1 = 2\pi/3$, $\gamma_2 = \pi/3$.

Закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_1 = \mu, \quad \varepsilon_2 = \lambda, \quad \varepsilon_3 = -\lambda - \mu. \tag{1.15}$$

Таким образом, **любые условия пластичности изотропных идеально связных сред в случае полной пластичности сводятся к ребрам в виде равносторонней шестигранной призмы, равно наклоненной к главным осям трехмерного векторного пространства главных напряжений**.

Параметры ребра равносторонней шестигранной призмы при видах напряженного состояния, соответствующих значениям $\mu_\sigma = -1$ и $\mu_\sigma = 1$ отличаются только значениями максимального касательного напряжения.

При виде напряженного состояния $\mu_\sigma = -1$ правильная шестигранная призма вписывается в цилиндр радиусом $\sigma_p* = \sigma_p\sqrt{2/3}$, а при значении $\mu_\sigma = 1$ правильная шестигранная призма вписывается в цилиндр радиусом $\sigma_c* = \sigma_c\sqrt{2/3}$.

Если пределы сопротивления сплошной среды при одноосном растяжении и сжатии одинаковы $\sigma_c = \sigma_p$, то радиус цилиндра будет $\sigma_p* = \sigma_p\sqrt{2/3}$, т. е. ребра полной пластичности при крайних значениях параметра Лодс вписываются в цилиндр, равно наклоненный к осям главных напряжений.

Именно это обстоятельство привело к заблуждению, которое более сотни лет постулировалось в работах посвященных полной пластичности – ребро полной пластичности ошибочно связывалось с условием пластичности Треска.

На самом деле ребро полной пластичности задается двумя уравнениями. Первым уравнением задает сингулярность девиаторных функций на полуплоскости кратности промежуточного главного напряжения
при $\mu_\sigma = -1$

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \Sigma_1 - \Sigma_3; \tag{1.16}$$

при $\mu_\sigma = 1$

$$\Sigma_1 - \Sigma_3 = \Sigma_2 - \Sigma_3 \tag{1.17}$$

Уравнения ребра сингулярности (1.16) и (1.17) не зависят от механических свойств сплошной среды и ее симметрии, а являются топологическим свойством поля напряжений при условии кратности промежуточного главного напряжения.

Второе уравнение задает положение ребра пластичности на полуплоскости $\mu_\sigma = -1$ значением максимального касательного напряжения $\mathrm{T}_1 = 0,5\sigma_\mathrm{p}$, а на полуплоскости $\mu_\sigma = 1$ значением максимального касательного напряжения $\mathrm{T}_3 = 0,5\sigma_\mathrm{c}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Койтер, В. Т.* Общие теоремы в теории упругопластических сред : сб. научн. тр. / В. Т. Койтер // Успехи механики твердого тела : Т. 1 / под ред. И. Снеддона и Р. Хилла. – М. : Иностранная литература, 1961. С. 79 85.

[2] *Прагер, В.* Проблемы теории пластичности / В. Прагер. – М. : Физматлит, 1958. – 36 с.

[3] *Reuss, A.* Vereintachte Berechnungger plastischen Formanderungsgesch-windingkeiten bei Vjraussetzung der Schubspannungsflies bedingung / A. Reuss // ZAMM. – 1933. – Bd. 13. – 365 p.

Кузнецов Евгений Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: SmitheE71@yandex.ru

Матченко Илья Николаевич,

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ekc_05@mail.ru

Матченко Николай Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Y. Y. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko

TO A QUESTION ON THE EDGE OF FULL PLASTICITY PERFECTLY CONNECTED ISOTROPIC MEDIUM

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Tula State University, Tula

Abstract. It is shown, that the edge of full plasticity is formed by an edge singular deviator functions on полуплоскостях frequency rates of an intermediate main stress and criteria of a limiting condition at extreme values of parameter Lode.

Keywords: edge of full plasticity, the law of plastic current, an edge singular, criterion of a limiting status.

REFERENCES

[1] *Koiter, V. T.* General theorems in the theory of elastic-plastic media: Sat. Scien. tr. / V. T. Koiter // The success of solid mechanics : Vol. 1 / ed. I. Sneddon and R. Hill. M. : Foreign Literature, 1961. – P. 79–85. (in Russian)

[2] *Prager, V.* Problems of the theory of plasticity / V. Prager. – M. : Fizmatlit, 1958. – 36 p. (in Russian)

[3] *Reuss, A.* Vereintachte Berechnungger plastischen Formanderungsgesch-windingkeiten bei Vjraussetzung der Schubspannungsflies bedingung / A. Reuss // ZAMM. – 1933. – Bd. 13. – 365 p. (in Russian)

Kuznetsov, Yevgeniy Evgenyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Ilya Nikolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., The senior scientific employee, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mattchenko, Nikolay Mikhaylovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mechanics Plastic Forming, Tula State University, Tula