

Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИДЕАЛЬНО СВЯЗНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Тульский государственный университет, г. Тула

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Показано, что предельным состояниям упругопластического деформирования соответствуют крайние и среднее значения параметра Лодэ как в пространстве напряжений, так и в пространстве упругопластических деформаций.

Ключевые слова: тензор напряжений, тензор упруго пластических деформаций, предельные состояния.

УДК: 531.01

1. Сплошную среду отнесем к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$). Напряженное состояние сплошной среды характеризуется симметричным тензором σ_{ij} или триэдром главных напряжений σ_i и его направлением.

Введем векторное пространство главных напряжений $\vec{\sigma}_i$. Если в трехмерном векторном пространстве главных напряжений через ось гидростатического напряжения σ_1 и направления осей главных напряжений $\vec{\sigma}_i$ провести три плоскости, то векторное пространство разделится на шесть сегментов, а девиаторная плоскость на шесть секторов (рис. 1.1).

Положительное направление секторов направлено от оси σ_1 в направлении против часовой стрелки.

Наряду с неупорядоченными главными напряжениями σ_i введем ранжированные главные напряжения [4], [5], [6], [7], [8], [9]

$$\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3. \quad (1.1)$$

Связь между неупорядоченными главными напряжениями σ_i и ранжированными главными напряжениями Σ_i в каждом из секторов устанавливается в соответствии с рис. 1.1.

Введем линейные инварианты главных ранжированных напряжений [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]

$$\Sigma_I = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3); \quad \Sigma_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma_1 - \Sigma_3), \quad \Sigma_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3). \quad (1.2)$$

Инвариантам $\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III}$ соответствуют векторы $\vec{\Sigma}_I, \vec{\Sigma}_{II}, \vec{\Sigma}_{III}$, причем

$$\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}_I + \vec{\Sigma}_{II} + \vec{\Sigma}_{III}. \quad (1.3)$$

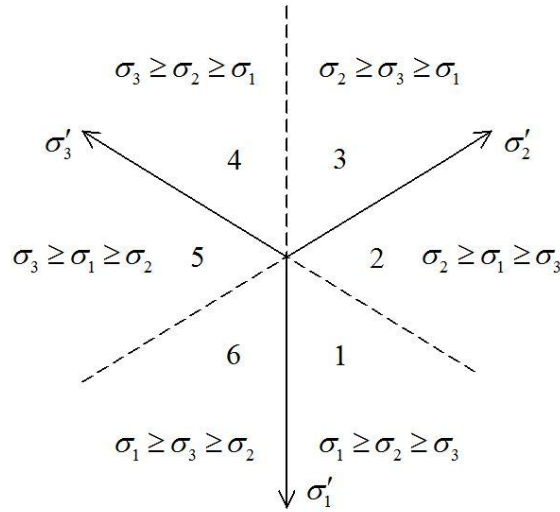


Рис. 1.1. Деление девиаторной плоскости на секторы

Векторы $\vec{\Sigma}_I$, $\vec{\Sigma}_{II}$, $\vec{\Sigma}_{III}$ имеют простой геометрический смысл. Вектор $\vec{\Sigma}_I$ является проекцией вектора напряжения $\vec{\Sigma}$ на гидростатическую ось. Вектор $\vec{\Sigma}_{II}$ является проекцией вектора напряжения $\vec{\Sigma}$ на линию сдвига. Линия сдвига является биссектрисой раствора угла каждого из секторов.

Вектор $\vec{\Sigma}_{III}$ также лежит в девиаторной плоскости и является проекцией вектора $\vec{\Sigma}$ на направление, перпендикулярное вектору $\vec{\Sigma}_{II}$. Положительное направление вектора $\vec{\Sigma}_{III}$ определяется в нечетных секторах поворотом вектора $\vec{\Sigma}_{II}$ против часовой стрелки, а в четных секторах поворотом по часовой стрелке. Сумма векторов $\vec{\Sigma}_{II}$ и $\vec{\Sigma}_{III}$ является вектором девиаторных напряжений

$$\vec{\Sigma}_d = \vec{\Sigma}_{II} + \vec{\Sigma}_{III}. \quad (1.4)$$

Из соотношений векторного базиса $\vec{\Sigma}_I$, $\vec{\Sigma}_{II}$, $\vec{\Sigma}_{III}$ как частные случаи вытекают векторные базисы А. А. Ильюпина [2] и В. В. Новожилова [12].

Направление вектора $\vec{\Sigma}_d$ в каждом из секторов девиаторной плоскости определяется углом вида напряженного состояния ω_σ , причем

$$\operatorname{tg} \omega_\sigma = \frac{\Sigma_{III}}{\Sigma_{II}} = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\sqrt{3}(\Sigma_1 - \Sigma_3)} = m_\sigma. \quad (1.5)$$

Угол ω_σ изменяется в диапазоне $-\pi/6 \leq \omega_\sigma \leq \pi/6$ и отсчитывается в каждом секторе от линии сдвига. Положительное направление отсчета угла ω_σ совпадает в нечетных секторах с поворотом по часовой стрелке, а в четных секторах – против часовой стрелки. Угол ω_σ называется углом вида напряженного состояния.

Параметр m_σ изменяется в диапазоне $-1/\sqrt{3} \leq m_\sigma \leq 1/\sqrt{3}$. При реализации одноосного растяжения $\omega_\sigma = -\pi/6$, $m_\sigma = -1/\sqrt{3}$, при чистом сдвиге $\omega_\sigma = 0$, $m_\sigma = 0$, при одноосном сжатии $\omega_\sigma = \pi/6$, $m_\sigma = 1/\sqrt{3}$.

Несложно заметить, что параметр m_σ связан с параметром Лоде [10] соотношением

$$\mu_\sigma = m_\sigma \sqrt{3}. \quad (1.6)$$

Обобщенное выражение для параметра Лоде записывается в виде

$$\mu_\sigma = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\Sigma_1 - \Sigma_3}. \quad (1.7)$$

Параметр Лоде изменяется в диапазоне $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$. При реализации одноосном растяжения $\mu_\sigma = -1$, при чистом сдвиге $\mu_\sigma = 0$, при одноосном сжатии $\mu_\sigma = 1$. Отсюда следует, что параметр Лоде является нормированным значением угла вида напряженного состояния m_σ .

Заметим, что соотношения для векторного базиса, предложенные А. А. Ильюшиным [2] совпадают с соотношениями (1.2) в четных секторах, а в нечетных секторах они противоречат обобщенному правилу знаков Лоде (1.8). Соотношения для векторного базиса, предложенные В. В. Новожиловым [12] совпадают с зависимостями (1.2) в нечетных секторах, а в четных секторах они противоречат обобщенному правилу Лоде (1.7).

Для модуля вектора интенсивности девиаторных напряжений справедливы равенства

$$\Sigma_d = \sqrt{\Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2} = \Sigma_{II} \sqrt{1 + \frac{1}{3}\mu_\sigma^2} = \Sigma_{III} \sqrt{1 + 3\mu_\sigma^{-2}}. \quad (1.9)$$

Легко проследить связь между линейными инвариантами $\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III}$ с гидростатическим напряжением $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ и максимальным касательным напряжением T :

$$\Sigma_I = \sqrt{3}\sigma, \quad \Sigma_{II} = \sqrt{2}T, \quad \Sigma_{III} = 2T/\sqrt{3}\mu_\sigma, \quad (1.10)$$

где $T = 0.5(\Sigma_1 - \Sigma_3)$.

Плоскости, разделяющие векторное пространство главных напряжений называются плоскостями кратности, поскольку на этих плоскостях промежуточное главное напряжение является кратным. Ось гидростатического давления делит плоскости кратности на полуплоскости кратности. Уравнения полуплоскостей кратности имеют вид $\mu_\sigma = \mp 1$. След от пересечения полуплоскостей кратности $\mu_\sigma = -1$ с девиаторной плоскостью на рис. 1 показан сплошной линией, а от полуплоскости $\mu_\sigma = 1$ — пунктирной линией. На полуплоскостях кратности напряженное состояние соответствует **пространственному сдвигу**, поскольку два экстремальных касательных напряжения равны по модулю, а третье равно нулю. На полуплоскостях кратности $\mu_\sigma = -1$ справедливо равенство $\Sigma_2 = \Sigma_3$ и характерным напряжением является Σ_1 , а на полуплоскостях кратности $\mu_\sigma = 1$ — $\Sigma_2 = \Sigma_1$ характерным напряжением является Σ_3 .

Плоскости, проходящие через ось гидростатического давления и линии сдвига, называются **плоскостями плоского чистого сдвига**. На этих плоскостях одно из экстремальных напряжений $T_{13} = 0, 5(\Sigma_1 - \Sigma_3)$ является максимальным, а два других экстремальных напряжения по модулю равны половине максимального касательного напряжения $T_{12} = T_{23} = 0, 5|T_{13}|$, где $T_{12} = 0, 5(\Sigma_1 - \Sigma_2)$, $T_{23} = 0, 5(\Sigma_2 - \Sigma_3)$. Плоскости чистого сдвига задаются уравнением $\mu_\sigma = 0$.

Упругопластические деформации характеризуются тензором e_{ij} или триэдром главных скоростей деформаций e_i и его направлением. По аналогии с тензором напряжений вводятся ранжированные главные деформации $E_1 \geq E_2 \geq E_3$ и их линейные инварианты

$$E_I = \frac{1}{\sqrt{3}}(E_1 + E_2 + E_3), \quad E_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_3), \quad E_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2E_2 - E_1 - E_3). \quad (1.11)$$

Параметр Лоде тензора упруго пластических деформаций вычисляется по формуле

$$\mu_e = \frac{2E_2 - E_1 - E_3}{E_1 - E_3}. \quad (1.12)$$

2. Исторически сложилось так, что в теории малых упругопластических деформаций развивалось два направления: теория пластичности Генки-Ильюшина [1] и теория полной пластичности Кармана-Хаара [11]. На сегодняшний день эти два направления трактуются как альтернативные [13]. Покажем, что формулировка гибридного двух константного условия

пластичности, позволяет получить соотношения, из которых эти концепции следуют как частными случаями.

Рассмотрим класс материалов, объемное деформирование которых является упругим. Эта гипотеза используется как в концепции Генки-Ильюшина, так и Кармана-Хаара. Концепции Генки-Ильюшина и Кармана-Хаара отличаются условиями перехода материала из упругого состояния в пластическое состояние. В концепции Генки-Ильюшина предполагается, что предел упругого деформирования определяется условием пластичности Мизеса

$$\Sigma_d^2 = \Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2 = (1 + m_\sigma^2)\Sigma_{II}^2 = R^2, \quad (2.1)$$

где R – характеристика предела упругого деформирования. В условии пластичности Мизеса предполагается, что пластическое состояние наступает в случае, если модуль девиаторных напряжений достигает предельного значения $\Sigma_d = R$. Из условия пластичности (2.1) следует, что пределы упругого деформирования при одноосном растяжении σ_p и чистом сдвиге τ_s связаны зависимостью $\sigma_p = \sqrt{3}\tau_s$.

В концепции Кармана-Хаара предел упругого деформирования определяется условием пластичности Треска

$$T = \Sigma_{II}/\sqrt{2} = k. \quad (2.2)$$

где T – максимальное касательное напряжение, k – характеристика предела упругого деформирования. Условие пластичности Треска постулирует, что пластическое состояние наступает при достижении максимальным касательным напряжением предельного значения $T = (\Sigma_1 - \Sigma_3)/2 = \Sigma_{II}/\sqrt{2} = k$. Из условия пластичности (3.2) следует, что пределы упругого деформирования при одноосном растяжении σ_p и чистом сдвиге τ_s связаны соотношением $\sigma_p = 2\tau_s$.

Считая, что каждый из критериев Мизеса и Треска отражают свойства реальных материалов, сформулируем двух константное условие пластичности, обобщающее эти критерии. В качестве условия пластичности примем квадратичную функцию линейных инвариантов ранжированных напряжений [5]

$$(\Sigma_{II}^2 + a\Sigma_{III}^2) = b^2, \quad (2.3)$$

где a и b – характеристики пластических свойств материала.

Двухконстантное условие пластичности (2.3) объединяет концепции Генки-Ильюшина и Кармана-Хаара. Если пластические свойства материала таковы, что выполняется равенство $a = 1$, то материал подчиняется условию пластичности Мизеса, а если $a = 0$, то материал подчиняется условию пластичности Треска.

Значения характеристик предельного состояния a и b можно найти из двух базовых экспериментов на одноосное растяжение и чистый сдвиг. В эксперименте на чистый сдвиг имеем $\Sigma_1 = -\Sigma_3 = \tau_s$, $\Sigma_2 = 0$ и из (3.3) следует $b = \sqrt{2}\tau_s$. В эксперименте на одноосное растяжение $\Sigma_1 = \sigma_p$, $\Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$ и из (3.3) следует $a = 3(4\tau_s^2/\sigma_p^2 - 1)$. Двухконстантное условие пластичности (2.3) применимо к нормально изотропным материалам, т. е. таким материалам у которых пределы пластическому сопротивлению при одноосном растяжении и сжатии одинаковы. Из постулата Друккера следует диапазон изменения константы $0 \leq a \leq 7/3$ или диапазон возможного изменения предельного сопротивления чистому сдвигу $\sigma_p/2 \leq \tau_s \leq 2\sigma_p/3$. Если $a = 0$, то материал подчиняется условию пластичности Треска. Если же $a = 1$, то справедливо условие пластичности Мизеса.

3. Работа деформирования изотропного тела определяется соотношением

$$\begin{aligned} W &= \vec{\Sigma}_1 \vec{E}_1 + \vec{\Sigma}_2 \vec{E}_2 + \vec{\Sigma}_3 \vec{E}_3 = \Sigma_1 E_1 + \Sigma_2 E_2 + \Sigma_3 E_3 = \vec{\Sigma}_I \vec{E}_I + \vec{\Sigma}_{II} \vec{E}_{II} + \vec{\Sigma}_{III} \vec{E}_{III} = \\ &= \Sigma_I E_I + \Sigma_{II} E_{II} + \Sigma_{III} E_{III} \end{aligned} \quad (3.1)$$

В соответствии с законом Гука потенциал упругих деформаций имеет вид

$$U_y = U_{y_0} + U_{yф}, \quad 2U_{y_0} = \Sigma_I^2/3K, \quad U_{yф} = (\Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2)/G, \quad (3.2)$$

где U_{y_0} – потенциал упругого объемного деформирования, $U_{yф}$ – потенциал упругого формоизменения, K – модуль объемной деформации, G – модуль сдвига.

Исследуя упруго пластические деформации, введем предположения, что при упруго пластическом деформировании объемное деформирование описывается законом Гука, в упругой области формоизменения так же описывается законом Гука, а деформации упругопластического формоизменения определяются потенциалом

$$U_{yрф} = U_{yф} + U_{рф}, \quad U_{рф} = F(f)/2, \quad f = \Sigma_{II}^2 + a\Sigma_{III}^2. \quad (3.3)$$

Тогда, за пределом упругого деформирования соотношения между линейными инвариантами разжированных напряжений и деформаций записываются в виде

$$E_I = \Sigma_I/3K, \quad E_{II} = 2(1 + \chi)\Sigma_{II}/G, \quad E_{III} = 2(1 + a\chi)\Sigma_{III}/G, \quad (3.4)$$

где $\chi = G/G_p^*$ – относительная мера максимального пластического сдвига, $G_p^* = 2/U_p^*$, $U_p^* = \partial U_p / \partial f$. С ростом пластических деформаций растет параметр U_p^* и, следовательно, растет параметр χ .

Из (3.4) видно, что при упругопластическом деформировании обобщенные жесткости в направлении векторов $\vec{\Sigma}_{II}$ и $\vec{\Sigma}_{III}$ в общем случае различны.

Если же свойства материала таковы, что $a = 1$, т.е. материал подчиняется условию пластичности Мизеса, то обобщенные жесткости в направлении векторов $\vec{\Sigma}_{II}$ и $\vec{\Sigma}_{III}$ одинаковы.

Если же материал подчиняется условию пластичности Треска, т.е. $a = 0$, то в направлении \vec{E}_{III} материал деформируется упруго.

4. Из (3.4) следуют соотношения между главными разжированными деформациями и напряжениями

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3) \\ E_2 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) \\ E_3 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_2) - \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если предположить, что материал подчиняется условию пластичности Треска, то $a = 0$ и соотношения (4.1) принимают вид

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3G} (2\Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3) + \frac{1}{G_p} (\Sigma_1 - \Sigma_3), \\ E_2 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3G} (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3), \\ E_3 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3G} (2\Sigma_3 - \Sigma_1 - \Sigma_2) - \frac{1}{G_p} (\Sigma_1 - \Sigma_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Соотношения (4.2) совпадают с соотношениями Е. И. Шемякина [13].

Из соотношений (4.2) следует, что в материалах, с функцией нагружения в виде соответствующему условию пластичности Треска, в направлении промежуточного главного напряжения Σ_2 деформации будут упругими [11].

Вычислим главные сдвиги

$$\Gamma_{(12)} = E_1 - E_2 = \frac{2}{G} (\Sigma_1 - \Sigma_2) + \frac{1}{G_p} (\Sigma_1 - \Sigma_3).$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{(23)} &= E_2 - E_3 = \frac{2}{G}(\Sigma_2 - \Sigma_3) + \frac{1}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3), \\ \Gamma_{(13)} &= E_1 - E_3 = \frac{2}{G}(\Sigma_1 - \Sigma_3) + \frac{2}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3).\end{aligned}\quad (4.3)$$

Из (2.18) следует, что деформации пластического сдвига

$$\begin{aligned}\Gamma_{(12)p} &= \frac{1}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \frac{2}{G_p}T_{\max}, \\ \Gamma_{(23)p} &= \frac{1}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \frac{2}{G_p}T_{\max}, \\ \Gamma_{(13)p} &= \frac{2}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \frac{4}{G_p}T_{\max} = \Gamma_{\max}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Следовательно, при неполной пластичности пластический сдвиг на площадках экстремальных касательных напряжений формируется за счет максимального касательного напряжения T_{\max} . Максимальный пластический сдвиг развивается на площадке (13). На площадках (12) и (23) пластический сдвиг вдвое меньше.

Эти выводы противоречат утверждению В. В. Зубчанинова о том, что в концепции Кармана-Хаара предполагается, что пластический сдвиг при неполной пластичности происходит только на одной площадке [3].

Если же $a = 1$, то материал имеет функцию нагружения, соответствующую условию пластичности Мизеса и соотношения (4.1) записываются в виде

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{\sigma}{K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (2\Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3), \\ E_2 &= \frac{\sigma}{K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3), \\ E_3 &= \frac{\sigma}{K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (2\Sigma_3 - \Sigma_1 - \Sigma_2).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Соотношения (4.5) совпадают с соотношениями Гепки-Ильющина [1].

Вычислим пластические сдвиги на площадках экстремальных касательных напряжений

$$\begin{aligned}\Gamma_{(12)p} &= \frac{2}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_2) = \frac{4}{G_p}T_{(12)}, \\ \Gamma_{(23)p} &= \frac{2}{G_p}(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \frac{4}{G_p}T_{(23)}, \\ \Gamma_{(13)p} &= \frac{2}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \frac{4}{G_p}T_{(13)}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Таким образом, сдвиги на площадках экстремальных касательных напряжений являются квазилинейными функциями соответствующих экстремальных напряжений. Пластическая податливость $1/G_p$ является интегральной характеристикой воздействия всех экстремальных касательных напряжений.

5. Определяющие соотношения (3.4) и (4.1)–(4.3) справедливы для любого из сегментов трехмерного векторного пространства главных напряжений. Внутри каждого из сегментов, т. е. в диапазоне изменения параметра Лоде $-1 < \mu_\sigma < 1$, девиаторные функции U_{yf} и U_{pf} являются регулярными.

На полуплоскостях $\mu_\sigma = -1$ на напряженное состояние накладывается ограничение в виде условия кратности промежуточного главного напряжения $\Sigma_2 - \Sigma_3 = 0$.

Запишем функционал

$$A_1 = E_i \Sigma_i - U_o - U_{yf} - U_{pf} - \lambda(\Sigma_2 - \Sigma_3), \quad (5.1)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Отсюда следуют конституционные соотношения справедливые для полуплоскостей кратности $\mu_\sigma = -1$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3), \\ E_2 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) + \lambda, \\ E_3 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_2) - \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3) - \lambda. \end{aligned} \quad (5.2)$$

На полуплоскостях кратности $\mu_\sigma = 1$ на главные рапжированные напряжения накладывается ограничение $\Sigma_1 - \Sigma_2 = 0$.

Используя функционал аналогичный (5.2), запишем

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3) + \mu, \\ E_2 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) - \mu, \\ E_3 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_2) - \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где μ – множитель Лагранжа.

Множители Лагранжа λ и μ находятся при решении краевой задачи.

6. Используя два последних соотношения из (3.4), получим зависимости между параметрами вида напряженного и деформированного состояния и обобщенной мерой пластических деформаций

$$\mu_e = \frac{1 + a\chi}{1 + \chi} \mu_\sigma. \quad (6.1)$$

Отсюда следует, что поскольку в концепции Генки-Ильюшина параметр $a = 1$, то обобщенные модули жесткости пластического деформирования в направлении \vec{E}_{II} и \vec{E}_{III} одинаковы и $\mu_e = \mu_\sigma$. В концепции Хаара-Кармана параметр $a = 0$ и модули жесткости деформирования различны, причем, в направлении вектора $\vec{\Sigma}_{III}$ деформация будет упругой, а параметры вида напряженного и деформированного состояния связаны соотношением $\mu_e = \mu_\sigma / (1 + \chi)$.

Рассмотрим процесс простого деформирования в пространстве деформаций. В этом случае направление осей главных деформаций не изменяются. Кроме того, параметр Лоде деформированного состояния в процессе нагружения так же остается постоянным $\mu_e = \mu_e^* = const$.

В силу изотропии материала направление осей главных напряжений в процессе деформирования так же остается неизменным, а параметры вида напряженного и деформированного материала будут связаны соотношением

$$\mu_\sigma = \frac{1 + \chi}{1 + a\chi} \mu_e^*. \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что в случае, если материал подчиняется условию пластичности Мизеса, то $a = 1$, и $\mu_\sigma = \mu_e^* = const$, т.е. процессу простого деформирования в пространстве деформаций, как отклик, соответствует процесс простого нагружения в пространстве напряжений.

Если свойства материала таковы, что характеристика пластических свойств $0 \leq a < 1$, то в процессе пластического деформирования числитель в соотношении (6.2) растет быстрее, чем знаменатель, и в зависимости от знака параметра μ_e^* параметр вида напряженного состояния при развитых пластических деформациях стремится к своим крайним значениям $\mu_\sigma = \mp 1$.

Иная ситуация складывается, если характеристика пластических свойств материала $a > 1$. В этом случае знаменатель соотношения (6.2) растет быстрее, чем числитель, и параметр вида напряженного μ_σ состояния при развитых пластических деформациях стремится к нулю, т. е. $\mu_\sigma = 0$.

Следовательно, простое нагружение в пространстве деформаций для материалов, пластическая характеристика которых $a \neq 1$, сопровождается дрейфом параметра Лоде μ_σ к своим крайним значениям или нулю.

Отсюда так же следует, что предельными состояниями изотропной идеально связной среды являются три состояния: **плоский чистый сдвиг в пространстве напряжений**, при котором напряженное состояние характеризуется параметром $\mu_\sigma = 0$ и **пространственный сдвиг в пространстве напряжений**, при котором напряженное состояние характеризуется крайними значениями параметра Лоде $\mu_\sigma = \pm 1$.

Таким образом, **предельным состояниям при упругопластическом деформировании соответствуют плоскости кратности или плоскости плоского чистого сдвига**.

Теперь рассмотрим поведение материала в случае, если процесс упругопластического деформирования будет задан процессом простого нагружения в пространстве напряжений. В этом случае в силу изотропии материала направление осей главных напряжений в процессе деформирования и параметр Лоде $\mu_\sigma = \mu_\sigma^* = const$ остается неизменным, а параметры вида напряженного и деформированного материала будут связаны соотношением

$$\mu_e = \frac{1 + a\chi}{1 + \chi} \mu_\sigma^*. \quad (6.3)$$

Из (6.3) следует, что в случае, если материал подчиняется условию пластичности Мизеса, то $a = 1$, и $\mu_e = \mu_\sigma^* = const$, и простое нагружение в пространстве напряжений, как отклик, вызывает простое нагружение в пространстве деформаций.

Если свойства материала таковы, что характеристика пластических свойств $0 \leq a < 1$, то при пластическом деформировании числитель в соотношении (3.8) растет медленнее, чем знаменатель, и параметр вида деформированного состояния при развитых пластических деформациях стремится к нулю, т. е. $\mu_e \rightarrow 0$.

Если же свойства материала таковы, что характеристика пластических свойств $a > 1$, то в процессе пластического деформирования числитель в соотношении (3.9) растет быстрее, чем знаменатель, и в зависимости от знака параметра μ_σ^* параметр вида деформированного состояния при развитых пластических деформациях стремится к своим крайним значениям

$$\mu_e \rightarrow \mp 1.$$

Таким образом, в случае если характеристика пластических свойств материала $a \neq 1$, то в процессе пластического деформирования происходит дрейф параметра Лоде деформированного состояния и процесс упругопластического деформирования не будет простым.

При простом нагружении в пространстве деформаций направление дрейфа параметра Лоде μ_σ удобно определять по кривой пластичности, построенной в координатах $\Sigma_d \sim \mu_\sigma$.

Для этого из соотношений (1.8) и (2.3) получим

$$\Sigma_d = \sqrt{2}\tau_s \sqrt{\frac{1 + \mu_\sigma^2/3}{1 + a\mu_\sigma^2/3}}. \quad (6.4)$$

На кривой пластичности $\Sigma_d \sim \mu_\sigma$ дрейф параметра Лоде μ_σ направлен от значения $\Sigma_d|_{\mu_\sigma=\mu_\sigma^*}$ в сторону возрастания Σ_d .

7. В общем случае при напряженных состояниях $\mu_\sigma = -1$, $\mu_\sigma = 0$, $\mu_\sigma = 1$ характеристики предельного состояния являются независимыми. Поэтому сформулируем трехконстантное условие пластичности [6].

$$\Sigma_{II}^2 + 2A\Sigma_{II}\Sigma_{III} + B\Sigma_{III}^2 = C, \quad (7.1)$$

где A , B и C – константы, зависящие от характеристик предельного состояния.

Константы A , B и C находятся экспериментально из опытов на одноосное растяжение, сжатие и чистый сдвиг.

Подставляя (1.2) в (7.1) получим

$$\frac{(\Sigma_1 - \Sigma_3)^2}{2} + A \frac{(\Sigma_1 - \Sigma_3)(2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3)}{\sqrt{3}} + B \frac{(2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3)^2}{6} = C. \quad (7.2)$$

В эксперименте на чистый сдвиг имеем $\Sigma_1 = -\Sigma_3 = \tau_s$, $\Sigma_2 = 0$. В этом случае из (7.2) следует

$$C = 2\tau_s^2. \quad (7.3)$$

При одноосном растяжении $\Sigma_1 = \sigma_p$, $\Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$. Из (7.2) следует

$$1 - \frac{2}{\sqrt{3}}A + \frac{1}{3}B = 4\frac{\tau_s^2}{\sigma_p^2}. \quad (7.4)$$

При одноосном сжатии $\Sigma_3 = -\sigma_c$, $\Sigma_2 = \Sigma_1 = 0$ и из (7.2) следует

$$1 + \frac{2}{\sqrt{3}}A + \frac{1}{3}B = 4\frac{\tau_s^2}{\sigma_c^2}. \quad (7.5)$$

Решая совместно уравнения (7.4) и (7.5), получим

$$A = \sqrt{3}\tau_s^2 \left(\frac{1}{\sigma_c^2} - \frac{1}{\sigma_p^2} \right), \quad B = 3 \left[2\tau_s^2 \left(\frac{1}{\sigma_c^2} + \frac{1}{\sigma_p^2} \right) - 1 \right]. \quad (7.6)$$

Очевидно, что одноконстантными условиями пластичности, например, такими как условие пластичности Треска или условие пластичности Мизеса, описать три предельных состояния возможно только при очень жестких ограничениях, накладываемых на характеристики пластических свойств деформируемой среды.

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то $\sigma_p = \sigma_c$ и трехконстантное условие пластичности (7.1) переходит в двух константное условие пластичности (2.3).

Выбор направления дрейфа параметра Лоде μ_σ при простом нагружении в пространстве деформаций в случае трех константного условия пластичности удобно устанавливать с помощью графика $\Sigma_d \sim \mu_\sigma$. Так же как и при двух константном условии пластичности на кривой пластичности $\Sigma_d \sim \mu_\sigma$ дрейф параметра Лоде μ_σ направлен от значения $\Sigma_d|_{\mu_\sigma=\mu_c}$ в сторону возрастания Σ_d .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. / А. А. Ильюшин. – М. : ОГИЗ, 1948. – 376 с.
- [2] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Издательство АН СССР, 1963. – 272 с.
- [3] *Зубчанинов, В. Г.* К модели неполной пластичности материалов Е. И. Шемякина / В. Г. Зубчанинов // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сборник статей. К 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 284–287.

[4] Кузнецов, Е. Е. Об изоморфизме упругопластических свойств / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию А. А. Ильюшина. – М. : Ленанд, 2006. – С. 166–171.

[5] Кузнецов, Е. Е. Формулировка условия предельного состояния изотропных сред в инвариантах собственных упругих состояний / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сборник статей. К 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 369–375.

[6] Кузнецов, Е. Е. Гибридно условие пластичности изотропных материалов / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – С. 265–274.

[7] Кузнецов, Е. Е. К построению теории малых упругопластических деформаций / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – С. 288–295.

[8] Кузнецов, Е. Е. О параметре Лоде / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1(15). – С. 98–101.

[9] Кузнецов, Е. Е. О сингулярности девиаторных функций трехмерного тензора второго ранга / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1(15). – С. 102–106.

[10] Лоде, В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. ст. – М. : Иностранная литература, 1948. – С. 168–205

[11] Хаар, А. К теории напряженного состояния в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. переводов. М. : Ил, 1948. – С. 41–56.

[12] Черных, К. Ф. Введение в анизотропную упругость / К. Ф. Черных. – М. : Наука, 1988. – 198 с.

[13] Шемякин, Е. И. Синтетическая теория прочности. Ч. 1 / Е. И. Шемякин // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2. – № 6. – С. 63–70.

Кузнецов Евгений Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: SmitheE71@yandex.ru

Матченко Илья Николаевич,

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: екс_05@mail.ru

Матченко Николай Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: екс_05@mail.ru

Y. Y. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko

**THE LIMIT STATE ELASTOPLASTIC DEFORMATION PERFECT
CONNECTED ISOTROPIC MEDIA**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Tula State University, Tula

Abstract. It is shown, that to limiting statuses it is elastic plastic deformation there correspond extreme and average option values Lode both in space of stress, and in space is elastic plastic deformations.

Keywords: tensor stress, tensor it is elastic plastic deformations, limiting statuses.

REFERENCES

- [1] *Ilyushin, A. A.* Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. : OGIZ, 1948. – 376 p. (in Russian)
- [2] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory / A. A. Ilyushin. – M. : Publisher USSR Academy of Sciences, 1963. – 272 p. (in Russian)
- [3] *Zubchaninov, V. G.* The model is incomplete plasticity and E. I. Shemyakin / V. G. Zubchaninov // Problems of mechanics of deformable solids and rocks: a collection articles. On the 75th anniversary of E. I. Shemyakin. – M. : Fizmatlit, 2006. – P. 284–287. (in Russian)
- [4] *Kuznetsov, E. E.* On the isomorphism elastoplastic properties / E. E. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko // Elastic and inelastic. Materials International Scientific Symposium on the mechanics of deformable bodies, dedicated 95th anniversary of A. A. Ilyushin. – M. : Lenend, 2006. – P. 166–171. (in Russian)
- [5] *Kuznetsov, E. E.* The wording of the conditions of a limiting condition of isotropic media in invariants own elastic states / E. E. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko // Problems of mechanics of deformable solids and rocks: a collection of articles. For the 75th anniversary E. I. Shemyakin. – M. : Fizmatlit, 2006. – P. 369–375. (in Russian)
- [6] *Kuznetsov, E. E.* Hybrid plasticity condition isotropic materials / E. E. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2(8). – P. 265–274. (in Russian)
- [7] *Kuznetsov, E. E.* On the construction of the theory of small elastic-plastic deformations / E. E. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2(8). – P. 288–295. (in Russian)
- [8] *Kuznetsov, E. E.* About parameter Lode / E. E. Kuznetsov, N. M. Matchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1(15). – P. 98–101. (in Russian)
- [9] *Kuznetsov, E. E.* Singular deviator functions of three-dimensional tensor of rank / E. E. Kuznetsov, N. M. Matchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1(15). – P. 102–106. (in Russian)
- [10] *Lode, V.* Effect of the main medium voltage to the strength of the metal / V. Lode // The theory of plasticity: Sat. Art. – M. : Foreign Literature, 1948. – P. 168–205 (in Russian)
- [11] *Haar, A.* On the theory of the state of stress in the plastic and granular media / A. Haar, T. Karman // The theory of plasticity: Sat. translation. M. : Il., 1948. P. 41–56. (in Russian)
- [12] *Chernyx, K. F.* Introduction to anisotropic elasticity / K. F. Chernyx. – M. : Nauka, 1988. – 198 p. (in Russian)
- [13] *Shemyakin, E. I.* Synthetic theory of strength. Part. 1 / E. I. Shemyakin // Physical mesomechanics. – 1999. – Vol. 2. – № 6. – P. 63–70. (in Russian)

Kuznetsov, Yevgeniy Evgenyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

Matchenko, Ilya Nikolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., The senior scientific employec, I. Yakovlev Chuvash State Pcdagogical University, Cheboksary

Matchenko, Nikolay Mikhaylovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mechanics Plastic Forming, Tula State University, Tula