Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 151–156

Е. А. Листров, Т. Д. Семыкина

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ УЧЕТА УПРУГОЙ СЖИМАЕМОСТИ

Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, г. Воронеж

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Рассматривается напряженное и деформированное состояние толстой пластины с круговым отверстием в условиях плоской деформации с учетом упругой сжимаемости.

Ключевые слова: условие пластичности Треска, метод возмущений, упругая сжимаемость.

УДК: 539.374

Рассмотрим напряженное и деформированное состояние толстой пластины с круговым отверстием в условиях плоской деформации. Решение этой задачи в случае несжимаемого материала получено в работах [1], [2]. В данном исследовании при решении учитывается упругая сжимаемость. Предполагается, коэффициент Пуассона μ можно представить в виде числового ряда

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mu_n; \quad \mu_0 = \frac{1}{2}; \quad \mu_n = \text{const}, \tag{1}$$

где δ — малый параметр, характеризующий упругую сжимаемость материала.

Такое представление коэффициента Пуассона и решение в виде рядов по степеням параметра δ предложены в [3].

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}; \quad e_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_{ij}^{(n)}; \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \lambda_n. \tag{2}$$

В пластической области приращения полной деформации равны сумме приращений упругой и пластической деформации. Связь между компонентами напряжения и приращениями пластической деформации определяется ассоциативным законом течения. В качестве условия пластичности выбирается условие пластичности Треска

$$4(k^2 - I_2)(4k^2 - I_2)^2 + 27I_3^2 = 0, \tag{3}$$

где I_2, I_3 — второй и третий инварианты девиатора напряжений.

$$6I_2 = (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{r\theta}^2,$$
$$I_3 = (\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_z - \sigma)\tau_{r\theta}^2.$$

В пластической области связь между напряжениями и полными приращениями деформаций имеет вид:

$$de_r = \frac{1}{E}\left[d\sigma_r - \mu(d\sigma_\theta + d\sigma_z)\right] + d\lambda\Big\{-4(2k^2 - I_2)(4k^2 - I_2)(2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\theta) +$$

Поступила 08.04.2015

$$+18\left[(\sigma_z-\sigma)(\sigma_\theta-\sigma)-\tau_{r\theta}^2\right]\left[(\sigma_\theta-\sigma)(\sigma_z-\sigma)-\frac{1}{3}I_2\right](2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\theta)\Big\},$$

$$de_\theta=\frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta-\mu(d\sigma_r+d\sigma_z)\right]+d\lambda\Big\{-4(2k^2-I_2)(4k^2-I_2)(2\sigma_\theta-\sigma_r-\sigma_z)+$$

$$+18\left[(\sigma_r-\sigma)(\sigma_z-\sigma)-\tau_{r\theta}^2\right]\left[(\sigma_r-\sigma)(\sigma_z-\sigma)-\frac{1}{3}I_2\right](2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\theta)\Big\}, \quad (4)$$

$$de_z=\frac{1}{E}\left[d\sigma_z-\mu(d\sigma_r+d\sigma_\theta)\right]+d\lambda(2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\theta)\Big\{-4(2k^2-I_2)(4k^2-I_2)+$$

$$+18\left[(\sigma_r-\sigma)(\sigma_\theta-\sigma)-\tau_{r\theta}^2\right]\left[(\sigma_r-\sigma)(\sigma_\theta-\sigma)-\tau_{r\theta}^2+\frac{1}{3}I_2\right]\Big\}=C,$$

$$de_{r\theta}=\frac{1}{2G}d\tau_{r\theta}+d\lambda\tau_{r\theta}\left[-12(2k^2-I_2)(4k^2-I_2)-54(\sigma_z-\sigma)I_3\right].$$

За нулевое решение примем напряженное и деформированное состояние толстой пластины с круговым отверстием радиуса a, растянутой на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями и нагруженной по контуру равномерным давлением q, определенным без учета упругой сжимаемости [1], [4].

Учитывая (2), разложим условие пластичности (3) по малому параметру:

$$4\left(k^2-I_2^{(0)}\right)\left(4k^2-I_2^{(0)}\right)^2+27\left(I_3^{(0)}\right)^2=0,$$

$$-12\left(4k^2-I_1^{(0)}\right)\left(2k^2-I_2^{(0)}\right)I_2^{(n)}+12\left(3k^2-I_2^{(0)}\right)\sum_{m=1}^{n-1}I_2^{(m)}I_2^{(n-m)}-$$

$$-4\sum_{m,l=1}^{m+1=n-2}I_2^{(m)}I_2^{(l)}I_2^{(n-m-l)}+27\sum_{m=0}^{n}I_3^{(m)}I_3^{(n-m)}=0,\quad n\geqslant 1, \quad (5)$$

где

$$6I_2^{(0)}=\left(\sigma_r^{(0)}-\sigma_\theta^{(0)}\right)^2+\left(\sigma_\theta^{(0)}-\sigma_z^{(0)}\right)^2+\left(\sigma_z^{(0)}-\sigma_r^{(0)}\right)^2+6\left(\tau_{r\theta}^{(0)}\right)^2,$$

$$6I_2^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}\Big[\left(\sigma_r^{(m)}-\sigma_\theta^{(m)}\right)\left(\sigma_r^{(n-m)}-\sigma_\theta^{(n-m)}\right)+\left(\sigma_r^{(m)}-\sigma_z^{(m)}\right)\left(\sigma_r^{(n-m)}-\sigma_z^{(n-m)}\right)+$$

$$+\left(\sigma_\theta^{(m)}-\sigma_z^{(m)}\right)\left(\sigma_\theta^{(n-m)}-\sigma_z^{(n-m)}\right)+6\tau_{r\theta}^{(m)}\tau_{r\theta}^{(n-m)}\Big],\quad n\geqslant 1; \quad (6)$$

$$I_3^{(0)}=\left(\sigma_r^{(0)}-\sigma^{(0)}\right)\left(\sigma_\theta^{(0)}-\sigma^{(0)}\right)\left(\sigma_z^{(0)}-\sigma^{(0)}\right)+\left(\sigma_z^{(0)}-\sigma^{(0)}\right)\left(\tau_{r\theta}^{(0)}\right)^2$$

$$I_3^{(0)}=\sum_{m,l=0}^{m+l=n}\Big[\left(\sigma_r^{(m)}-\sigma^{(m)}\right)\left(\sigma_\theta^{(l)}-\sigma^{(l)}\right)\left(\sigma_z^{(n-m-l)}-\sigma^{(n-m-l)}\right)-$$

$$-\left(\sigma_z^{(m)}-\sigma^{(m)}\right)\tau_{r\theta}^{(l)}\tau_{r\theta}^{(n-m-l)}\Big],\quad n\geqslant 1.$$

Учитывая нулевое решение, имеем

$$I_2^{(0)}=k^2,\quad I_3^{(0)}=0,\quad \tau_{r\theta}^{(0)}=0,\quad \sigma_z^{(0)}-\sigma^{(0)}=0.$$

И для первого приближения получим

$$-36k^4I_2^{(1)}=0;\quad I_2^{(1)}=0;\quad \sigma_r^{(1)}-\sigma_\theta^{(1)}=0. \quad (7)$$

Очевидно, формула (7) совпадает с подобным условием без учета упругой сжимаемости и аналогична [3], получим, что в пластической области

$$\sigma_r^{(1)}=\sigma_\theta^{(1)}=\tau_{r\theta}^{(1)}=0. \quad (8)$$

Рассмотрим второе приближение условия пластичности, учитывая (7), (8):

$$\begin{aligned} -36k^4 I_2^{(II)} + 27\left(I_3^{(I)}\right)^2 = 0;\ I^{(I)} = -\frac{2}{3}k^2\sigma_z^{(I)};\\ 6I_2^{(II)} = -6k\left(\sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)}\right) + 2\left(\sigma_z^{(I)}\right)^2; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\sigma_r^{(II)} - \sigma_\theta^{(II)} = 0. \tag{10}$$

Следовательно, в пластической области

$$\sigma_r^{(II)} = \sigma_\theta^{(II)} = \tau_{r\theta}^{(II)} = 0. \tag{11}$$

Выпишем условие пластичности для третьего приближения:

$$\begin{aligned} -36k^4 I_2^{(III)} + 54 I_3^{(I)} I_3^{(II)} = 0;\ I_3^{(II)} = -\frac{2}{3}k^2\sigma_z^{(II)};\\ 6I_2^{(III)} = -6k\left(\sigma_r^{(III)} - \sigma_\theta^{(III)}\right) + 4\sigma_z^{(I)}\sigma_z^{(II)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Получим

$$\sigma_r^{(III)} - \sigma_\theta^{(III)} = 0; \quad \sigma_r^{(III)} = \sigma_\theta^{(III)} = \tau_{r\theta}^{(III)} = 0. \tag{13}$$

Четвертое приближение при условиях (7)–(13) таково:

$$\begin{aligned} -36k^4 I_2^{(IV)} + 24k^2\left(I_2^{(II)}\right)^2 + 27\left[2I_3^{(I)}I_3^{(III)} + \left(I_3^{(II)}\right)^2\right] = 0;\\ 6I_2^{(IV)} = 2\left[-3k\left(\sigma_r^{(IV)} - \sigma_\theta^{(IV)}\right) + 2\sigma_z^{(I)}\sigma_z^{(III)}\right] + 2\left(\sigma_z^{(II)}\right)^2;\\ I_3^{(III)} = -\frac{2}{27}\left(\sigma_z^{(I)}\right)^3 - \frac{2}{3}k^2\sigma_z^{(III)};\\ \sigma_r^{(IV)} - \sigma_\theta^{(IV)} = 0; \quad \sigma_r^{(IV)} = \sigma_\theta^{(IV)} = \tau_{r\theta}^{(IV)} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Так как всюду в пластической области

$$\sigma_r^{(n)} = \sigma_\theta^{(n)} = \tau_{r\theta}^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant n \leqslant 4$$

и граничные условия на бесконечности не зависят от коэффициента Пуассона, получим, что компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ в упругой области и граница пластической зоны будут такими же, как и без учета упругой сжимаемости.

Определим σ_z в пластической области. Для этого воспользуемся условием $de_z = 0$, подставив в него (2), разложим по параметру

$$\begin{aligned} \frac{1}{E}\left[d\sigma_z^{(n)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(n)} + d\sigma_\theta^{(n)}\right) - \sum_{m=1}^{n}\mu_m\left(d\sigma_r^{(n-m)} + d\sigma_\theta^{(n-m)}\right)\right] +\\ + \sum_{m,l=0}^{m+l=n} d\lambda_m\left(2d\sigma_z^{(l)} - \sigma_\theta^{(l)} - \sigma_r^{(l)}\right)T^{(n-m-l)} = 0,\ n \geqslant 1, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} T = -4(2k^2 - I_2)(4k^2 - I_2) +\\ +18\left[(\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) - \tau_{r\theta}^2\right]\left[(\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) - \tau_{r\theta}^2 + \frac{1}{3}I_2\right]. \end{aligned}$$

При условиях (7)–(15) получим

$$\frac{d\sigma_z^{(n)}}{d\lambda_0} - \mu_n\frac{d\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right)}{d\lambda_0} = 0, \tag{16}$$

где λ_0 характеризует процесс нагружения тела при пластическом деформировании, $\lambda_0 = 0$ соответствует упругому состоянию тела в нулевом приближении. В упругом состоянии $\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ и, следовательно, при учете (7)–(14)

$$\sigma_z^{(n)}\Big|_{\lambda_0=0} = \mu_n \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right)\Big|_{\lambda_0=0}. \tag{17}$$

Интегрируя (16) при условии (17), получим

$$\sigma_z^{(n)} = -2\mu_n \left(k - q + 2k \ln \frac{r}{a}\right). \tag{18}$$

Исследуем деформированное состояние. Вследствие учета упругой сжимаемости получим в пластической области

$$e_r^{(n)} + e_\theta^{(n)} = e_{r_e}^{(n)} + e_{\theta_e}^{(n)} + e_{z_e}^{(n)}, \tag{19}$$

где $e_{ij_e}^{(n)}$ — упругая часть деформации, определяемая законом Гука.

Условие $e_{r\theta}^{(n)} = 0$ остается прежним. Выражая деформации $e_{ij}^{(n)}$ через перемещения, а $e_{ij_e}^{(n)}$ — по линеаризованным формулам,

$$\begin{aligned} e_{r_e} &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ e_{\theta_e} &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)], \\ e_{z_e} &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Запишем для n-го приближения

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(n)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta} = -\frac{2}{E}\sum_{m=0}^{n} \mu_n \left(\sigma_r^{(n-m)} + \sigma_\theta^{(n-m)} + \sigma_z^{(n-m)}\right), \\ \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial r} + \frac{u_\theta^{(n)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \theta} = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Правая часть первого из уравнений (21) есть функция от r, обозначим ее через R_n. Определим частное решение системы (21) в виде

$$u_r^{*(n)} = \frac{1}{r}\int \frac{R_n}{r} dr; \quad u_r^{*(n)} = 0.$$

Для первого приближения

$$u_r^{*(I)} = \frac{6\mu_1}{E}\frac{\ln r}{r}\left(k - q + k \ln \frac{r}{a} - k \ln a\right). \tag{22}$$

Для второго приближения

$$u_r^{*(II)} = \frac{2(3\mu_2 + 2\mu_1^2)}{E}\frac{\ln r}{r}\left(k - q + k \ln \frac{r}{a} - k \ln a\right). \tag{23}$$

Для третьего приближения

$$u_r^{*(III)} = \frac{2(3\mu_3 + 4\mu_1\mu_2)}{E}\frac{\ln r}{r}\left(k - q + k \ln \frac{r}{a} - k \ln a\right). \tag{24}$$

Для четвертого приближения

$$u_r^{*(IV)} = \frac{2(3\mu_4 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3)}{E}\frac{\ln r}{r}\left(k - q + k \ln \frac{r}{a} - k \ln a\right). \tag{25}$$

После этого, следуя [3], можно записать общие выражения для компонент деформации:

$$e_r^{(n)} = \frac{du_r^{*(n)}}{dr} - \frac{a_{00}}{r^2} - \frac{a_{12}}{r}\cos\theta + \frac{1}{r}\sum_{m=2}^{\infty} m\beta[a_{m1}\sin(\beta \ln r) - a_{m2}\cos(\beta \ln r)]\cos(m\theta),$$

$$e_\theta^{(n)} = \frac{u_r^{*(n)}}{r} + \frac{a_{00}}{r^2} + \frac{a_{12}}{r}\cos\theta - \frac{1}{r}\sum_{m=2}^{\infty} m\beta[a_{m1}\sin(\beta\ln r) - a_{m2}\cos(\beta\ln r)]\cos(m\theta),$$
$$e_{r\theta}^{(n)} = 0; \quad \beta = \sqrt{m^2-1}. \tag{26}$$

В упругой области после линеаризации уравнений, подобных (20), получим:

$$e_r^{(n)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_r^{(n)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_\theta^{(n)} + \sigma_z^{(n)}\right) - \sum_{m=1}^{n}\mu_m\left(\sigma_\theta^{(n-m)} + \sigma_z^{(n-m)}\right)\right],$$
$$e_\theta^{(n)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta^{(n)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(n)} + \sigma_z^{(n)}\right) - \sum_{m=1}^{n}\mu_m\left(\sigma_r^{(n-m)} + \sigma_z^{(n-m)}\right)\right], \tag{27}$$
$$e_{r\theta}^{(n)} = \frac{1}{2G}\tau_{r\theta}^{(n)} + \frac{1}{E}\sum_{m=1}^{n}\mu_m\tau_{r\theta}^{(n-m)}.$$

Деформированное состояние в упругой области определено, известны компоненты напряжения, постоянные в (26) определяются из условия сопряжения решений (27) и (26) на границе пластической зоны. Итак, полученные четыре приближения напряженного и деформированного состояния толстой пластины с круговым отверстием в условиях плоской деформации показывают, что при условии пластичности Треска учёт упругой сжимаемости оказывает влияние лишь на компоненту σ_z и деформированное состояние. Напряжения σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ в упругой и пластической областях и граница пластической зоны остаются теми же, что и без учёта упругой сжимаемости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 794 с.

[2] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 2. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.

[3] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

[4] Соколовский В. В. Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.

Листров Евгений Адольфович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, г. Воронеж

e-mail: ListrovEA@yandex.ru

Семыкина Татьяна Дмитриевна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: tdsem@mail.ru

E. A. Listrov, T. D. Semikina

USE OF THE METHOD OF PERTURBATIONS FOR THE ACCOUNT OF ELASTIC COMPRESSIBILITY

Voronezh State Agricultural University named after Emperor Peter I, Voronezh

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. The intense and strained condition of a thick plate with a circular orifice in conditions of a flat strain in view of elastic compressibility is observed{watched}.

Keywords: a condition of plasticity of the Crackling, a method of perturbations, elastic compressibility.

REFERENCES

[1] Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. The mathematical theory of plasticity. – M. : Fizmatlit, 2001. – 794 p. (in Russian)

[2] Ivlev D. D. Mechanics plastic media. Vol. 2. – M. : Fizmatlit, 2002. – 448 c. (in Russian)

[3] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. – M. : Nauka, 1978. – 208 p. (in Russian)

[4] Sokolovsky V. V. The theory of plasticity. – M. : High school, 1969. – 608 p. (in Russian)

Listrov, Evgenie Adolfovich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics and Theoretical Mechanics, Voronezh State Agricultural University named after Emperor Peter I, Voronezh

Semykina, Tatyana Dmitrievna,

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh