

Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов

КРУЧЕНИЕ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассмотрено кручение кусочно-неоднородных идеально-пластических цилиндрических стержней. Определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжения, построено поле характеристик. Кручение изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления, рассмотрено в [8], [10]. Кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней исследовано в [1], [8]. Кручение неоднородных призматических стержней в случае трансляционной анизотропии изучено в [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Ключевые слова: кручение, напряжение, предел текучести, предельное состояние.

УДК: 539.374

Рассмотрим цилиндрический стержень, ориентированный в прямоугольной декартовой системе координат xyz . Ось z направим параллельно образующей стержня. Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных ломаной линией AOB . Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M . Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Положим

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z &= \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ — нормальные и касательные напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям x, y, z .

Пусть напряженное состояние стержня в первой области характеризуется условием пластичности

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2, \tag{2}$$

во второй области

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2, \tag{3}$$

где $k_2 > k_1$ (рис. 1), и уравнением равновесия

Поступила 02.06.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Уравнение контура поперечного сечения стержня (рис. 1) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (5)$$

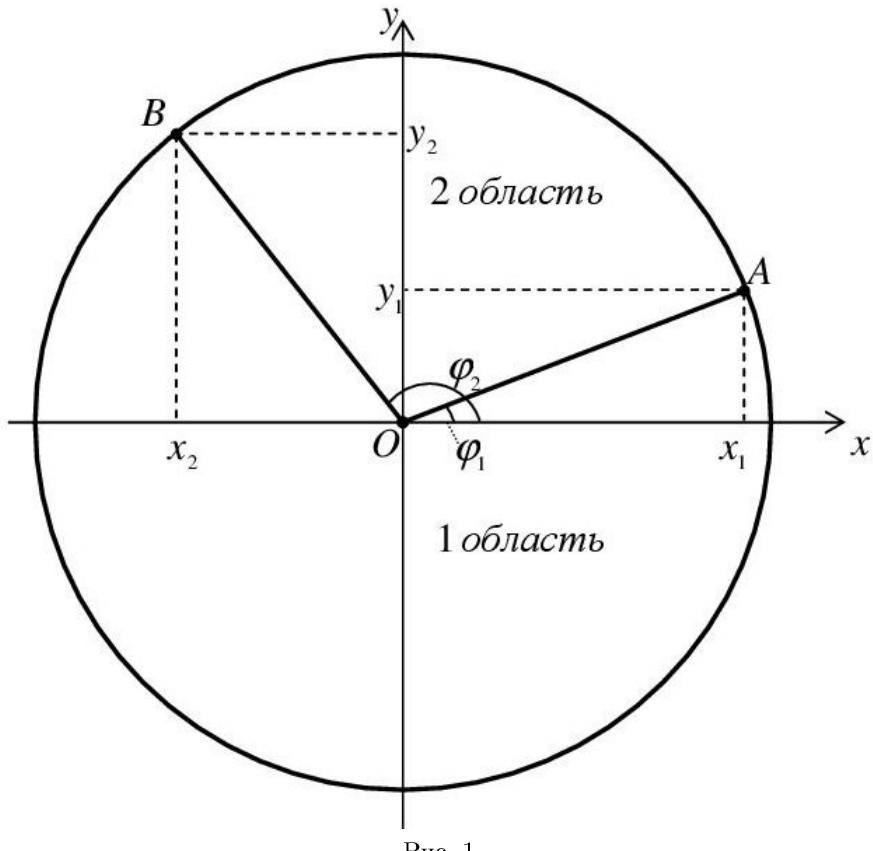


Рис. 1

Согласно [9] характеристики являются прямыми линиями, ортогональными вектору касательного напряжения $\bar{\tau}$, который направлен по касательной к контуру стержня и не меняется вдоль характеристики.

Пусть точка A имеет координаты (x_1, y_1) . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad (6)$$

где φ_1 — угол, образованный линией неоднородности OA с осью Ox .

Обозначим через φ_2 угол, образованный линией неоднородности OB с осью Ox . Предположим, что $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$.

Вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{11}$ (рис. 2), действующий на OA со стороны первой области, направлен по касательной к контуру и имеет координаты

$$\bar{\tau}_{11} = (-k_1 \sin \varphi_1, k_1 \cos \varphi_1). \quad (7)$$

Обозначим через \bar{n}_1 — вектор нормали к контуру стержня в точке A , определяемый в виде

$$\bar{n}_1 = (n_1 \cos \varphi_1, n_1 \sin \varphi_1), \quad (8)$$

где

$$n_1 = |\bar{n}_1| = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}. \quad (9)$$

В силу того, что линия неоднородности OA является линией разрыва напряжений, то со стороны второй области на отрезок OA действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}'_{12}$:

$$\bar{\tau}'_{12} = \bar{n}_1 + \bar{\tau}_{11} = (n_1 \cos \varphi_1 - k_1 \sin \varphi_1, n_1 \sin \varphi_1 + k_1 \cos \varphi_1). \quad (10)$$

Следовательно, из точки A выходит еще одна линия разрыва напряжений.

Пусть OM — характеристика, проходящая через произвольную точку $K(x, y)$ линии разрыва напряжений AC .

Вектор касательного напряжения, действующий вдоль характеристики OM , имеет вид

$$\bar{\tau}''_{12} = (-k_2 \sin \varphi, k_2 \cos \varphi), \quad (11)$$

где φ — угол, образованный характеристикой OM с осью Ox .

Тогда направляющий вектор линии разрыва напряжений AC в точке K примет вид

$$\bar{\tau}' = \bar{\tau}''_{12} - \bar{\tau}'_{12} = (-k_2 \sin \varphi - n_1 \cos \varphi_1 + k_1 \sin \varphi_1, k_2 \cos \varphi - n_1 \sin \varphi_1 - k_1 \cos \varphi_1). \quad (12)$$

Из (12) получим дифференциальное уравнение для определения линии разрыва напряжений AC :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a_1 \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b_1 \right) dy = 0, \quad (13)$$

где

$$\cos \varphi_1 = \frac{x_1}{R}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{y_1}{R}, \quad x_1^2 + y_1^2 = R^2, \quad (14)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (15)$$

$$a_1 = -\frac{n_1 y_1 + k_1 x_1}{k_2 R}, \quad b_1 = \frac{n_1 x_1 - k_1 y_1}{k_2 R}, \quad a_1^2 + b_1^2 = 1. \quad (16)$$

Из (13) следует, что уравнение линии разрыва напряжений AC примет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a_1(x - x_1) + b_1(y - y_1) = R. \quad (17)$$

Пусть

$$\sin \varphi_0 = -\frac{k_1}{k_2}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{n_1}{k_2}. \quad (18)$$

Перейдем к полярным координатам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (19)$$

Согласно (18), (19) из (17) получим уравнение линии разрыва напряжений AC в полярной системе координат

$$\rho = \frac{\bar{R}}{1 + \sin(\theta + \chi)} = \frac{R(1 + \sin(\varphi_1 + \chi))}{1 + \sin(\theta + \chi)}. \quad (20)$$

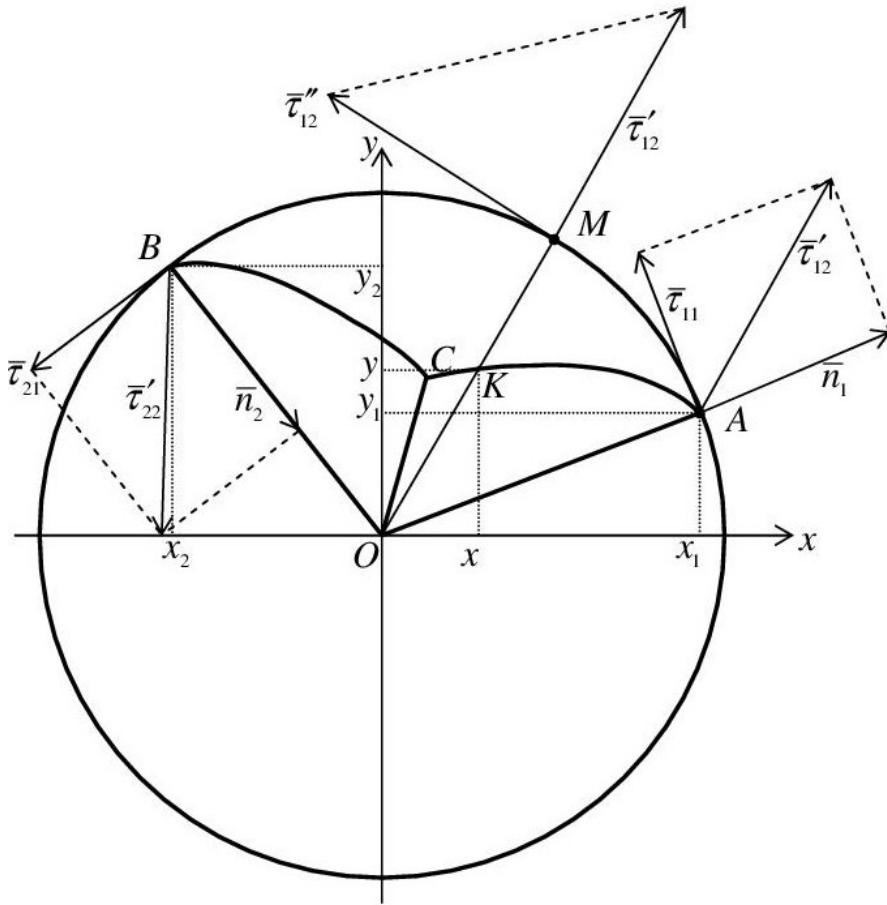


Рис. 2

где

$$\bar{R} = R + \sin \chi \cdot x_1 + \cos \chi \cdot y_1, \quad \chi = \varphi_0 - \varphi_1.$$

Пусть точка B имеет координаты (x_2, y_2) . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y_2}{x_2}, \quad (21)$$

где φ_2 — угол, образованный линией неоднородности OB с осью Ox .

Вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{21}$, действующий на OB со стороны первой области, направлен по касательной к контуру и имеет координаты

$$\bar{\tau}_{21} = (-k_1 \sin \varphi_2, k_1 \cos \varphi_2), \quad (22)$$

где $\varphi_2 < \pi$.

Обозначим через \bar{n}_2 — вектор нормали к контуру стержня в точке B , определяемый в виде

$$\bar{n}_2 = (-n_2 \cos \varphi_2, -n_2 \sin \varphi_2), \quad (23)$$

где

$$n_2 = |\bar{n}_2| = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}. \quad (24)$$

В силу того, что линия неоднородности OB является линией разрыва напряжений, то со стороны второй области на отрезок OB действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{*22}$:

$$\bar{\tau}_{*22} = \bar{n}_2 + \bar{\tau}_{21} = (-n_2 \cos \varphi_2 - k_1 \sin \varphi_2, -n_2 \sin \varphi_2 + k_1 \cos \varphi_2). \quad (25)$$

Следовательно, из точки B будет выходить еще одна линия разрыва напряжений.

Вектор касательного напряжения, действующий вдоль характеристики, имеет вид

$$\bar{\tau}_{22}'' = (-k_2 \sin \varphi, k_2 \cos \varphi). \quad (26)$$

Тогда направляющий вектор линии разрыва напряжений BC в точке (x, y) примет вид

$$\bar{\tau}'' = \bar{\tau}_{22}'' - \bar{\tau}_{22}' = (-k_2 \sin \varphi + n_2 \cos \varphi_2 + k_1 \sin \varphi_2, k_2 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi_2 - k_1 \cos \varphi_2). \quad (27)$$

Из (27) получим дифференциальное уравнение для определения линии разрыва напряжений BC :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a_2 \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b_2 \right) dy = 0. \quad (28)$$

где

$$\cos \varphi_2 = \frac{x_2}{R}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{y_2}{R}, \quad x_2^2 + y_2^2 = R^2, \quad (29)$$

$$a_2 = \frac{n_2 y_2 - k_1 x_2}{k_2 R}, \quad b_2 = -\frac{n_2 x_2 + k_1 y_2}{k_2 R}, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1. \quad (30)$$

Из (27) следует, что уравнение линии разрыва напряжений BC примет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a_2(x - x_2) + b_2(y - y_2) = R. \quad (31)$$

Пусть

$$\sin \tilde{\varphi}_0 = -\frac{k_1}{k_2}, \quad \cos \tilde{\varphi}_0 = -\frac{n_2}{k_2}. \quad (32)$$

Согласно (19), (32) из (31) получим уравнение линии разрыва напряжений BC в полярной системе координат

$$\rho = \frac{\tilde{R}}{1 + \sin(\theta + \tilde{\chi})} = \frac{R(1 + \sin(\varphi_2 + \tilde{\chi}))}{1 + \sin(\theta + \tilde{\chi})}. \quad (33)$$

где

$$\tilde{R} = R + \sin \tilde{\chi} \cdot x_2 + \cos \tilde{\chi} \cdot y_2, \quad \tilde{\chi} = \tilde{\varphi}_0 - \varphi_2.$$

На рис. 3 определено напряженное состояние цилиндрического стержня, разделенного на две области линиями неоднородности OA и OB при $k_2 > k_1$. Линии неоднородности OA и OB являются линиями разрыва напряжений. Кроме того из точек A и B выходят еще по одной линии разрыва напряжений, которые задаются соотношениями (17) и (31). Линия разрыва, исходящая из точек A и B пересекается в точке C . Линия разрыва OC образована векторами касательных напряжений $\bar{\tau}'_{12}$ и $\bar{\tau}'_{22}$. Координаты точки C удовлетворяют соотношениям (17) и (31).

На рис. 3 отображены векторы касательных напряжений, построены линии разрыва напряжений (линии изображены жирным контуром), в каждой области определено поле характеристик (характеристики изображены тонким контуром).

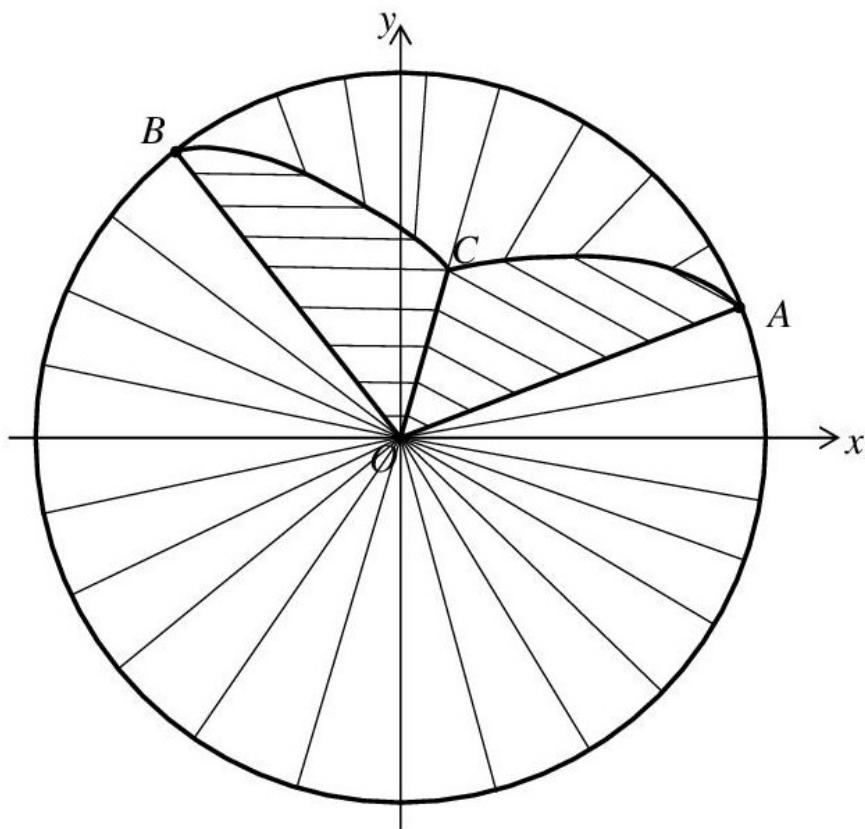


Рис. 3

Таким образом, в каждой области найдены векторы касательных напряжений, характеристики соотношений, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, и построены линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [2] Деревянных, Е. А. К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2014. – № 3 (21). – С. 105–111.
- [3] Деревянных, Е. А. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.
- [4] Деревянных, Е. А. О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении в случае трапециональной анизотропии / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 4 (14). – С. 174–184.

- [5] Деревянных, Е. А. О предельном состоянии кусочно-неоднородных анизотропных призматических стержней полигонального сечения при кручении / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 75–80.
- [6] Деревянных, Е. А. Предельное состояние анизотропных призматических кусочно-неоднородных стержней при кручении / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. - № 3 (13). – С. 72–80
- [7] Деревянных, Е. А. Предельное состояние анизотропных призматических стержней прямоугольного сечения при кручении / Е. А. Деревянных // Новый университет. Серия : Вопросы естественных наук – 2012. – №1 (7). – С. 15–18.
- [8] Ивлев, Д. Д. О соотношениях трансляционной идеально-пластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 576–579.
- [9] Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [10] Миронов, Б. Г. О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 98–101.
- [11] Митрофанова, Т. В. О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 601–609.

Деревянных Евгения Анатольевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

E. A. Derevyannih, B. G. Mironov

TORSION OF PIECEWISE AND NON-UNIFORM CYLINDRICAL CORES*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Abstract. In work torsion piecewise and non-uniform the idealnoplasticeskikh of cores is considered. The core tension is defined, lines of a rupture of tension are found, the field of characteristics is constructed. Torsion of isotropic cylindrical and prismatic cores in a case when the side surface of cores is free from tangent loadings, and also in a case when the side surface of a core is under the influence of external variable pressure, is considered in [8], [10]. Torsion of anisotropic cylindrical and prismatic cores is investigated in [1], [8]. Torsion of non-uniform prismatic cores in case of transmitting anisotropy is studied in [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Keywords: torsion, tension, fluidity limit, limiting condition.

REFERENCES

- [1] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p. (in Russian)
- [2] Derevyannih E. A., Mironov B. G. К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 3 (21). C. 105–111. (in Russian)
- [3] Derevyannih E. A., Mironov B. G. About the general ratios of the theory of torsion of anisotropic cores // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. № 4 (76). P. 108–112. (in Russian)
- [4] Derevyannih E. A. About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion in case of transmitting anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 4 (14). P. 174–184. (in Russian)
- [5] Derevyannih E. A. About a limit condition of piecewise and non-uniform anisotropic prismatic cores of polygonal section at torsion // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 1 (11). P. 75–80. (in Russian)
- [6] Derevyannih E. A. Limit condition of anisotropic prismatic piecewise and non-uniform cores at torsion // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 3 (13). P. 72–80. (in Russian)
- [7] Derevyannih E. A. Limit condition of anisotropic prismatic cores of rectangular section at torsion // New university. Series: Questions of natural sciences. 2012. № 1 (11). P. 15–18. (in Russian)
- [8] Ivlev D. D., Mironov B. G. On relations perfectly plastic anisotropy of translational torsional // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2010. № 2 (8). P. 576–579. (in Russian)
- [9] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. – M. : Nauka, 1966. 231 p. (in Russian)
- [10] Mironov B. G. Torsion of prismatic bars under the influence of pressure, varying linearly along a generator // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2006. № 1 (48). P. 98–101. (in Russian)
- [11] Mitrofanova T. V. About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2010. № 2 (8). Part 3. P. 601–609. (in Russian)

Derevyannih, Evgeniya Anatolevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Physics, Chuvash state agricultural Academy, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary