Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 166–172

Ю. В. Немировский

ДИНАМИКА КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ГИБРИДНЫХ ПЛИТ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ИШЛИНСКОГО-ИВЛЕВА

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск

Аннотация. Для слоистых осесимметричных полиметаллических плит из жестко-пластических материалов, подчиняющихся кусочно-линейному условию пластичности Ишлинского-Ивлева и ассоциированному с ним закону пластического деформирования рассмотрены задачи пластического деформирования при воздействии нагрузок взрывного типа. В качестве примеров рассмотрены задача изгиба шарнирно опертой на внешнем контуре кольцевой пластинки, свободной от нагрузок на внутреннем контуре и задача об изгибе сплошной шарнирно опертой круговой пластинки.

Ключевые слова: слоистые полиметаллические плиты, кусочно-линейное условие пластичности Ишлинского-Ивлева, ассоциированный закон пластического деформирования, сплошные и кольцевые плиты, динамические нагрузки взрывного типа, осесимметричное деформирование.

УДК: 539.374

Введение. Решение задач по определению повреждаемости круглых и кольцевых пластин при воздействии нагрузок "взрывного" типа проводилось многими исследователями [1]–[5]. Подробный анализ полученных результатов нашел отражение в обзорах [6], [7]. Следует отметить, что все эти решения были получены при использовании условия пластичности Треска, которое при плоском напряженном состоянии определяет внутреннюю шестиугольную аппроксимацию эллипса Мизеса. Наряду с этим может быть использована внешняя шестиугольная аппроксимация эллипса Мизеса, которая в литературе получила название условия пластичности Ишлинского-Ивлева. Решение динамических задач пластичности при этом условии не было получено и предлагается в данной работе. Будем рассматривать полиметаллические n-слойные пластины с попарно-симметричным относительно срединной (нейтральной) поверхности строением и предполагать, что каждый из составляющих материалов при пластическом деформировании удовлетворяет условию пластичности Ишлинского-Ивлева и соответствующего ему закона пластического течения.

Формулировка основных уравнений. Для i-го слоя законы пластичности и пластического деформирования в соответствии с рис. 1

описывается соотношениями:

$$a_i b_i \, (d_i e_i): \quad \begin{array}{l} \sigma_{1i} + \sigma_{2i} = \pm 2\sigma_{0i} \\ \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2 = 0, \;\; \pm\dot{\varepsilon}_1 > 0, \;\; \pm\dot{\varepsilon}_2 > 0 \end{array} \qquad (1)$$

Поступила 08.02.2015

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14-01-00102.

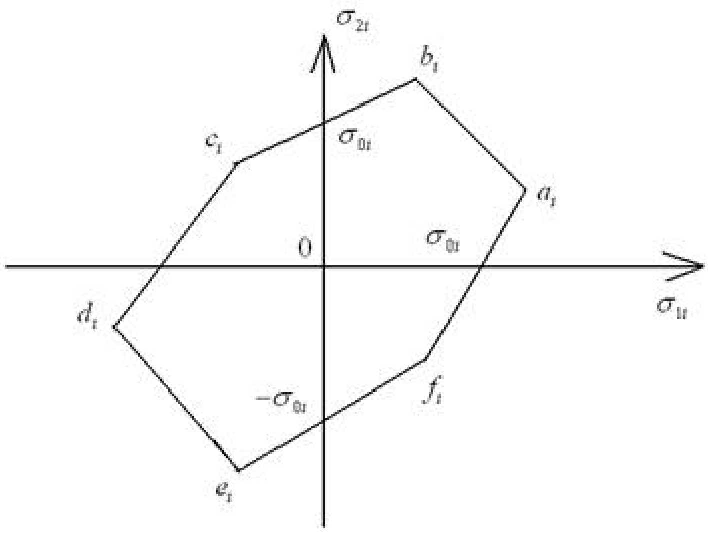

Рис. 1

$$b_i c_i\,(c_i f_i): \quad \begin{array}{l} 2\sigma_{0i} - \sigma_{1i} = \pm 2\sigma_{0i} \\ 2\dot\varepsilon_1 + \dot\varepsilon_2 = 0, \ \ \pm\dot\varepsilon_1 > 0, \ \ \pm\dot\varepsilon_2 > 0 \end{array} \tag{2}$$

$$c_i d_i\,(f_i a_i): \quad \begin{array}{l} \sigma_{2i} - 2\sigma_{1i} = \pm 2\sigma_{0i} \\ \dot\varepsilon_1 + 2\dot\varepsilon_2 = 0, \ \ \pm\dot\varepsilon_1 > 0, \ \ \pm\dot\varepsilon_2 > 0 \end{array} \tag{3}$$

Здесь σ_{2i}, σ_{1i} — безразмерные окружные и радиальные напряжения (отнесенные к характерному пределу текучести $\bar\sigma_0$), $\dot\varepsilon_1$, $\dot\varepsilon_2$ — радиальная и окружная скорости деформации, σ_{0i} — безразмерные пределы текучести.

Скорости деформирования связаны с безразмерным прогибом зависимостями

$$\dot\varepsilon_1 = -z\dot w'', \ \ \dot\varepsilon_2 = -\frac{z}{x}\dot w' \tag{4}$$

$$w = \frac{h_0^2}{R_0^2 t_0}\bar w, \ \ x = \frac{r}{R_0}; \ \ (...)' = \frac{\partial}{\partial x}(...), \quad (...)^\bullet = \frac{\partial}{\partial t}(...), \ \ t = \frac{\tau}{t_0}$$

где R_0, h_0, t_0 — обезразмеривающие параметры радиуса, толщины и времени.

Рассматривая далее слоистые попарно симметричные (относительно срединной поверхности) конструкции (рис. 2)

получим условие пластичности и закон пластического течения, сформулированные для обобщенных характеристик: изгибающих моментов

$$M_1 = 2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{h_{i-1}}^{h_i}\sigma_{1i} z\,dz, \ \ M_2 = 2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{h_{i-1}}^{h_i}\sigma_{2i} z\,dz \tag{5}$$

и скоростей изменения кривизны

$$\dot\kappa_1 = -\dot w'', \ \ \dot\kappa_2 = -\frac{1}{x}\dot w'' \tag{6}$$

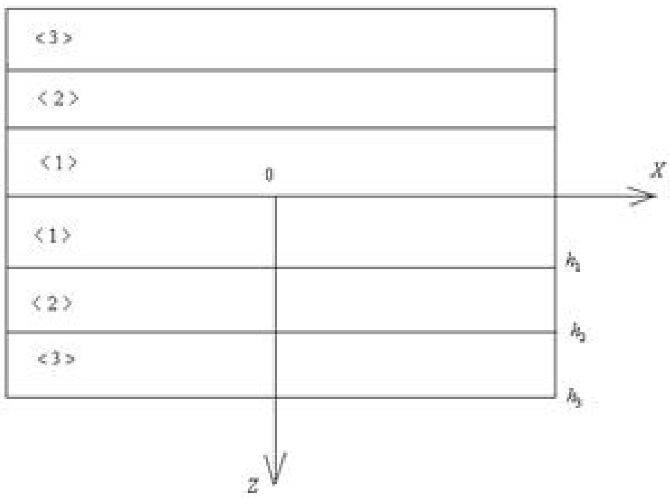

Рис. 2

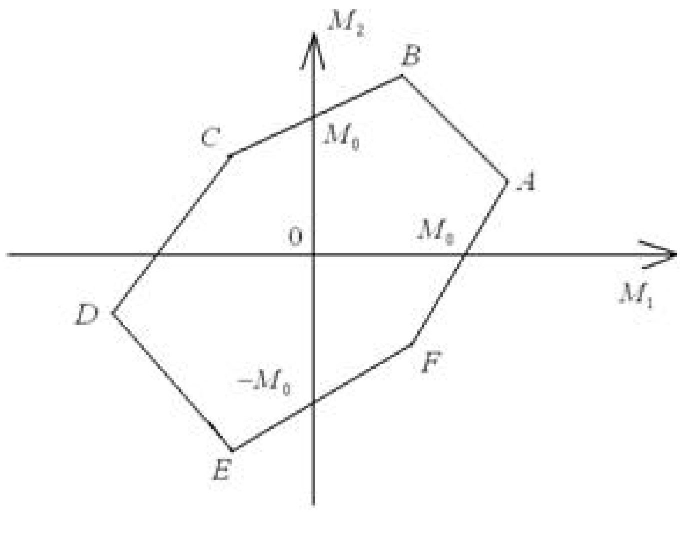

Рис. 3

В соответствии с рис. 3 будем иметь:

$$AB\,(DE): \quad M_1 + M_2 = \pm 2M_0, \ \left(\frac{2}{3}M_0 \le M_1 \le \frac{4}{3}M_0\right), \ \dot{\kappa}_1 - \dot{\kappa}_2 = 0, \ \pm\dot{\kappa}_1 > 0, \ \pm\dot{\kappa}_2 > 0 \quad (7)$$

$$BC\,(EF): \quad 2M_2 - M_1 = \pm 2M_0, \ \left(-\frac{2}{3}M_0 \le \pm M_1 \le \frac{2}{3}M_0\right), \ 2\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2 = 0, \ \pm\dot{\kappa}_1 < 0, \ \pm\dot{\kappa}_2 > 0 \quad (8)$$

$$CD\,(AF): \quad M_2 - 2M_1 = \pm 2M_0, \ \left(-\frac{4}{3}M_0 \le \pm M_1 \le -\frac{2}{3}M_0\right), \ \dot{\kappa}_1 + 2\dot{\kappa}_2 = 0, \ \pm\dot{\kappa}_1 < 0, \ \pm\dot{\kappa}_2 > 0 \tag{9}$$

Здесь

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{0i}\left(h_i^2 - h_{0i-1}^2\right). \tag{10}$$

Безразмерные уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} &(xQ)' - p\,(x,t) + m_1\ddot{w} = 0 \\ &(xM_1)' - M_2 = xQ \end{aligned} \tag{11}$$

Q — перерезывающая сила, $m_1 = m_1^0 \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i\delta_i$, $\delta_i = h_i - h_{i-1}$, $p\,(x,t) = p_1\,(x)\,p_2\,(t)$ — распределенная динамическая нагрузка $\rho_i = \dfrac{\bar{\rho}_i}{\rho_i^0}$ — безразмерный удельный вес материала i-го слоя. В дальнейшем, рассматривая распределенные нагрузки взрывного типа будем считать для определенности $p_1\,(x) = p_1^0 = const$, $p_2\,(t) = \exp\,(-\alpha t)$. Система уравнений (7)–(9), (11) определяет систему разрешающих уравнений рассматриваемых задач, решение которой должно быть получено при выполнении начальных условий

$$\dot{w}\,(x,0) = w\,(x,0) = 0 \tag{12}$$

и граничных условий, зависящих от формы пластинки и условий ее закрепления.

1. Кольцевая пластина с шарнирно-опертым наружным контуром и свободным внутренним контуром радиуса x_0. Рассмотрим шарнирно-опертую на наружном контуре кольцевую пластину со свободным внутренним контуром, нагруженную равномерно распределенным динамическим давлением взрывного типа. Граничные условия для такой пластинки имеют вид:

$$\begin{aligned} &w\,(1,t) = \dot{w}\,(1,t) = M_1\,(1,t) = 0 \\ &Q\,(x_0,t) = M_1\,(x_0,t) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

и динамический режим деформирования соответствует закономерностям (8). Следовательно

$$2\dot{w}'' + \frac{1}{x}\dot{w}' = 0.$$

Интегрируя это уравнение с учетом граничных условий (13) будем иметь

$$\dot{w} = \dot{C}_1\left(x^{-1/2} - 1\right), \ \ \ddot{w} = \ddot{C}_1\left(x^{-1/2} - 1\right). \tag{14}$$

Подставляя это выражение в уравнение (11) получим

$$xQ = p^0\,(x - x_0)\exp\,(-\alpha t) - m_1\ddot{C}_1\left(x^{1/2} - x_0^{1/2}\right)\left(2 - x^{1/2} - x_0^{1/2}\right),$$

$$M_2 = \frac{1}{2}M_1 + M_0, \tag{15}$$

$$(xM_1)' - \frac{1}{2x}\,(xM_1) = M_0 + xQ.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом граничных условий для $M_1\,(x,t)$ будем иметь

$$M_1(x,t) = x^{-3/2}\left[\int\limits_{x_0}^{x}[M_0 + xQ]\,x^{1/2}dx\right]. \tag{16}$$

Учитывая далее граничное условие $M(1,t) = 0$ для $\ddot{C}_1(t)$ получим уравнение

$$m_1\ddot{C}_1A_1 = p^0A_2\exp(-\alpha t) + M_0A_3, \tag{17}$$

$$A_1 = \int\limits_{x_0}^{1}\left(x^{1/2} - x_0^{1/2}\right)\left(2 - x^{1/2} - x_0^{1/2}\right)x^{1/2}dx,$$

$$A_2 = \int\limits_{x_0}^{1}(x - x_0)\,x^{1/2}dx, \quad A_3 = \int\limits_{x_0}^{1}x^{1/2}dx$$

Рассматривая последнее уравнение в пределе $t \to 0$ и полагая $\ddot{C}_1 = 0$ определим амплитуду предельной нагрузки

$$p_0^0 = -\frac{M_0A_3}{A_2}. \tag{18}$$

Динамическое деформирование пластинки будет происходить, когда амплитуда нагрузки по модулю будет превышать предельное значение (18). В этом случае интегрируя уравнение (17) при нулевых начальных условиях для скорости прогиба будем иметь выражение

$$\dot{C}_1 = -\frac{P_0A_2}{m_1A_1\alpha}\left[1 - \exp(-\alpha t)\right] + \frac{M_0A_3}{m_1A_1}t. \tag{19}$$

Остановка происходит в момент времени $t = t_*$, когда $\dot{C}_1(t_*) = 0$ и остаточный прогиб будет определяться величиной $C_1(t_*)$.

2. Сплошная шарнирно опертая пластинка под действием равномерно-распределенной взрывной нагрузки экспоненциального типа. В этом случае граничные условия задачи имеют вид:

$$w(1,t) = \dot{w}'(0,t) = M_1(1,t) = 0,$$

$$M_1(0,t) = M_2(0,t) = M_0, \; M_1(x_1,t) = \frac{3}{2}M_0, \tag{20}$$

$$[\dot{w}(x_1,t)] = [\dot{w}'(x_1,t)] = [M_1(x_1,t)] = 0$$

где [...] — скачек соответствующей величины при $x = x_1$. В соответствии с этими условиями решение задачи определяется режимом AB в области$0 \le x \le x_1$:

$$\dot{w}' = \dot{C}_3x, \; \dot{w} = \dot{C}_3\frac{x^2}{2} + \dot{C}_4, \; \ddot{w} = \ddot{C}_3\frac{x^2}{2} + \ddot{C}_4, \; M_2 = 2M_0 - M_1,$$

$$xQ = p_0x\exp(-\alpha t) - m_1x\left(\ddot{C}_3\frac{x^2}{6} + \ddot{C}_4\right), \tag{21}$$

$$M_1 = \exp(-2x)\left\{\int\limits_0^x\left[2M_0 + p_0x\exp(-\alpha_0t) - m_1x\left(\ddot{C}_3\frac{x^2}{6} + \ddot{C}_4\right)\right]\exp(2x)\,dx + M_0\right\},$$

и режимом BC в области $x_1 \leq x \leq 1$:

$$\dot{w} = \dot{C}_1 \left(x^{-1/2} - 1 \right), \ \ddot{w} = \ddot{C}_1 \left(x^{-1/2} - 1 \right), \ M_2 = \frac{1}{2} M_1 + M_0,$$

$$xQ = x_1 Q_1 + p_0 \left(x - x_1 \right) \exp\left(-\alpha t \right) - m_1 \ddot{C}_1 \int\limits_{x_1}^{x} \left(x^{-1/2} - 1 \right) dx,$$

$$x_1 Q_1 = p_0 x_1 \exp\left(-\alpha t \right) - m_1 x_1 \left(\ddot{C}_3 \frac{x_1^2}{6} + \ddot{C}_4 \right),$$

$$M_1 \left(x, t \right) = e^{\frac{1-x}{2}} \left[\int\limits_1^x \left(M_0 + xQ \right) e^{\frac{x-1}{2}} dx \right]$$

Для определения функций $C_1 \left(t \right)$, $C_3 \left(t \right)$, $C_4 \left(t \right)$, $x_1 \left(t \right)$ далее необходимо использовать условия непрерывности и граничные условия (20), а также начальные условия (12). Соответствующие преобразования и решения из-за ограниченности объема статьи опускаем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гопкинс Г., Праеер В. Динамика пластической круглой пластинки – Механика, Сб. пер. М, “Мир”, 1955, №3, с. 112-122

[2] Mroz Z. Plastic deformation of annular plates under dynamic loads, - Arch. Mech. Stogowanej,1958, v. 10, №4, p. 499-576

[3] Mazalov V. N., Nemirovsky Yu. V. Dynamical bending of rigid-plastic annular plates, - Jnt. J. Non-linaer Mech., 1976, v.11, p. 25-39

[4] Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961, 399с.

[5] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций, Новосибирск, Наука, 1984, 234с.

[6] Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамическая теория пластичности, Обзор ВИНИТИ, М., 1968, 112с.

[7] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций. В кн. Проблемы динамически-упругих пластических сред, М., Мир, 1975, с. 155-247

Немировский Юрий Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

`e-mail:` nemirov@itam.nsc.ru

Y. V. Nemirovsky

DYNAMICS OF CIRCULAR AND ANNULAR PLATES WITH HYBRID PLASTICITY CONDITION ISHLINSKII-IVLEV

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich SB RAS, Novosibirsk

Abstract. For axisymmetric layered polymetallic plates of rigid-plastic material obeying piecewise linear plasticity condition Ishlinskii-Ivlev and associative Acts considered the problem of plastic deformation plastic deformation when exposed to loads of explosive type. As examples, the bending problem hinged on the outer ring of the plate circuit, free of pressures on the domestic circuit and the problem of bending solid hinged circular plate.

Keywords: layered base metal plate, piecewise linear plasticity condition Ishlinskii-Ivlev, associated law plastic deformation, solid and annular plates, dynamic load of explosive type, axially symmetric deformation.

REFERENCES

[1] G. Hopkins, Pracer B. Dynamics plastic circular plate - Mechanics, Proc. per. M, "Mir 1955, №3, p. 112-122. (in Russian)

[2] Mroz Z. Plastic deformation of annular plates under dynamic loads, - Arch. Mech. Stogowanej, 1958, v. 10, №4, p. 499-576.

[3] Mazalov V. N., Nemirovsky Yu. V. Dynamical bending of rigid-plastic annular plates, - Jnt. J. Non-linaer Mech., 1976, v.11, p. 25-39.

[4] Rakhmatulin J. A., JA Dem'yanov Durability under intensive short-term loads. M .: Fizmatgiz, 1961, 399 p. (in Russian)

[5] K. L. Komarov, Nemirovsky Y. V. Dynamics of rigid-plastic structural elements, Novosibirsk, Nauka, 1984, 234 p. (in Russian)

[6] Reitman M. Shapiro G. S. Dynamic theory of plasticity Review VINITI, Moscow, 1968, 112 p. (in Russian)

[7] Mazalov V. N., Nemirovsky Y. V. The dynamics of thin-walled plastic construction. - In the book. Problems of dynamic elastic-plastic media, M., Mir, 1975, p. 155-247. (in Russian)

Nemirovsky, Yuri Vladimirovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk