Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 177–179

Г. Е. Чекмарев

УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ПРИ УСЛОВИИ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. Упрочнение является одним из основных свойств металлов, которое характеризует влияние пластического деформирования на механическое поведение среды. В данной работе приведен вывод условия пластичности для общей задачи осесимметрического деформирования тел.

Ключевые слова: пластичность, деформирование, осевая симметрия.

УДК: 539.313:517.968.72

Введем в рассмотрение составной тензор $S_{ij} = \sigma_{ij} - s_{ij}$, где S_{ij} — компоненты тензора активных напряжений, σ_{ij} — компоненты тензора действительных напряжений, $s_{ij} = ce_{ij}$ — тензор внутренних напряжений, e_{ij} — компоненты тензора деформаций, c — коэффициент упрочнения материала.

Условие пластичности может быть записано [1] через главные направления тензора активных напряжений S_{ij} в виде

$$S_1 = S_2, \;\; S_3 = S_1 + 2k \tag{1}$$

Для изотропного материала главные направления тензоров σ_{ij} и e_{ij} совпадают.

Так как $S_1 + S_2 + S_3 = 3\sigma + 3ce = 3S_1 + 2k$, то $S_1 = \sigma - ce - 2k/3$,
где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \quad e = (e_1 + e_2 + e_3)/3$.

Представим тензор S_{ij} в виде суммы двух тензоров $S_1 \cdot \delta_{ij}$ и $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. В главных направлениях ранг матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ равен единице.

Преобразование тензора при переходе от одной системы координат к другой представляется в виде

$$T^* = A^{-1}TA.$$

Известно [2], что при умножении матрицы на любую невырожденную матрицу ее ранг не изменяется. Из этого факта непосредственно вытекает, что ранг матрицы составного тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ равен единице в любой декартовой системе координат. Следовательно, все миноры второго порядка матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ равны нулю. В силу симметрии составного тензора из (1) получим следующие равенства:

$(\sigma_x - \sigma + ce - ce_x + 2k/3) \cdot (\sigma_y - \sigma + ce - ce_y + 2k/3) = (\tau_{xy} - ce_{xy})^2$,(x,y,z)

$(\sigma_x - \sigma + ce - ce_x + 2k/3) \cdot (\tau_{yz} - ce_{yz}) = (\tau_{xy} - ce_{xy}) \cdot (\tau_{\text{ня}} - ce_{xz})$,(x,y,z) (2)

где (x, y, z) обозначает круговую перестановку индексов. В цилиндрических координатах условие (2) примет вид:

Поступила 12.05.2015

$(\sigma_\rho - \sigma + ce - ce_\rho + 2k/3) \cdot (\sigma_\vartheta - \sigma + ce - ce_\vartheta + 2k/3) = (\tau_{\rho z} - ce_{\rho z})^2\,(\rho,\theta,\mathrm{z})$
$(\sigma_\upsilon - \sigma + ce - ce_\rho + 2k/3) \cdot (\tau_{\vartheta я} - \mathrm{c}e_{\vartheta z}) = (\tau_{\rho\vartheta} - ce_{\rho\vartheta}) \cdot (\tau_я - \mathrm{c}e_{\rho z})\,,(\rho,\theta,\mathrm{z})$ (3)

В случае осесимметричной задачи при $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\,(\rho, z)$, $e_{ij} = e_{ij}\,(\rho, z)$, $\tau_{\rho\vartheta} = \tau_{\rho z} = 0$, $e_{\rho\vartheta} = e_{\rho z} = 0$ из шести уравнений (3) линейно-независимыми будут лишь два соотношения:

$$(\sigma_\rho - \sigma + ce - ce_\rho + 2k/3) \cdot (\sigma_z - \sigma + ce - ce_z + 2k/3) = (\tau_{\rho z} - ce_{\rho z})^2 \qquad (2)$$

$\sigma_\vartheta - \sigma + ce - ce_\vartheta + 2k/3 = 0(5)$,
да и то при выполнении условия $\sigma_z - \sigma + ce - ce_z + 2k/3 \neq 0$.

Из уравнения (5) σ и σ_θможно выразить следующим образом

$$\sigma = ce + \frac{1}{2}\left[(\sigma_\rho + \sigma_z) - c\,(e_\rho + e_z)\right] - \frac{1}{3}k \qquad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + \frac{3}{2}c\,(c_\theta - c) - k$$

Подставив равенство (3) в равенство (2) мы получим искомое условие пластичности

$$\left[(\sigma_\rho - \sigma_z) - \mathrm{c} \cdot (e_\rho - e_z)\right]^2 + 4\,(\tau_{\rho z} - ce_{\rho z})^2 = 4k^2,$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + \frac{3}{2}c\,(e_\theta - e) - k = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\rho + \sigma_z) - n(e_\rho + e_z)\right] + ce_\theta - k$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.

[2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1966, 576 с.

Чекмарев Георгий Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: SmitheE71@yandex.ru

G. E. Chekmarev

CONDITIONS FOR THE PROBLEM OF PLASTICITY DEFORMATION HARDENING OF BODIES MATERIAL PROVIDED AXIAL SYMMETRY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. Hardening is one of the basic properties of metals, which characterizes the influence of plastic deformation on the mechanical behavior of the medium. In this paper, we derive the conditions of plasticity to the general problem of axially symmetric deformation of bodies.

Keywords: plasticity deformation, the axial symmetry.

REFERENCES

[1] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p. (in Russian)

[2] Gantmakher F. R. Matrix theory. – M. : Nauka, 1966, 576 p. (in Russian)

Chekmarev, Georgy Evgenyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary