Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 180–184

Л. А. Максимова

О СЖАТИИ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ХИЛЛА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассматривается предельное состояние идеальнопластического анизотропного пространственного слоя, сжатого параллельными жесткими шероховатыми плитами. Предположим, что пространственный слой толщины $2h$ параллелен оси Ox и сдавливается параллельными шероховатыми плитами вдоль оси Oz.

Ключевые слова: сжатие, слой, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Постановка задачи. Рассмотрим слой из идеально жесткопластического материала толщиной 2h. Оси x,y декартовой системы координат расположим в срединной плоскости слоя, ось z направим ортогонально срединой плоскости. Уравнение поверхности слоя запишем в виде

$$z = \pm h, \quad |z| \le h \tag{1}$$

Условие пластичности запишем в виде [1]

$$F\left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + G\left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + H\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \tag{2}$$

где σ_x, $\tau_{xy}\ldots$ – компоненты напряжения, F,G,. . . ..-постоянные, характеризующие свойства анизотропии материала.

Условие пластичности (2) переходит в условие пластичности Мизеса при условии

$$L = M = N = 3F = 3G = 3H \tag{3}$$

Если направить напряжения σ_1, σ_2, σ_3 вдоль осей координат x,y,z , то условие пластичности (2) примет вид

$$F\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + G\left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2 + H\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 = 1 \tag{4}$$

Обозначим через X предел текучести при растяжении вдоль первого главного напряжения

$$\sigma_1 = X, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{5}$$

И соотношений (4),(5) и аналогичных им получим

$$1/X^2 = G + H \quad (F, G, H; X, Y, Z) \tag{6}$$

(Y,Z пределы текучести при растяжении вдоль главных осей анизотропии).

Из соотношений (6) следует

Поступила 08.06.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 15-41-02453)

$$2F = 1/Y^2 + 1/Z^2 - 1/X^2 \quad (F, G, H; X, Y, Z) \tag{7}$$

Следуя Хиллу [1], обозначим через R,S,T пределы текучести при сдвиге по отношению к главным осям анизотропии. Согласно условию (2) получим

$$2L = 1/R^2 \quad (L, M, N; R, S, T) \tag{8}$$

Из ассоциированного закона течения, согласно условию (2), будем иметь

$$\varepsilon_x = \lambda \left[H\left(\sigma_x - \sigma_y\right) + G\left(\sigma_x - \sigma_z\right)\right], \quad \varepsilon_{xy} = \lambda N \tau_{xy}, \quad (x, y, z; F, G, H; L, M, N) \tag{9}$$

Где λ - неопределенный множитель Лагранжа ($\lambda \geq 0$), $\varepsilon_x, \varepsilon_{xy} \ldots$- компоненты скорости деформации.

Из (9) следует, что имеет место условие несжимаемости (u, v, w -компоненты скорости перемещения)

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} u &= px + q_1 y + u_1(z) \\ v &= p_1 x + qy + v_1(z) \\ w &= mz \end{aligned} \tag{11}$$

где $p, q, \ldots$ константы

Из (11) имеем

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = p, \quad 2\varepsilon_{xy} = q_1 + p_1, \\ &\varepsilon_y = q, \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{dv_1}{dz}, \\ &\varepsilon_z = m, \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{du_1}{dz} \end{aligned} \tag{12}$$

Из (10), (12), получим

$$p + q + m = 0 \tag{13}$$

Соотношения (11)-(13) определяют характер деформирования плиты.

Припишем индекс штрих наверху компонентам девиатора напряжений.

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma, \quad (x, y, z) \quad \sigma = 1/3\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) \tag{14}$$

Согласно (9), (10),(13), (14), будем иметь

$$H\left(\sigma'_x - \sigma'_y\right) + G\left(\sigma'_x - \sigma'_z\right) = p/\lambda, \quad (x, y, z; F, G, H; L, M, N) \tag{15}$$

Присоединяя к условиям (15) соотношение

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \tag{16}$$

Из (15),(16) получим

$$\begin{aligned} &\sigma'_x = \Delta_x / 3\lambda\Delta, \quad \Delta_x = 2pF - qG - mH, \quad (x, y, z; F, G, H; L, M, N) \\ &\Delta = FG + HG + HF \end{aligned} \tag{17}$$

Из (9),(10),(12), также получим

$$\tau_{xy} = \frac{p_1 + q_1}{2\lambda N}, \quad \tau_{xz} = \frac{1}{2\lambda M}\frac{du_1}{dz}, \quad \tau_{yz} = \frac{1}{2\lambda L}\frac{dv_1}{dz} \tag{18}$$

Аналогично [2]. Предположим

$$\tau_{xz} = az + c_1, \quad \tau_{yz} = bz + c_2, \quad a, b, c_1, c_2 - const \tag{19}$$

Из (2), (14), (17), (18) получим выражение для неопределенного множителя Лагранжа....

$$\begin{aligned} &1/\lambda = \sqrt{P\left(1 - 2M\tau_{xz}^2 - 2L\tau_{yz}^2\right)} \\ &1/P = \left\{F\left(qG - mH\right)^2 + G\left(mH - pF\right)^2 + H\left(pF - qG\right)^2\right\}\Big/\Delta^2 + \left(p_1 + q_1\right)^2\Big/2N \end{aligned} \tag{20}$$

Согласно (19), (20) величина λ... является функцией z, таким образом, компоненты девиатора напряжений (17),(18) также являются функциями z.

Из (18),(19),(20) найдем

$$u_1 = 2M\int\left(az + c_1\right)\lambda dz, \quad v_1 = 2L\int\left(bz + c_2\right)\lambda dz \tag{21}$$

Из (14), (17), (19) и из уравнений равновесия получим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + a = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} + b = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_z'}{\partial z} = 0, \tag{22}$$

Из (22) следует

$$\sigma = -ax - by + C - \sigma_z', \quad \sigma_z = -ax - by + C \tag{23}$$

Согласно (23) сдавливающее напряжение σ_z не зависит от толщины слоя и линейно изменяются относительно xy.

Из (23) следует

$$grad\sigma_z = -ai - bj \tag{24}$$

где i,j –единичные орты вдоль осей x,y

Выражение (24) перепишем в виде

$$grad\sigma_z = -\sqrt{a^2 + b^2}\left(\cos\varphi i + \sin\varphi j\right), \quad tg\varphi = b/a \tag{25}$$

Согласно (25), плоскость (23) имеет скат по направлению вектора $grad\sigma_z$....

Рассмотрим определение параметров a,b в зависимости от характера касательных контактных усилий на сдавливающих плитах.

Введем вектор

$$T = \tau_{xz}i + \tau_{yz}j \tag{26}$$

Припишем индекс плюс наверху компонентам вектора (26) на верхней стороне слоя при z=h, индекс минус наверху компонентам при z=-h. Согласно (26),(19) будем иметь

$$\begin{aligned} T^+ &= \left(ah + c_1\right)i + \left(bh + c_2\right)j, \quad z = h \\ T^- &= \left(-ah + c_1\right)i + \left(-bh + c_2\right)j, \quad z = -h \end{aligned} \tag{27}$$

Предположим, что касательное усилие T достигает предельных значений на верхней и нижней сторонах плиты: $|T^+| = K^+$ при z=h, $\varphi = \varphi^+$, а аналогично на нижней стороне.

$$K^+ = \left[\left(ah + c_1\right)^2 + \left(bh + c_2\right)^2\right]^{1/2} = \sqrt{2}RS\Big/\sqrt{(R^2 + S^2) + (R^2 - S^2)\cos^2\varphi^+}, \quad tg\varphi^+ = \frac{bh + c_2}{ah + c_1} \tag{28}$$

$$a = \frac{1}{2h}\left(\frac{K^+}{\sqrt{1 + tg^2\varphi^+}} - \frac{K^-}{\sqrt{1 + tg^2\varphi^-}}\right) \tag{29}$$

Из (14), (17), (20), (23), следует, что компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ определены с точностью до неопределенной постоянной C.

Обратимся к определению постоянной интегрирования C, входящей в соотношения, определяющие величины $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (25) Рассматриваемое решение, вполне аналогичное решению Прандтля для плоской задачи, является асимптотическим. Краевые условия могут быть удовлетворены приближенно. Предположим, что в некоторой точке на свободном крае плиты осредненное по толщине значения усилия, нормальное к краю плиты равно нулю.

Нормальное напряжение σ_n имеет вид

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \tag{30}$$

Где α — угол, образуемый нормально к контуру с осью x

Из (14);(17);(19);(23) найдем

$$C = ax_0 + by_0 - \frac{1}{2h}\left((pF\cos^2\alpha + qG\sin^2\alpha - mH)/\Delta + (p_1 + q_1)\sin 2\alpha/2N\right)\int\limits_{-h}^{h}\frac{dz}{\lambda(z)} \tag{31}$$

Согласно (11),(12),(17), (31), константа C зависит от величин p, q, m, p_1, q_1, a, b характеризующих деформированное состояние материала. Таким образом, согласно (14), (17), (23), (31) сдавливающее напряжение σ_z зависит от характера деформирования

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. : ГИТТЛ, 1956. 408 с.

[2] Максимова Л. А. О предельном состоянии слоя, сжатого шероховатыми плитами // ПММ. Т. 64. Вып 6. 2000. С. 1057–1062.

[3] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М, :ГИТТЛ 1956, С. 324.

Максимова Людмила Анатольевна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

`e-mail:` maximova_ng@mail.ru

L. A. Maximova

BEND OF A RECTANGULAR PLATE WITH THE FREE LONGITUDINAL EDGES AT WHICH END FACES THE GENERALIZED TRANSVERSAL FORCES AND MOMENTS OF DEFLECTION ARE SET. PRECISE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. In the work the stress-strained state of layer from the perfectly plastic anisotropic material, compressed by flat parallel rough plates, is examined. The properties of material are described by the condition of Hill's plasticity 1, generalizing plasticity conditions of Mizisa. The case of noncollinear contact efforts for rigid surfaces is examined. It is shown that the effort of pressing depends on the parameters, which determine the nature of the deformation of plate.

Keywords: ideal plasticity, anisotropy, rough plates, stress, deformation.

REFERENCES

[1] Hill R. Mathematical theory of plasticity. M. : GITTL, 1956. 408 s. (in Russian)

[2] Maximova L. A. On the limiting condition of the layer, compressed by rough plates // PMM. 2000. Vol. 64. Issue 6. s. 1057 1062. (in Russian)

[3] Kachanov L. M. Bases of the theory of plasticity. M. : GITTL, 1956. s. 324. (in Russian)

Maximova, Ludmila Anatolevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary