

Ю. В. Немировский¹, А. В. Станиславович²

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ И РАСПОЛОЖЕНИЯ АРМИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТОВ

¹*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

²*Кемеровский государственный университет (КемГУ), г. Кемерово, Россия*

Аннотация. Рассматривается структурная математическая модель теплопроводности однонаправленного армированного слоя, в рамках которой построены эффективные теплофизические и механические характеристики волокнистых композитов. Существенно новым элементом предлагаемой модели является проведение процедуры осреднения теплового потока по представительному объему двухкомпонентного композитного материала в соответствии с законом Рихмана о теплообмене, происходящем между телами, находящимися в соприкосновении, а не на основе правила простых смесей, как это обычно принято. В рамках выбранного подхода рассматриваются различные варианты армирующего волокна, имеющие различную форму в поперечном сечении (параллелограмм, равнобедренный треугольник, правильный шести- и восьмиугольник). Произведена аппроксимация круглого в сечении армирующего волокна вписанными и описанными вокруг окружности многоугольниками. Произведено сравнение расчетных значений коэффициента теплопроводности с характеристиками некоторых композитных материалов.

Ключевые слова: теплопроводность, структурная модель, волокнистый композит, армированные среды.

УДК: 536.21

Введение. Во многих областях современной техники – авиационной, ракетной, судостроительной, в энергетическом и химическом машиностроении – широко используются тонкостенные элементы композитных конструкций типа слоисто-волокнистых стержней, пластин и оболочек. Во многих случаях в энергетических установках, реактивных двигателях, аэрокосмической технике и в охлаждающих установках такие элементы работают в условиях высоко- или низкотемпературных нестационарных

© Немировский Ю. В., Станиславович А. В., 2015

Немировский Юрий Николаевич

e-mail: ncmirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия.

Станиславович Алексей Вячеславович

e-mail: alexey.st@bk.ru, аспирант, Кемеровский государственный университет (КемГУ), г. Кемерово, Россия.

Поступила 02.10.2015

воздействий, приводящих к возникновению тепловых напряжений, знание величины и характера которых необходимо для всестороннего анализа предельной несущей способности конструкций. Тепловые напряжения как сами по себе, так и в сочетании с механическими напряжениями от внешних нагрузок могут вызывать появление трещин в элементах конструкций из хрупких материалов, возникновение и развитие пластических деформаций и деформаций ползучести, приводящих к полному или прогрессирующему разрушению или к предельному состоянию термовыпучивания. Современные технологии создания композитных конструкций позволяют в широком диапазоне изменять их внутреннюю структуру за счет изменения топологии фазовых материалов в конструкции и формы фазовых материалов. Эти изменения могут приводить к существенным изменениям интегральных характеристик тепловых полей и создавать управляемые конструкции требуемого качества. Решение таких проблем является важнейшей задачей современного проектирования композитных конструкций, и в данной статье рассматривается один из подходов к ее реализации.

1. Структурная модель теплопроводности однонаправлено армированного слоя. Изложение структурной модели теплопроводности однонаправлено армированных волокнистых композитов здесь соответствует материалам монографий [1], [2], а также статей [3], [4]. Принимаются следующие допущения [1]–[9]:

1. Число армирующих волокон достаточно велико, поэтому полиармированный слой можно считать макроскопически квазизнородным анизотропным телом [1]–[4].

2. Материал полиармированного слоя получен путем внедрения в однородное и изотропное связующее регулярной сети однонаправленных трансверсально изотропных волокон. Причем главная ось анизотропии совпадет с направлением армирования. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры в обеих фазах композиции подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье [10], [11], а связь между осредненными по представительному объему вектором теплового потока и температурой – закону теплопроводности Фурье для анизотропной среды [10]:

$$\Theta_n = -\lambda_n \nabla T_n, \Theta_i = -\Lambda_{ij} \nabla_j T, \quad (1.1)$$

где Θ_n , λ_n , T_n – вектор теплового потока, коэффициент линейной теплопроводности и температура связующего ($n = \langle c \rangle$) и арматуры ($n = \langle a \rangle$) соответственно, Λ – тензор интегральных коэффициентов теплопроводности, ∇ – оператор Гамильтона.

3. Градиенты внешних силовых и тепловых полей «не слишком велики». Поэтому изменением характеристик теплового поля в пределах представительного объема можно пренебречь [3], [4].

4. На границе между связующим и арматурой реализуются условия идеального теплового контакта.

5. Осреднение температуры и вектора плотности теплового потока по представительному объему двухкомпонентного композитного материала выполняется в соответствии с законом Г. В. Рихмана [12], [13]:

$$T = \frac{c_1 m_1}{c_1 m_1 + c_2 m_2} T_1 + \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} T_2, \Theta = \frac{c_1 m_1}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \Theta_1 + \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \Theta_2. \quad (1.2)$$

Здесь T , Θ – конечная температура и осредненный тепловой поток двух соприкасающихся тел, c_1 , m_1 , T_1 , Θ_1 , c_2 , m_2 , T_2 , Θ_2 – удельная массовая теплоемкость, масса, температура, тепловой поток для первого и второго тел соответственно.

Величины, относящиеся к связующему, будем отмечать индексом «с», к арматуре – индексом «а».

1.1 Армирующие волокна параллелограммного сечения. Рассмотрим однонаправленно армированный слой, армирующее волокно в котором имеет в поперечном сечении форму параллелограмма.

Формулами

$$\omega = d/l, \quad \omega_z = \delta/h$$

(рис. 1) вводим параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω), по его высоте (ω_z) и угол φ – угол KMG на рис. 1. Оси прямоугольной декартовой системы координат $x^1, x^2, x^3 = z$ направим, как показано на рис. 1.

Прямоугольником $EFGHE'F'G'H'$ (рис. 1) выделим из представительного элемента армированной среды параллелепипед. Этот параллелепипед, содержащий армирующее волокно назовем представительным элементом армирующего слоя. Сначала найдем его осредненные характеристики [4].

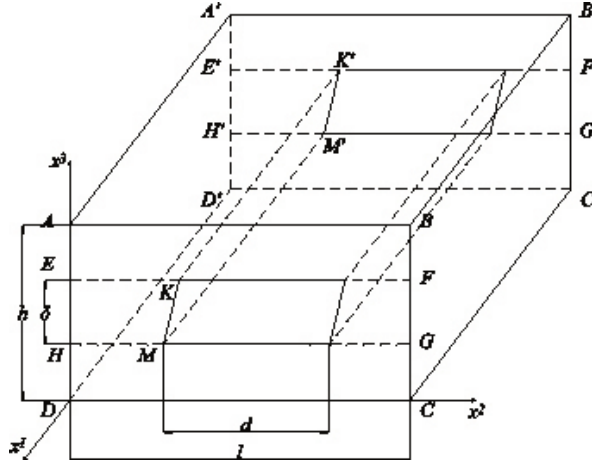


Рис. 1. Представительный элемент армированного слоя. Армирующее волокно имеет форму параллелограмма в сечении

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности армированной среды. Приведенную объемную плотность $\langle \rho \rangle$, массовую $\langle c_{em} \rangle$ и объемную $\langle c_\varepsilon \rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам [4]:

$$\langle \rho \rangle = \omega \rho_a + (1 - \omega) \rho_c, \quad (2.1.1)$$

$$\langle c_{em} \rangle = \frac{\omega \rho_a}{\langle \rho \rangle} c_{em}^a + \frac{(1 - \omega) \rho_c}{\langle \rho \rangle} c_{em}^c, \quad \langle c_\varepsilon \rangle = \omega \rho_a c_{em}^a + (1 - \omega) \rho_c c_{em}^c. \quad (2.1.2)$$

Здесь и далее в параграфе в угловых скобках – величины, осредненные по объему представительного элемента армирующего слоя, $\rho_n, c_\varepsilon^n, c_{em}^n$ – объемная плотность, удельная объемная и массовая теплоемкость арматуры ($n = \langle a \rangle$) и связующего ($n = \langle c \rangle$) соответственно.

Используя характеристики (2.1.2) из (1.2), выводим:

$$\nabla \langle T \rangle = \bar{\omega} \nabla T_a + (1 - \bar{\omega}) \nabla T_c, \quad \langle \Theta \rangle = \bar{\omega} \Theta_a + (1 - \bar{\omega}) \Theta_c, \quad \bar{\omega} = \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \quad (2.1.3)$$

Записывая (2.1.3) в скалярной форме и учитывая (1.1), получаем зависимости:

$$\nabla_i \langle T \rangle = \bar{\omega} \nabla_i T_a + (1 - \bar{\omega}) \nabla_i T_c \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1.4)$$

$$\langle \Theta_1 \rangle = -[\bar{\omega} \lambda_{a1} \nabla_1 T_a + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c \nabla_1 T_c], \quad \langle \Theta_i \rangle = -[\bar{\omega} \lambda_{a2} \nabla_i T_a + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c \nabla_i T_c]. \quad (2.1.5)$$

Здесь λ_{a1} , λ_{a2} — коэффициенты линейной теплопроводности арматуры в продольном и поперечном направлениях соответственно.

В силу допущения 2 имеем:

$$\langle \Theta_i \rangle = -\langle \Lambda_{ij} \rangle \nabla_j \langle T \rangle. \quad (2.1.6)$$

Здесь $\langle \Lambda \rangle$ — неизвестный тензор интегральных коэффициентов теплопроводности армирующего слоя. Для его определения необходимо найти линейную зависимость величин $\langle \Theta_i \rangle$ в (2.1.5) от $\nabla_i \langle T \rangle$ в (2.1.4).

В силу допущения 4 на поверхности Γ раздела фаз арматуры и связующего выполнены условия идеального контакта по температуре [14], [15]:

$$T_a = T_c, \quad \lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial n} = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial n}. \quad (2.1.7)$$

Здесь n — вектор единичной нормали к поверхности.

Обозначим

$$l_1 = \cos \varphi, l_2 = \sin \varphi, l = \{0; l_1; l_2\}, n = \{0; -l_2; l_1\}.$$

Здесь l — направляющий вектор прямой, содержащей отрезок MK (рис. 1).

Дифференцируя обе части первого из равенств (2.1.7) по \hat{x}^1 , а также по направлению вектора l , приходим к соотношениям:

$$\nabla_1 T_a = \nabla_1 T_c, \quad l_1 \nabla_2 T_a + l_2 \nabla_3 T_a = l_1 \nabla_2 T_c + l_2 \nabla_3 T_c,$$

$$\lambda_a (-l_2 \nabla_2 T_a + l_1 \nabla_3 T_a) = \lambda_c (-l_2 \nabla_2 T_c + l_1 \nabla_3 T_c). \quad (2.1.8)$$

Зависимости (2.1.4), (2.1.8) вместе составляют систему шести линейных алгебраических уравнений для определения шести величин $\nabla_1 T_a, \nabla_2 T_a, \nabla_3 T_a, \nabla_1 T_c, \nabla_2 T_c, \nabla_3 T_c$.

Решив систему (2.1.4), (2.1.8), получаем:

$$\nabla_1 T_c = \nabla_1 T_a = \nabla_1 \langle T \rangle, \quad I_1 = \bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2},$$

$$\nabla_2 T_a = [(1 - \bar{\omega}) (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \bar{\omega} \lambda_c] I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + [(1 - \bar{\omega}) l_1 l_2 (\lambda_{a2} - \lambda_c)] I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle,$$

$$\nabla_2 T_c = [\bar{\omega} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}] I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + [\bar{\omega} l_1 l_2 (\lambda_c - \lambda_{a2})] I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle,$$

$$\nabla_3 T_a = [(1 - \bar{\omega}) l_1 l_2 (\lambda_{a2} - \lambda_c)] I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + [(1 - \bar{\omega}) (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \bar{\omega} \lambda_c] I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle,$$

$$\nabla_3 T_c = [\bar{\omega} l_1 l_2 (\lambda_c - \lambda_{a2})] I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + [\bar{\omega} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}] I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle. \quad (2.1.9)$$

Подставляя (2.1.9) в (2.1.5), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned}
\langle \Theta_1 \rangle &= -[\bar{\omega}\lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega})\lambda_c] \nabla_1 \langle T \rangle, \\
B &= \lambda_{a2}\lambda_c (\bar{\omega}^2 + (1 - \bar{\omega})^2), \\
\langle \Theta_2 \rangle &= -\left[(\bar{\omega}(1 - \bar{\omega})(\lambda_{a2}(l_1^2\lambda_{a2} + l_2^2\lambda_c) + \lambda_c(l_1^2\lambda_c + l_2^2\lambda_{a2})) + B) I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + \right. \\
&\quad \left. + (l_1 l_2 \bar{\omega}(1 - \bar{\omega})(\lambda_{a2} - \lambda_c)^2) I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle \right], \\
\langle \Theta_3 \rangle &= -\left[(l_1 l_2 \bar{\omega}(1 - \bar{\omega})(\lambda_{a2} - \lambda_c)^2) I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + \right. \\
&\quad \left. + (B + \bar{\omega}(1 - \bar{\omega})(\lambda_{a2}(l_1^2\lambda_c + l_2^2\lambda_{a2}) + \lambda_c(l_1^2\lambda_{a2} + l_2^2\lambda_c))) I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle \right]. \quad (2.1.10)
\end{aligned}$$

Сравнивая (2.1.10) с (2.1.6), находим:

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_{11} \rangle &= \bar{\omega}\lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega})\lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12} \rangle = \langle \Lambda_{13} \rangle = \langle \Lambda_{21} \rangle = \langle \Lambda_{31} \rangle = 0, \\
\langle \Lambda_{22} \rangle &= [\bar{\omega}(1 - \bar{\omega})(\lambda_{a2}(l_1^2\lambda_{a2} + l_2^2\lambda_c) + \lambda_c(l_1^2\lambda_c + l_2^2\lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\
\langle \Lambda_{23} \rangle &= \langle \Lambda_{32} \rangle = [l_1 l_2 \bar{\omega}(1 - \bar{\omega})(\lambda_{a2} - \lambda_c)^2] I_1^{-1},
\end{aligned}$$

$$\langle \Lambda_{33} \rangle = [\bar{\omega}(1 - \bar{\omega})(\lambda_{a2}(l_1^2\lambda_c + l_2^2\lambda_{a2}) + \lambda_c(l_1^2\lambda_{a2} + l_2^2\lambda_c)) + B] I_1^{-1}. \quad (2.1.11)$$

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности представительного элемента армированного слоя. В силу допущений 1, 2 считаем, что квазиоднородный анизотропный материал элементарного армирующего слоя подчиняется закону Фурье для анизотропных сред (2.1.6), (2.1.11), а материал прослоек связующего, дополняющего этот параллелепипед до представительного элемента армированного слоя, подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье (1.1).

Приведенную объемную плотность, массовую $\langle\langle c_{\varepsilon m} \rangle\rangle$ и объемную $\langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армированного слоя определим по формулам:

$$\langle\langle \rho \rangle\rangle = \omega_z \langle \rho \rangle + (1 - \omega_z) \rho_c, \quad (2.1.12)$$

$$\langle\langle c_{\varepsilon m} \rangle\rangle = \frac{\omega_z \langle \rho \rangle}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} \langle c_{\varepsilon m} \rangle + \frac{(1 - \omega_z) \rho_c}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} c_{\varepsilon m}^c, \quad \langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle = \omega_z \langle \rho \rangle \langle c_{\varepsilon m} \rangle + (1 - \omega_z) \rho_c c_{\varepsilon m}^c. \quad (2.1.13)$$

Здесь и далее в параграфе в двойных угловых скобках – величины, осредненные по объему представительного элемента армированного слоя.

Из соотношений (1.2), с учетом (1.1), (2.1.6), (2.1.11), следует:

$$\nabla_i \langle\langle T \rangle\rangle = \bar{\omega}_z \nabla_i \langle T \rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \nabla_i T_c, \quad \bar{\omega}_z = \frac{\langle c_{\varepsilon} \rangle}{\langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle} \omega_z, \quad (2.1.14)$$

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = -[\bar{\omega}_z (\langle \Lambda_{ij} \rangle \nabla_j \langle T \rangle) + (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c \nabla_i T_c] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1.15)$$

В силу допущения 2 имеем:

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = -\hat{\Lambda}_{ij} \nabla_j \langle\langle T \rangle\rangle. \quad (2.1.16)$$

Здесь $\hat{\Lambda}$ – тензор интегральных коэффициентов теплопроводности армированного слоя. Для его определения, как и выше, необходимо найти линейную зависимость величин $\langle\langle\Theta_i\rangle\rangle$ от $\nabla_i\langle\langle T\rangle\rangle$.

В силу допущения 4 на поверхности Γ раздела фаз арматуры и связующего выполнены условия идеального контакта по температуре [14], [15]:

$$\langle T \rangle = T_c, \quad \lambda_a \nabla_3 \langle T \rangle = \lambda_c \nabla_3 T_c. \quad (2.1.17)$$

Направление нормали совпадает с направлением оси $O\hat{x}^3$. Дифференцируя обе части первого из равенств (2.1.17) по переменным \hat{x}^1, \hat{x}^2 , приходим к следующим соотношениям:

$$\nabla_1 \langle T \rangle = \nabla_1 T_c, \quad \nabla_2 \langle T \rangle = \nabla_2 T_c, \quad \lambda_a \nabla_3 \langle T \rangle = \lambda_c \nabla_3 T_c. \quad (2.1.18)$$

Зависимости (2.1.14), (2.1.18) вместе составляют систему шести линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных величин $\nabla_1 \langle T \rangle, \nabla_2 \langle T \rangle, \nabla_3 \langle T \rangle, \nabla_1 T_A, \nabla_2 T_A, \nabla_3 T_A$.

Решив эту систему, приходим к зависимостям:

$$\begin{aligned} \nabla_1 T_c &= \nabla_1 \langle T \rangle = \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle, \quad \nabla_2 T_c = \nabla_2 \langle T \rangle = \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle, \\ \nabla_3 \langle T \rangle &= \lambda_c I_2^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle, \quad \nabla_3 T_c = \langle\Lambda_{33}\rangle I_2^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle, \quad I_2 = \bar{\omega}_z \lambda_c + (1 - \bar{\omega}_z) \langle\Lambda_{33}\rangle. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Подставляя (2.1.19) в (2.1.15) получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle\Theta_1\rangle\rangle &= -[\bar{\omega}\bar{\omega}_z\lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}\bar{\omega}_z)\lambda_c] \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle, \\ \langle\langle\Theta_2\rangle\rangle &= -[(\bar{\omega}_z \langle\Lambda_{22}\rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c) \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle + \bar{\omega}_z \langle\Lambda_{23}\rangle \lambda_c I_2^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle], \\ \langle\langle\Theta_3\rangle\rangle &= -[\bar{\omega}_z \langle\Lambda_{32}\rangle \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle + \lambda_c \langle\Lambda_{33}\rangle I_2^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle]. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Сравнивая (2.1.20) с (2.1.16), находим:

$$\hat{\Lambda}_{11} = \bar{\omega}\bar{\omega}_z\lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}\bar{\omega}_z)\lambda_c, \quad \hat{\Lambda}_{22} = \bar{\omega}_z \langle\Lambda_{22}\rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c, \quad \hat{\Lambda}_{32} = \bar{\omega}_z \langle\Lambda_{32}\rangle,$$

$$\hat{\Lambda}_{23} = \bar{\omega}_z \langle\Lambda_{23}\rangle \lambda_c I_2^{-1}, \quad \hat{\Lambda}_{33} = \lambda_c \langle\Lambda_{33}\rangle I_2^{-1}, \quad \hat{\Lambda}_{12} = \hat{\Lambda}_{13} = \hat{\Lambda}_{21} = \hat{\Lambda}_{31} = 0. \quad (2.1.21)$$

Формулами (2.1.21) компоненты тензора теплопроводности определены во вспомогательной декартовой системе координат $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 = z$, направление оси $O\hat{x}^1$ которой совпадает с направлением армирования. Отметим, что в результате предельного перехода

$$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

соотношения (2.1.21) сводятся к виду:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{11} &= \bar{\omega}\bar{\omega}_z\lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}\bar{\omega}_z)\lambda_c, \quad \hat{\Lambda}_{22} = \lambda_c (\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)\lambda_c + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z))\lambda_{a2}) I_1^{-1}, \\ \hat{\Lambda}_{33} &= \lambda_c \frac{\bar{\omega}\lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega})\lambda_c}{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)\lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z))\lambda_c}, \quad \hat{\Lambda}_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j). \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Соотношения (2.1.22) для компонент тензора интегральных коэффициентов теплопроводности получены в [2], [4] для случая прямоугольного сечения армирующего волокна.

1.2 Армирующие волокна треугольного сечения. Рассмотрим однонаправленно армированный слой, армирующее волокно в котором имеет в поперечном сечении форму равнобедренного треугольника.

Формулами

$$\omega = d/2l, \quad \omega_z = \delta/h$$

(рис. 2) вводим параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω), по его высоте (ω_z) и угол φ (угол NMP на рис. 2). Оси прямоугольной декартовой системы координат $x^1, x^2, x^3 = z$ направим, как показано на рис. 2.

Плоскостями $EFF'E', GHH'G'$ выделим из представительного элемента армированной среды параллелепипед. Этот параллелепипед, содержащий армирующее волокно, назовем представительным элементом армирующего слоя и найдем его осредненные характеристики по схеме [4].

Параллелепипед $EFF'E'GHH'G'$ в свою очередь разобьем плоскостью $NPP'N'$ на две части и рассмотрим отдельно средние характеристики каждой из них. Сначала рассмотрим параллелепипед $ENPHE'N'P'H'$.

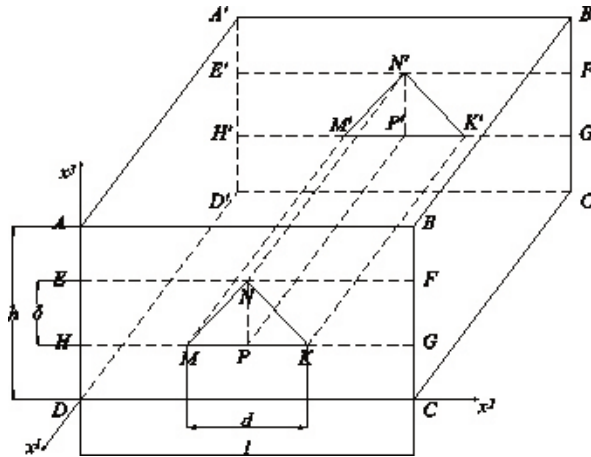


Рис. 2. Армирующее волокно треугольного сечения

Приведенную объемную плотность $\langle \rho^I \rangle$, массовую $\langle c_{\varepsilon m}^I \rangle$ и объемную $\langle c_{\varepsilon}^I \rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам [4]:

$$\langle \rho^I \rangle = \omega \rho_a + (1 - \omega) \rho_c, \quad (2.2.1)$$

$$\langle c_{\varepsilon m}^I \rangle = \frac{\omega \rho_a}{\langle \rho \rangle} c_{\varepsilon m}^a + \frac{(1 - \omega) \rho_c}{\langle \rho \rangle} c_{\varepsilon m}^c, \quad \langle c_{\varepsilon}^I \rangle = \omega \rho_a c_{\varepsilon m}^a + (1 - \omega) \rho_c c_{\varepsilon m}^c. \quad (2.2.2)$$

Здесь и далее в параграфе в угловых скобках – величины, осредненные по объему представительного элемента армирующего слоя. Верхний индекс у осредненных величин будет указывать на принадлежность к параллелепипеду $ENPHE'N'P'H'$ ($k = \langle I \rangle$) или $NFGPN'F'G'P'$ ($k = \langle II \rangle$), если верхний индекс отсутствует, то это указывает, что осредненная величина относится ко всему представительному элементу армирующего слоя (параллелепипед $EFGE'F'G'H'$).

Повторяя рассуждения (2.1.3)–(2.1.11), получаем выражения для компонент тензора интегральных коэффициентов теплопроводности:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{11}^I \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12}^I \rangle = \langle \Lambda_{13}^I \rangle = \langle \Lambda_{21}^I \rangle = \langle \Lambda_{31}^I \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^I \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^I \rangle &= \langle \Lambda_{32}^I \rangle = l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^I \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}.\end{aligned}\quad (2.2.3)$$

Рассмотрим параллелепипед $NFGPN'F'G'P'$.

Приведенную объемную плотность $\langle \rho^{II} \rangle$, массовую $\langle c_{\varepsilon m}^{II} \rangle$ и объемную $\langle c_{\varepsilon}^{II} \rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам, аналогичным (2.2.1), (2.2.2):

$$\langle \rho^{II} \rangle = \omega \rho_a + (1 - \omega) \rho_c, \quad (2.2.4)$$

$$\langle c_{\varepsilon m}^{II} \rangle = \frac{\omega \rho_a}{\langle \rho \rangle} c_{\varepsilon m}^a + \frac{(1 - \omega) \rho_c}{\langle \rho \rangle} c_{\varepsilon m}^c, \quad \langle c_{\varepsilon}^{II} \rangle = \omega \rho_a c_{\varepsilon m}^a + (1 - \omega) \rho_c c_{\varepsilon m}^c. \quad (2.2.5)$$

Прямая, содержащая отрезок NK , составляет с осью $O\hat{x}^2$ угол $\varphi_2 = \pi - \varphi$ (рис. 2). Обозначим

$$l_3 = \cos \varphi_2, \quad l_4 = \sin \varphi_2, \quad l = \{0; l_3; l_4\} = \{0; -l_1; l_2\}, \quad n = \{0; -l_4; l_3\} = \{0; -l_2; -l_1\}.$$

Здесь l – направляющий вектор прямой, содержащий отрезок NK , а n – нормальный вектор этой прямой.

Повторяя рассуждения (2.1.3)–(2.1.11) почти дословно, приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{11}^{II} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{II} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{II} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{II} \rangle = \frac{-l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}}, \\ \langle \Lambda_{33}^{II} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}.\end{aligned}\quad (2.2.6)$$

Легко заметить, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{11}^I \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{II} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^I \rangle = \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle, \quad \langle \Lambda_{33}^I \rangle = \langle \Lambda_{33}^{II} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^I \rangle &= \langle \Lambda_{32}^I \rangle = -\langle \Lambda_{23}^{II} \rangle = -\langle \Lambda_{32}^{II} \rangle.\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

Рассмотрим теперь параллелепипед $EFGHE'F'G'H'$, представляющий представительный элемент армирующего слоя и пайдем его осредненные характеристики.

Приведенную объемную плотность $\langle \rho \rangle$, массовую $\langle c_{\varepsilon m} \rangle$ и объемную $\langle c_{\varepsilon} \rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам, аналогичным (2.2.1), (2.2.2):

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} (\langle \rho^I \rangle + \langle \rho^{II} \rangle), \quad (2.2.8)$$

$$\langle c_{\varepsilon m} \rangle = \frac{1}{2 \langle \rho \rangle} (\langle \rho^I \rangle \langle c_{\varepsilon m}^I \rangle + \langle \rho^{II} \rangle \langle c_{\varepsilon m}^{II} \rangle), \quad \langle c_{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \rho^I \rangle \langle c_{\varepsilon}^I \rangle + \langle \rho^{II} \rangle \langle c_{\varepsilon}^{II} \rangle). \quad (2.2.9)$$

Используя характеристики (2.2.9) из (1.2), выводим:

$$\nabla_i \langle T \rangle = \bar{\omega} \nabla_i \langle T^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \nabla_i \langle T^{II} \rangle, \quad (2.2.10)$$

$$\langle \Theta_i \rangle = - [\bar{\omega} \langle \Theta_i^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Theta_i^{II} \rangle] \quad (i = 1, 2, 3), \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_{\varepsilon}^I \rangle}{\langle c_{\varepsilon} \rangle}. \quad (2.2.11)$$

В силу допущения 2 имеем:

$$\langle \Theta_i \rangle = - \langle \Lambda_{ij} \rangle \nabla_j \langle T \rangle. \quad (2.2.12)$$

Здесь $\langle \Lambda \rangle$ – неизвестный тензор интегральных коэффициентов теплопроводности армирующего слоя. Для его определения необходимо найти линейную зависимость величин $\langle \Theta_i \rangle$ в (2.2.11) от $\nabla_i \langle T \rangle$ в (2.2.10).

В силу допущения 4 на поверхности Γ раздела фаз арматуры и связующего выполнены условия идеального контакта по температуре [14], [15]:

$$\langle T^I \rangle = \langle T^{II} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^I \rangle \nabla_2 \langle T^I \rangle = \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle \nabla_2 \langle T^{II} \rangle, \quad (2.2.13)$$

направление нормали совпадает с направлением оси $O\hat{x}^2$.

Дифференцируя обе части первого из равенств (2.2.13) по \hat{x}^1, \hat{x}^3 , получаем:

$$\nabla_1 \langle T^I \rangle = \nabla_1 \langle T^{II} \rangle, \quad \nabla_3 \langle T^I \rangle = \nabla_3 \langle T^{II} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^I \rangle \nabla_2 \langle T^I \rangle = \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle \nabla_2 \langle T^{II} \rangle. \quad (2.2.14)$$

Зависимости (2.2.10), (2.2.14) вместе составляют систему шести линейных алгебраических уравнений. Решив эту систему, получаем:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \langle T^I \rangle &= \nabla_1 \langle T^{II} \rangle = \nabla_1 \langle T \rangle, \quad \nabla_3 \langle T^I \rangle = \nabla_3 \langle T^{II} \rangle = \nabla_3 \langle T \rangle, \\ \nabla_2 \langle T^I \rangle &= \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle I_3^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle, \quad \nabla_2 \langle T^{II} \rangle = \langle \Lambda_{22}^I \rangle I_3^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle, \quad I_3 = \bar{\omega} \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{22}^I \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Подставляя (2.2.15) в (2.2.11), приходим к соотношениям:

$$\langle \Theta_1 \rangle = - [\bar{\omega} \langle \Lambda_{11}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{11}^{II} \rangle] \nabla_1 \langle T \rangle, \quad I_3 = \bar{\omega} \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{22}^I \rangle,$$

$$\langle \Theta_2 \rangle = - [\langle \Lambda_{22}^I \rangle \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle I_3^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + (\bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{II} \rangle) \nabla_3 \langle T \rangle],$$

$$\langle \Theta_3 \rangle = - [(\bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^I \rangle \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{II} \rangle \langle \Lambda_{22}^I \rangle) I_3^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle +$$

$$(\bar{\omega} \langle \Lambda_{33}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{33}^{II} \rangle) \nabla_3 \langle T \rangle]. \quad (2.2.16)$$

Сравнивая (2.2.16) с (2.2.12) и учитывая (2.2.7), находим:

$$\langle \Lambda_{11} \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{11}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{11}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{11}^I \rangle, \langle \Lambda_{12} \rangle = \langle \Lambda_{13} \rangle = \langle \Lambda_{21} \rangle = \langle \Lambda_{31} \rangle = 0,$$

$$\langle \Lambda_{22} \rangle = \langle \Lambda_{22}^I \rangle \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle I_3^{-1} = \langle \Lambda_{22}^I \rangle, \langle \Lambda_{23} \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{II} \rangle,$$

$$\langle \Lambda_{33} \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{33}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{33}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{33}^I \rangle,$$

$$\langle \Lambda_{32} \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{II} \rangle. \quad (2.2.17)$$

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности представительного элемента армированного слоя. В силу допущений 1, 2 считаем, что квазиоднородный анизотропный материал элементарного армирующего слоя подчиняется закону Фурье для анизотропных сред (2.2.12), (2.2.17), а материал прослоек связующего, дополняющего этот параллелепипед до представительного элемента армированного слоя ($ABCD A'B'C'D'$), подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье (1.1).

Повторяя почти дословно рассуждения (2.1.12)–(2.1.21), получаем:

$$\langle \langle \Lambda_{11} \rangle \rangle = \bar{\omega} \bar{\omega}_z \langle \Lambda_{11} \rangle + (1 - \bar{\omega} \bar{\omega}_z) \lambda_c, \langle \Lambda_{12} \rangle = \langle \Lambda_{13} \rangle = \langle \Lambda_{21} \rangle = \langle \Lambda_{31} \rangle = 0,$$

$$\langle \langle \Lambda_{22} \rangle \rangle = \bar{\omega}_z \langle \Lambda_{22}^I \rangle \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle I_3^{-1} + (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c, \langle \langle \Lambda_{23} \rangle \rangle = \bar{\omega}_z \lambda_c \langle \Lambda_{23} \rangle I_2^{-1},$$

$$\langle \langle \Lambda_{33} \rangle \rangle = \lambda_c \langle \Lambda_{33} \rangle I_2^{-1}, \langle \langle \Lambda_{32} \rangle \rangle = \bar{\omega}_z \langle \Lambda_{32} \rangle. \quad (2.2.18)$$

1.3 Армирующие волокна шестиугольного сечения. Рассмотрим однонаправленно армированный слой, армирующее волокно в котором имеет в поперечном сечении форму правильного шестиугольника.

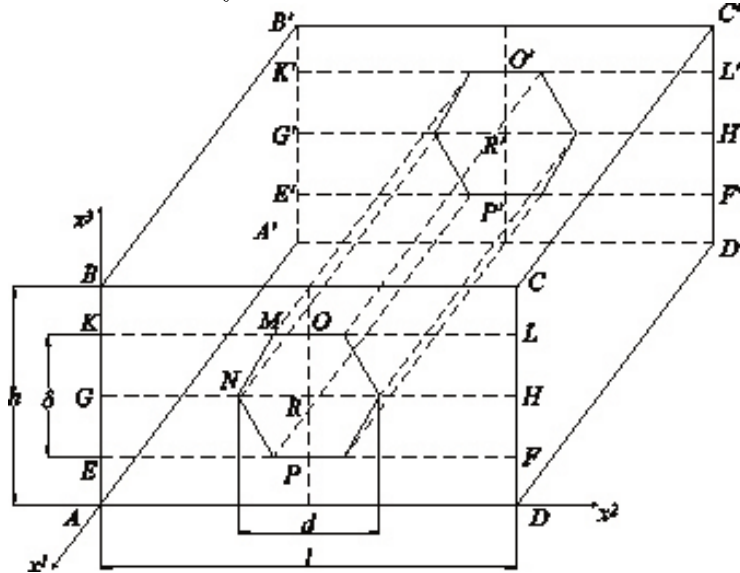


Рис. 3. Армирующее волокно шестиугольного сечения

Формулами

$$\omega = d/l, \quad \omega_z = \delta/h$$

вводим параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω), по его высоте (ω_z) и угол $\varphi = \pi/3$ (угол MNR на рис. 3). Оси прямоугольной декартовой системы координат $x^1, x^2, x^3 = z$ направим, как показано на рис. 3. Представительный элемент армирующего слоя (параллелепипед $EFLKE'F'L'K'$) разделим на 2 части и рассмотрим отдельно характеристики каждой их них.

Аналогично рассмотренному выше случаю треугольного сечения разделим параллелепипед $KLHGK'L'H'G'$ плоскостью $OPP'O'$ и найдем средние характеристики каждого из получившихся параллелепипедов отдельно.

Рассмотрим параллелепипед $KORGK'O'R'G'$. Величины, относящиеся к этой области, будем обозначать индексом «1a».

Повторяя рассуждения (2.1.1)–(2.1.11), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{10} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{10} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{10} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{10} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{10} \rangle = l_1 l_2 \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{10} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \bar{\omega} &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Рассмотрим параллелепипед $OLHRO'L'H'R'$. Величины, относящиеся к этой области, будем обозначать индексом «1b».

Повторяя рассуждения (2.2.4)–(2.2.6), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{1b} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{1b} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{1b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle = -l_1 l_2 \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{1b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \bar{\omega} &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Легко заметить, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{1a} \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{1b} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^{1a} \rangle = \langle \Lambda_{22}^{1b} \rangle, \quad \langle \Lambda_{33}^{1a} \rangle = \langle \Lambda_{33}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^{1a} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{1a} \rangle = -\langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle = -\langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Рассмотрим теперь параллелепипед $KLHGK'L'H'G$ и найдем его осредненные характеристики.

Повторяя рассуждения (2.2.8)–(2.2.17), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^1 \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{1a} \rangle, \langle \Lambda_{22}^1 \rangle = \langle \Lambda_{22}^{1a} \rangle, \langle \Lambda_{33}^1 \rangle = \langle \Lambda_{33}^{1a} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^1 \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^{1a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle, \langle \Lambda_{32}^1 \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^{1a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{12}^1 \rangle &= \langle \Lambda_{13}^1 \rangle = \langle \Lambda_{21}^1 \rangle = \langle \Lambda_{31}^1 \rangle = 0, \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_\varepsilon^I \rangle}{\langle c_\varepsilon \rangle}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Область $GHFEG'H'F'E'$ аналогична рассмотренной выше области $KLHGK'L'H'G'$. Поэтому приведем только основные получившиеся формулы. Разделим параллелепипед $GHFEG'H'F'E'$ плоскостью $OPP'O'$. Величины, относящиеся к этим областям $GRPEG'R'P'E'$ и $RHFPR'H'F'P'$, будем обозначать индексами «2a» и «2b» соответственно и найдем средние характеристики каждого из получившихся параллелепипедов отдельно.

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{2a} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{12}^{2a} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{2a} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{2a} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{2a} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{2a} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) + \lambda_c \left((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) \right) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{2a} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{2a} \rangle = -l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{2a} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) + \lambda_c \left((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) \right) + B \right] I_1^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{2b} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{12}^{2b} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{2b} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{2b} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{2b} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{2b} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left(l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) + \lambda_c \left(l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) \right) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{2b} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left(l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) + \lambda_c \left(l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) \right) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{2b} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{2b} \rangle = l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \bar{\omega} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^2 \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{2a} \rangle, \langle \Lambda_{22}^2 \rangle = \langle \Lambda_{22}^{2a} \rangle, \langle \Lambda_{33}^2 \rangle = \langle \Lambda_{33}^{2a} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^2 \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^{2a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{2b} \rangle, \langle \Lambda_{32}^2 \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^{2a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{2b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{12}^2 \rangle &= \langle \Lambda_{13}^2 \rangle = \langle \Lambda_{21}^2 \rangle = \langle \Lambda_{31}^2 \rangle = 0, \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_\varepsilon^I \rangle}{\langle c_\varepsilon \rangle}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Переходим к определению компонент тензора липейной теплопроводности представительного элемента армированного слоя (параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$ на рис. 4). Процесс осреднения аналогичен (2.2.8)–(2.2.18).

Во многих случаях мы имеем дело с многослойными слоистыми конструкциями. Поэтому необходимо рассмотреть случай нескольких тел. Формулы (1.2), для случая N тел преобразуются следующим образом [12]:

$$T = \sum_i \left[\left(\sum_j c_j m_j \right)^{-1} c_i m_i T_i \right], \Theta = \sum_i \left[\left(\sum_j c_j m_j \right)^{-1} c_i m_i \Theta_i \right]. \quad (2.3.8)$$

Здесь c_i , m_i , T_i , Θ_i – удельная массовая теплоемкость, масса, температура, вектор плотности теплового потока для i -го тела соответственно. Здесь и далее (если не указаны пределы суммирования) суммирование ведется от единицы до 3.

Для определения эффективных коэффициентов теплопроводности необходимо установить связь между осредненным тепловым потоком $\langle\langle \Theta \rangle\rangle$ и градиентом осредненной температуры $\nabla \langle\langle T \rangle\rangle$.

Приведенную объемную плотность $\langle\langle \rho \rangle\rangle$ определяем по формуле, аналогичной (2.1.1):

$$\langle\langle \rho \rangle\rangle = \sum_i \Omega_i \langle \rho \rangle^{(i)}. \quad (2.3.9)$$

Здесь $\Omega_i = \frac{h_i}{h}$ – удельная толщина i -й области, h_i – толщина i -й области, $\langle \rho \rangle^{(i)}$ – осредненная объемная плотность i -й области. Здесь и далее в угловых скобках с индексом сверху будем обозначать величины, осредненные по объему i -й области, а в двойных угловых скобках без индекса – величины, осредненные по всему представительному элементу армированного слоя. Областью с номером «3» обозначим прослойку связующего ($BCLKB'C'L'K'$ и $EFDAE'F'D'A'$). Отметим, что:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{\omega_z}{2}, \Omega_3 = 1 - \omega_z.$$

Приведенную массовую $\langle\langle c_{\varepsilon m} \rangle\rangle$ и объемную $\langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle$ теплоемкости найдем по формулам:

$$\langle\langle c_{\varepsilon m} \rangle\rangle = \frac{1}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} \sum_i \Omega_i \langle \rho \rangle^{(i)} \langle c_{\varepsilon m} \rangle^{(i)}, \langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle = \sum_i \Omega_i \langle \rho \rangle^{(i)} \langle c_{\varepsilon m} \rangle^{(i)}. \quad (2.3.10)$$

Из выражений (2.3.8), использованных для осреднения температуры и вектора плотности теплового потока для нескольких слоев, с учетом характеристик (2.3.10) и закона теплопроводности Фурье (1.1), получим:

$$\nabla_i \langle\langle T \rangle\rangle = \sum_j \bar{\Omega}_j \nabla_i \langle T \rangle^{(j)}, \bar{\Omega}_i = \frac{\langle c_{\varepsilon} \rangle^{(i)}}{\langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle} \Omega_i, \quad (2.3.11)$$

$$\langle\langle \Theta_1 \rangle\rangle = - \sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{11}^{(k)} \rangle \nabla_1 \langle T \rangle^{(k)},$$

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{i2}^{(k)} \rangle \nabla_2 \langle T \rangle^{(k)} + \sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{i3}^{(k)} \rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(k)} \right], \quad i = 2, 3. \quad (2.3.12)$$

Здесь $\langle \Lambda^{(k)} \rangle$ – тензор интегральных коэффициентов теплопроводности k -й области ($k = 1, 2, 3$).

На поверхностях $\Gamma|_{km}$ контакта между областями заданы условия идеального теплового контакта:

$$\langle T \rangle^{(k)} \Big|_{km} = \langle T \rangle^{(m)} \Big|_{km}, \quad (2.3.13)$$

$$\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(k)} \Big|_{km} = \left\langle \Lambda_{33}^{(m)} \right\rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(m)} \Big|_{km}, \quad k = 1, 2, \quad m = k + 1. \quad (2.3.14)$$

Условия (2.3.13), (2.3.14) можно заменить эквивалентными [1]:

$$\langle T \rangle^{(k)} = \langle T \rangle^{(1)}, \quad \left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(k)} = \left\langle \Lambda_{33}^{(1)} \right\rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(1)}, \quad k = 2, 3. \quad (2.3.15)$$

Дифференцируя обе части равенства первого из равенств (2.3.15) по x^1, x^2 , приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \langle T \rangle^{(k)} &= \nabla_1 \langle T \rangle^{(1)}, \quad \nabla_2 \langle T \rangle^{(k)} = \nabla_2 \langle T \rangle^{(1)}, \\ \nabla_3 \langle T \rangle^{(k)} \left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle &= \nabla_3 \langle T \rangle^{(1)} \left\langle \Lambda_{33}^{(1)} \right\rangle, \quad k = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Зависимости (2.3.11), (2.3.16) вместе составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных величин $\nabla_i \langle T \rangle^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$).

Решая систему, получаем:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle &= \sum_i \bar{\Omega}_i \nabla_1 \langle T \rangle^{(1)} = \nabla_1 \langle T \rangle^{(1)}, \quad \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle = \sum_i \bar{\Omega}_i \nabla_2 \langle T \rangle^{(1)} = \nabla_2 \langle T \rangle^{(1)}, \\ \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle &= \sum_i \bar{\Omega}_i \frac{\left\langle \Lambda_{33}^{(1)} \right\rangle}{\left\langle \Lambda_{33}^{(i)} \right\rangle} \nabla_3 \langle T \rangle^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Подставляя (2.3.17) в (2.3.12) и исключая из выражений зависимость от $\nabla_i \langle T \rangle^{(1)}$, получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Theta_1 \rangle\rangle &= - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{11}^{(k)} \right\rangle \nabla_1 \langle T \rangle \right], \\ \langle\langle \Theta_2 \rangle\rangle &= - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{22}^{(k)} \right\rangle \nabla_2 \langle T \rangle + \sum_k \bar{\Omega}_k \frac{\left\langle \Lambda_{23}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle} \left(\sum_j \frac{\bar{\Omega}_j}{\left\langle \Lambda_{33}^{(j)} \right\rangle} \right)^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle \right], \\ \langle\langle \Theta_3 \rangle\rangle &= - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{32}^{(k)} \right\rangle \nabla_2 \langle T \rangle + \left(\sum_k \frac{\bar{\Omega}_k}{\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle} \right)^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Сравнивая (2.3.18) с (2.3.12), получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Lambda_{11} \rangle\rangle &= \sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{11}^{(k)} \right\rangle, \quad \langle\langle \Lambda_{22} \rangle\rangle = \sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{22}^{(k)} \right\rangle, \quad \langle\langle \Lambda_{33} \rangle\rangle = \left(\sum_k \frac{\bar{\Omega}_k}{\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle} \right)^{-1}, \\ \langle\langle \Lambda_{23} \rangle\rangle &= \sum_k \bar{\Omega}_k \frac{\left\langle \Lambda_{23}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle} \left(\sum_j \frac{\bar{\Omega}_j}{\left\langle \Lambda_{33}^{(j)} \right\rangle} \right)^{-1}, \quad \langle\langle \Lambda_{32} \rangle\rangle = \sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{32}^{(k)} \right\rangle, \\ \langle\langle \Lambda_{12} \rangle\rangle &= \langle\langle \Lambda_{13} \rangle\rangle = \langle\langle \Lambda_{21} \rangle\rangle = \langle\langle \Lambda_{31} \rangle\rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Здесь $\langle \Lambda_{ij}^{(k)} \rangle$ задаются выражениями (2.3.4), (2.3.7),

$$\langle \Lambda_{11}^3 \rangle = \langle \Lambda_{22}^3 \rangle = \langle \Lambda_{33}^3 \rangle = \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{ij}^3 \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

1.4 Армирующие волокна восьмиугольного сечения. Рассмотрим однонаправленно армированный слой, армирующее волокно в котором имеет в поперечном сечении форму правильного восьмиугольника.

Формулами

$$\omega = d/l, \quad \omega_z = \delta/h$$

вводим параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω), по его высоте (ω_z), и угол $\varphi = \pi/4$ (угол TSQ на рис. 4). Оси прямоугольной декартовой системы координат $x^1, x^2, x^3 = z$ направим, как показано на рис. 4.

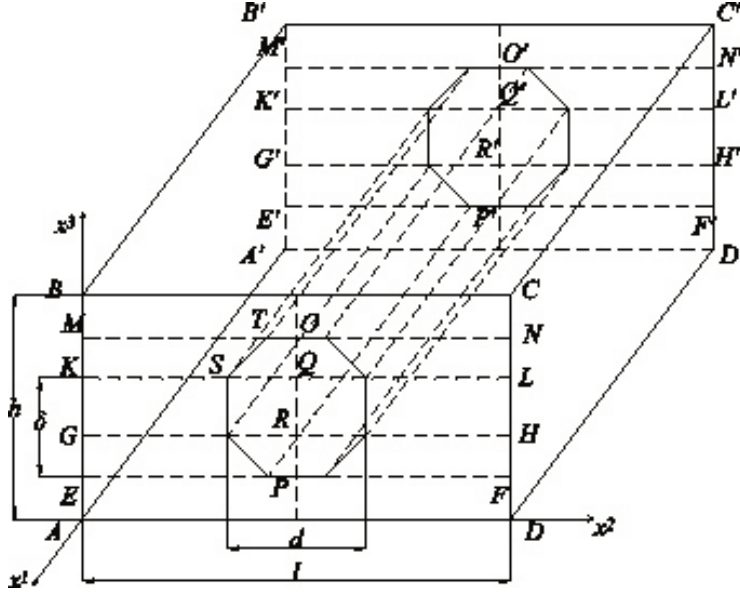


Рис. 4. Армирующее волокно восьмиугольного сечения

Представительный элемент армирующего слоя (параллелепипед $EMNFE'M'N'F'$) разделим плоскостями $KLK'L'$, $GHG'H'$ на 3 части и рассмотрим отдельно характеристики каждой из них.

Аналогично рассмотренному выше случаю треугольного сечения разделим параллелепипед $MNLKM'N'L'K'$ плоскостью $OPP'O'$ и найдем средние характеристики каждого из получившихся параллелепипедов отдельно.

Рассмотрим параллелепипед $MOQKM'O'Q'K'$. Величины, относящиеся к этой области, будем обозначать индексом «1а».

Повторяя рассуждения (2.1.1)–(2.1.11), получаем:

$$\langle \Lambda_{11}^{10} \rangle = \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c,$$

$$\langle \Lambda_{22}^{10} \rangle = [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1},$$

$$\langle \Lambda_{23}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{32}^{10} \rangle = l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 A_1^{-1},$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{33}^{10} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{12}^{10} \rangle &= \langle \Lambda_{13}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{10} \rangle = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Рассмотрим параллелепипед $ONLQO'N'L'Q'$ (область «1b»). Повторяя рассуждения (2.2.4)–(2.2.6), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{1b} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \\ \langle \Lambda_{22}^{1b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle = -l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{1b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{12}^{1b} \rangle &= \langle \Lambda_{13}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{1b} \rangle = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Легко заметить, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{1a} \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{1b} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^{1a} \rangle = \langle \Lambda_{22}^{1b} \rangle, \quad \langle \Lambda_{33}^{1a} \rangle = \langle \Lambda_{33}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^{1a} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{1a} \rangle = -\langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle = -\langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Рассмотрим теперь параллелепипед $MNLKM'N'L'K$ и найдем его осредненные характеристики.

Повторяя рассуждения (2.2.8)–(2.2.17), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^1 \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{1a} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^1 \rangle = \langle \Lambda_{22}^{1a} \rangle, \quad \langle \Lambda_{33}^1 \rangle = \langle \Lambda_{33}^{1a} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^1 \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^{1a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{32}^1 \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^{1a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{12}^1 \rangle &= \langle \Lambda_{13}^1 \rangle = \langle \Lambda_{21}^1 \rangle = \langle \Lambda_{31}^1 \rangle = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_\varepsilon^I \rangle}{\langle c_\varepsilon \rangle}. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Рассмотрим параллелепипед $KLHGK'L'H'G'$ (область «2») и найдем его средние характеристики. Формулы для компонент тензора теплопроводности можно найти в [4]:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^2 \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \\ \langle \Lambda_{22}^2 \rangle &= \lambda_{a2} \lambda_c I_1^{-1}, \end{aligned}$$

$$\langle \Lambda_{33}^2 \rangle = \bar{\omega} \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{ij}^2 \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (2.5.5)$$

Область $GHFEG'H'F'E'$ аналогична рассмотренной выше области $MNLKM'N'L'K'$. Поэтому приведем только основные получившиеся формулы. Разделим параллелепипед $GHFEG'H'F'E'$ плоскостью $OPP'O'$ (области «3a» и «3b») и найдем средние характеристики каждого из получившихся параллелепипедов отдельно.

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{3a} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{12}^{3a} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{3a} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{3a} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{3a} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{3a} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle (\Lambda_{23})^{3a} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{3a} \rangle = -l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{3a} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

$$\langle \Lambda_{11}^{3b} \rangle = \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c,$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{22}^{3b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{3b} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{3b} \rangle = l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{3b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{12}^{3b} \rangle &= \langle \Lambda_{13}^{3b} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{3b} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{3b} \rangle = 0, \bar{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

$$\langle \Lambda_{11}^3 \rangle = \langle \Lambda_{11}^{3a} \rangle, \langle \Lambda_{22}^3 \rangle = \langle \Lambda_{22}^{3a} \rangle, \langle \Lambda_{33}^3 \rangle = \langle \Lambda_{33}^{3a} \rangle,$$

$$\langle \Lambda_{23}^3 \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^{3a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{3b} \rangle, \langle \Lambda_{32}^3 \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^{3a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{3b} \rangle,$$

$$\langle \Lambda_{12}^3 \rangle = \langle \Lambda_{13}^3 \rangle = \langle \Lambda_{21}^3 \rangle = \langle \Lambda_{31}^3 \rangle = 0, \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_\varepsilon^I \rangle}{\langle c_\varepsilon \rangle}. \quad (2.5.8)$$

Определение осредненных характеристик представительного элемента армированного слоя (параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$) выполняется аналогично (2.3.8)–(2.3.19), поэтому ограничимся лишь конечными формулами:

$$\begin{aligned} \langle \langle \Lambda_{11} \rangle \rangle &= \sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{11}^{(k)} \rangle, \langle \langle \Lambda_{22} \rangle \rangle = \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{22}^{(k)} \rangle, \langle \langle \Lambda_{33} \rangle \rangle = \left(\sum_k \frac{\bar{\Omega}_k}{\langle \Lambda_{33}^{(k)} \rangle} \right)^{-1}, \\ \langle \langle \Lambda_{23} \rangle \rangle &= \sum_k \bar{\Omega}_k \frac{\langle \Lambda_{23}^{(k)} \rangle}{\langle \Lambda_{33}^{(k)} \rangle} \left(\sum_j \frac{\bar{\Omega}_j}{\langle \Lambda_{33}^{(j)} \rangle} \right)^{-1}, \langle \langle \Lambda_{32} \rangle \rangle = \sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{32}^{(k)} \rangle. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Суммирование по k ведется от 1 до 4,

$$\Omega_1 = \Omega_3 = \frac{\omega_z}{2 + \sqrt{2}}, \Omega_2 = \frac{\omega_z}{1 + \sqrt{2}}, \Omega_4 = 1 - \omega_z.$$

Индекс при Ω_i соответствует номеру области. $\langle \Lambda_{ij}^{(k)} \rangle$ задаются выражениями (2.5.4), (2.5.5), (2.5.8),

$$\langle \Lambda_{11}^4 \rangle = \langle \Lambda_{22}^4 \rangle = \langle \Lambda_{33}^4 \rangle = \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{ij}^4 \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

2. Аппроксимация круглого сечения многоугольниками. Выполним аппроксимацию круглого (в сечении) армирующего волокна серией многоугольников: квадратами, правильными шести- и восьмиугольниками. Будем строить вписанные в окружность и описанные вокруг нее многоугольники.

2.1 Аппроксимация квадратами. Зададим объемную интенсивность армирования формулой (рис. 5):

$$w = \frac{\pi r^2}{l^2}. \quad (3.1.1)$$

Интенсивности армирования волокнами квадратного сечения зададим формулами (ω_1 для вписанного квадрата, ω_2 для описанного) (рис. 5):

$$\omega_1 = \frac{a}{l} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{w}{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{A}{l} = 2 \sqrt{\frac{w}{\pi}}. \quad (3.1.2)$$

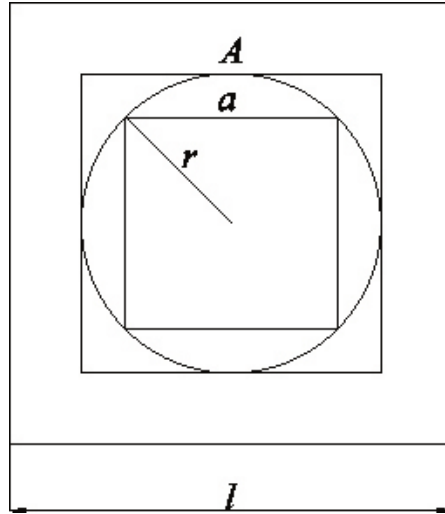


Рис. 5. Аппроксимация квадратами

Для коэффициентов тензора теплопроводности будем иметь [4]:

$$\Lambda_{11} = \bar{\omega} \bar{\omega}_z \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega} \bar{\omega}_z) \lambda_c, \quad \Lambda_{22} = \lambda_c \frac{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)) \lambda_{a2}}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}},$$

$$\Lambda_{33} = \lambda_c \frac{\bar{\omega} \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c}{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z) \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)) \lambda_c}, \quad \Lambda_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j. \quad (3.1.3)$$

Здесь в качестве частного случая принимаем $\omega = \omega_z = \omega_k$ ($k = 1, 2$ для вписанного и описанного квадратов соответственно).

2.2 Аппроксимация шестиугольниками. Объемную интенсивность армирования формулой (3.1.1) (рис. 6).

Интенсивности армирования волокнами шестиугольного сечения зададим формулами (ω_1 для вписанного шестиугольника, ω_2 для описанного):

$$\omega_1 = \frac{d}{l} = 2\sqrt{\frac{w}{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{D}{l} = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{w}{\pi}}. \quad (3.2.1)$$

Коэффициенты тензора теплопроводности определяются по формулам (2.3.19).

2.3 Аппроксимация восьмиугольниками. Зададим объемную интенсивность армирования формулой (3.1.1) (рис. 7):

$$w = \frac{\pi r^2}{l^2}.$$

Интенсивности армирования волокнами восьмиугольного сечения зададим формулами (ω_1 для вписанного восьмиугольника, ω_2 для описанного):

$$\omega_1 = \frac{d}{l} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{\frac{w}{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{D}{l} = 2\sqrt{\frac{w}{\pi}}. \quad (3.3.1)$$

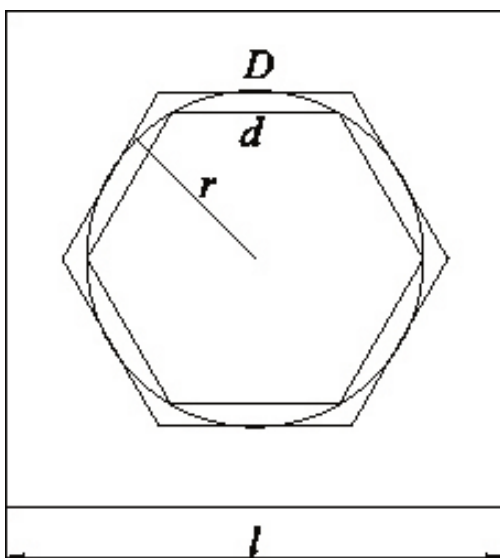


Рис. 6. Аппроксимация шестиугольниками

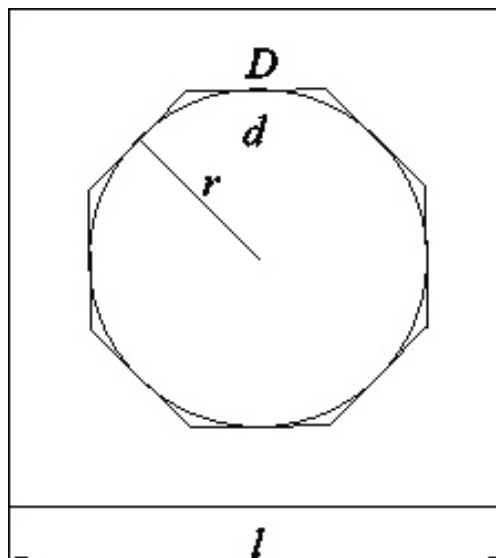


Рис. 7. Аппроксимация восьмиугольниками

Коэффициенты тензора теплопроводности определяются по формулам (2.5.9).

Для верификации данных используем физико-механические характеристики одного из известных композитных материалов, для которых экспериментально найдены значения коэффициентов теплопроводности вдоль и поперек направления армирования. Используем композитный материал на основе кевлара-49 и эпоксисвязующего DER 332 / Джеффалип Т-403 [16, с. 368]: $\lambda_{a1} = 4.816 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$; $\lambda_{a2} = 4.11 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$; $\lambda_c = 0.133 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$; $\rho_a = 1440 \text{ кг} / \text{м}^3$; $\rho_c = 1160 \text{ кг} / \text{м}^3$; $c_{em}^a = 1420 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$; $c_{em}^c = 1750 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$.

На рис. 8 приведены зависимости каждой из компонент тензора теплопроводности от объемной интенсивности армирования.

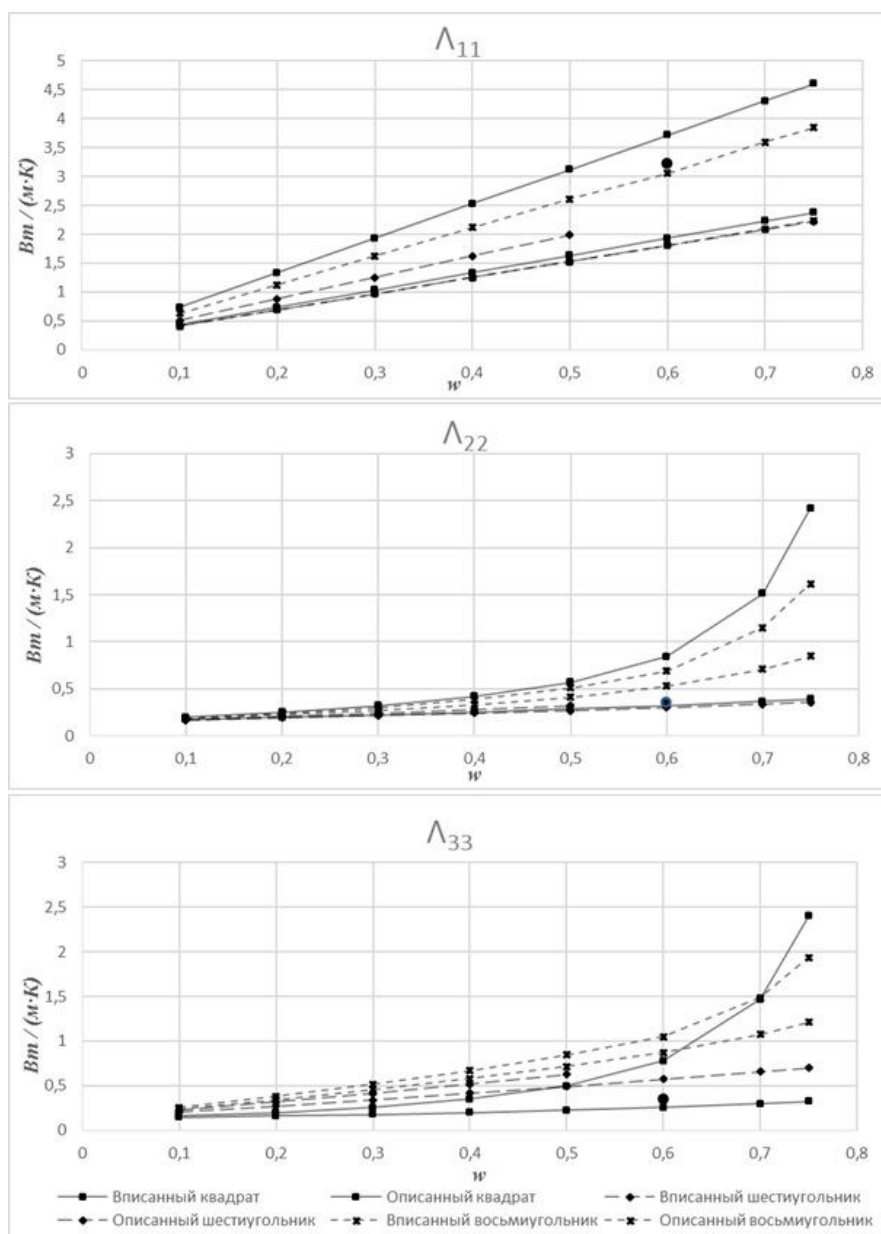


Рис. 8. Расчетные значения компонент тензора теплопроводности для различных форм армирующего волокна

По графикам видно, что коэффициент теплопроводности в продольном и поперечном направлении существенно различаются, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [16, с. 368] и ранее построенными моделями [1]. Аппроксимация вписанным и описанным многоугольниками позволяет получить своеобразный «коридор», позволяющий получить аппроксимацию сверху и снизу. Отметим, что при относительно невысоких интенсивностях армирования аппроксимации, полученные с применением различных многоугольников, сближаются.

Заключение. Решения аналогичных задач для гибридных слоисто-волоконистых конструкций рассмотрены в работе [17]. Решение задач для тепловых полей с большими градиентами, приводящими к изменению характеристик теплового поля в пределах представительного объема, было рассмотрено в работе [18].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №15-01-00825.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. Новосибирск: Изд-во «Арт-Авеню», 2008. 512 с.
- [2] Андреев Александр. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
- [3] Немировский Ю. В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Мех. полимеров. 1972. № 5. С. 861–873.
- [4] Андреев А. Н. Моделирование процессов теплопроводности в однонаправлено армированных композитных средах // Вестник КемГУ. 2015. Т. 1, № 2 (62). С. 6–10.
- [5] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
- [6] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах с дисперсным упрочнением связующего // Прикладная физика. 2008. № 5. С. 10–17.
- [7] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
- [8] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композитных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 1. С. 3–32.
- [9] Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикладная физика. Научно-технический журнал. 2011. № 3. С. 32–39.
- [10] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: учеб. пособие. – 3-е изд., перераб и доп. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
- [11] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
- [12] Кухлинг Х. Справочник по физике. М.: Мир, 1985. 520 с.
- [13] Поль Р. В. Механика, акустика и учение о теплоте. М.: ГИТТЛ, 1957. 479 с.
- [14] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
- [15] Коляно Ю. М., Ломакин В. А., Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородных структур. М.: Наука, 1984. 368 с.
- [16] Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любипа. М.: Малпостроение, 1988. 448 с.
- [17] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Теплопроводность пакета полиармированных слоев // Вестник КемГУ. 2015. Т. 3, № 4 (64). С. 177–183.

[18] Горынин, Г. Л. Немировский Ю. В. Математическое моделирование процесса теплопроводности для 2D-периодических композитных анизотропных материалов // Математические методы и физико-механические поля. 2014. Т. 57, № 2. С. 142 – 151.

Yu. V. Nemirovskii, A. V. Stanislavovich

THE INFLUENCE OF SHAPE AND ARRANGEMENT OF REINFORCING ELEMENTS ON THE THERMAL PROPERTIES OF REINFORCED MATERIALS

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Kemerovo State University, Kemerovo, Russia

Abstract. Structural model of thermal conductivity of unidirectionally reinforced layer is under consideration, which includes effective thermal and physical characteristics of fiber composites. Significant distinction of presented model is averaging of rate of heat flow by representative volume element of two-component composite material using Richmanns law of heat transfer between bodies which are in contact instead of simple mixture rule. Within selected approach different cross-sectional shapes of reinforcing fibers are under consideration: parallelogram, isosceles triangle, regular hexagon and regular octagon. Reinforcing fibers which are round in cross-section are approximated by inscribed and circumscribed polygons. Comparison of calculated values of thermal conductivity with several composite material whit knows properties is made.

Keywords: thermal conductivity, structural model, fiber composite, reinforced materials.

REFERENCES

- [1] Nemirovskii Y. V., Iankovskii A. P. The thermal conductivity of homogeneous and composite thin-walled structures. Novosibirsk: «Art-avenue», 2008. 512 p. (in Russian).
- [2] Andreev Alexander. Elasticity and thermoelasticity of layered composite shells. Mathematical model and some aspects of numerical analysis. Saarbrucken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p. (in Russian).
- [3] Nemirovskii Y. V. On the theory of thermoelastic bending of reinforced shells and plates // Mechanics of polymers. 1972. № 5. P. 861–873. (in Russian).
- [4] Andreev A. N. Modelling of processes of heat conduction in unidirectionally reinforced composite environments // Bulletin of KemSU. 2015. Vol. 1, № 2 (62). P. 6–10. (in Russian).
- [5] Andreev A. N., Nemirovskii Y. V. Multilayer anisotropic shell and plates: Bend, stability, oscillations. Novosibirsk: Nauka, 2001. 288 p. (in Russian).
- [6] Nemirovskii Y. V., Iankovskii A. P. Modelling of processes of heat conduction in the orthogonal reinforced hybrid composites with disperse hardened binding material // Applied physics. 2008. №5. P. 10–17. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

Stanislavovich Alexey Viacheslavovich

e-mail: alexey.st@bk.ru, Postgraduate student, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia.

- [7] Nemirovskii Y. V., Iankovskii A. P. Rational design of reinforced structures. Novosibirsk: Nauka, 2002. 488 p. (in Russian).
- [8] Nemirovskii Y. V., Iankovskii A. P. Calculation of effective physical and mechanical properties of hybrid composites reinforced by cross transversely isotropic fibers, and a comparison of the design characteristics of the experimental data // Composite mechanics and design. 2007. Vol. 13, № 1. P. 3–32. (in Russian).
- [9] Iankovskii A. P. Modelling of processes of heat conduction in a spatially reinforced composites with unrestricted orientation of the fibers // Applied physics. 2011. № 3. P. 32–39. (in Russian).
- [10] Kartashov E. M. Analytical methods in the theory of heat conduction in solid bodies: Textbook. M.: Vyssh. Shkola., 2001. 550 p. (in Russian).
- [11] Novatckii V. Dynamic thermoelasticity problem. M.: World, 1970. 256 p. (in Russian).
- [12] Kukhling H. Physics reference book. M.: Mir, 1985. 520 p. (in Russian).
- [13] Pol R. V. Mechanics, acoustics and the study of heat. M.: GITTL, 1957. 479 p. (in Russian).
- [14] Boli B., Wayner J. The theory of thermal stress. M.: Mir, 1964. 517 p. (in Russian).
- [15] Koliano Y. M., Lomakin V. A., Podstrigach I. S. Thermoelasticity bodies non-homogeneous structures. M.: Mir, 1984. 368 p. (in Russian).
- [16] Reference book of composite materials: in 2 books. Book. 1 / edited by J. Lubin. M.: Mashinostroenie, 1988. 448 p. (in Russian).
- [17] Nemirovskii Y. V., Stanislavovich A. V. Thermal conductivity of the packet of multidirectional reinforced layers // Bulletin of KcmSU. 2015. Vol. 3, № 4 (64). P. 177–183. (in Russian).
- [18] Gorynin, G. L. Nemirovskii Y. V. Mathematical modelling of heat conduction process for 2D-periodic anisotropic composite materials// Mathematical methods and physics-mechanical fields. 2014. Vol. 57, № 2. P. 142–151. (in Russian).