

А. В. Манжиров<sup>1,2,3</sup>, С. П. Курдина<sup>2</sup>, К. Е. Казаков<sup>2</sup>, И. Федотов<sup>4</sup>

## СОГЛАСОВАННЫЙ КОНТАКТ ВЯЗКОУПРУГОГО ОСНОВАНИЯ С ШЕРОХОВАТЫМ ПОКРЫТИЕМ И КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ОДИНАКОВЫХ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский городской технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

<sup>3</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Россия

<sup>4</sup>Цванский университет технологии, г. Претория, ЮАР

**Аннотация.** При изготовлении деталей машин, механизмов и приборов для улучшения прочностных характеристик в областях предполагаемого контакта используются разнообразные покрытия. Такие покрытия наносятся слой за слоем с использованием современных аддитивных технологий [1]. В работе рассматривается контактное взаимодействие основания с покрытием и системы одинаковых жестких штампов, причем форма поверхности покрытия полностью повторяет форму оснований штампов. Такая ситуация возникает, например, когда для нанесения покрытия используется метод лазерной наплавки или склейки и жесткий штамп частично погружается в еще незатвердевшее покрытие.

---

© Манжиров А. В., Курдина С. П., Казаков К. Е., Федотов И., 2015

*Манжиров Александр Владимирович*

**e-mail:** manzh@inbox.ru, доктор физико-математических наук, профессор, иностранный член Национальной академии наук Республики Армения, заместитель директора Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия; профессор кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия; профессор кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ», г. Москва, Россия.

*Курдина Светлана Павловна*

**e-mail:** svetlana-ka@yandex.ru, старший преподаватель кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

*Казаков Кирилл Евгеньевич*

**e-mail:** kazakov@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия.

*Федотов Игорь*

Доктор философии, профессор кафедры математики и статистики Цванского университета технологии, г. Претория, ЮАР.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-08-93964 ЮАР\_а и № 15-31-70002 мол\_а\_мос), Программы № 12 ОЭММПУ РАН и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-2611.2014.1.

Поступила 20.09.2015

В зависимости от способа обработки поверхности ее форма описывается сложными и часто быстро осциллирующими функциями. С точки зрения классификации контактных задач исследуется следующий шаг усложнения периодической контактной задачи, когда все штампы одинаковы, но система конечна (см., например, [2]–[10]). С точки зрения интегральных уравнений рассматривается векторное интегральное уравнение с матричным ядром и одной быстро осциллирующей функцией при внеинтегральном члене [11].

**Ключевые слова:** покрытие, аддитивные технологии, множественный контакт, штампы, контактные напряжения, осадка, угол поворота, форма поверхности, система интегральных уравнений, быстро осциллирующая функция.

УДК: 539.3

**Постановка задачи.** Вязкоупругий стареющий слой произвольной толщины  $H$ , изготовленный в момент времени  $\tau_2$ , лежит на подстилающем недеформируемом основании (рис. 1). В момент времени  $\tau_1 \geq \tau_2$  на слой нанесено вязкоупругое стареющее покрытие, жесткость которого не превышает жесткости слоя. В момент времени  $\tau_0 \geq \tau_1$  на такой пакет слоев начинает действовать система из  $n$  одинаковых штампов, ширины которых значительно больше толщины покрытия, причем форма покрытия и формы оснований штампов полностью совпадают даже до начала нагружения, то есть зазор между ними равен нулю при  $t < \tau_0$ . Под воздействием нагрузки слой с покрытием деформируется, а штампы перемещаются и поворачиваются.

На каждом штампе можно задать один из 4 типов условий:

- а) осадку и угол поворота,
- б) вдавливающую силу и момент,
- в) осадку и момент,
- г) силу и угол поворота.

Разумеется, на каждом штампе возможен различный набор условий. Можно показать, что существует всего 15 возможных вариантов постановки задачи. В данной работе рассмотрим лишь решение для случая, когда на всех штампах заданы сила и момент. Решения для остальных 14 вариантов строятся аналогично.

Заменим штампы некоторыми распределенными, пока еще неизвестными, нагрузками  $p_i(x, t) = -q_i(x, t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), действующими на тех же участках, где и штампы, и равными нулю вне этих участков. Тогда вертикальные перемещения верхней грани покрытия под действием нагрузок  $q_i(x, t)$  можно представить в виде [2] ( $i = \overline{1, n}$ ,  $x \in [a_i, b_i]$ ,  $t \geq \tau_0$ ):

$$u_{zi}(x, t) = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \frac{k_\nu q_i(x, t) h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \int_{a_j}^{b_j} k_{pl} \left( \frac{x - \xi}{H} \right) \frac{q_j(\xi, t)}{E_2(t - \tau_2)} d\xi, \quad (1)$$

где  $h(x)$  — толщина покрытия,  $E_1(t - \tau_1)$  — модуль упругомгновенной деформации покрытия,  $\nu_2$ ,  $E_2(t - \tau_2)$  — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя,  $k_\nu$  — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем, причем в случае гладкого контакта  $k_\nu = 1 - \nu_1^2$ , а в случае идеального —  $k_\nu = 1 - 2\nu_1^2/(1 - \nu_1)$ ,  $\nu_1$  — коэффициент Пуассона покрытия;  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор,  $\mathbf{V}_k$  — интегральные операторы Вольтерра с ядрами ползучести при растяжении  $K_k(t, \tau) = E_k \frac{\partial}{\partial \tau} [E_k^{-1}(\tau) + C_k(t, \tau)]$ ,  $C_k(t, \tau)$  — мера ползучести

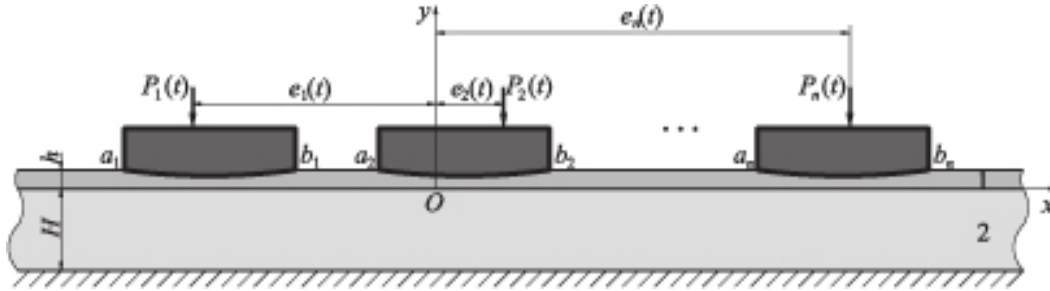


Рис. 1. Взаимодействие основания и системы штампов

( $k = 1, 2$ ),  $k_{\text{pl}}[(x - \xi)/H]$  — ядро плоской контактной задачи [2], которое имеет вид:

$$k_{\text{pl}}(s) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(su) du,$$

причем в случае гладкого контакта между нижним слоем и основанием

$$L(u) = \frac{\text{ch}(2u) - 1}{\text{sh}(2u) + 2u},$$

а в случае идеального контакта

$$L(u) = \frac{2\kappa \text{sh}(2u) - 4u}{2\kappa \text{ch}(2u) + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu_2.$$

С другой стороны штампы перемещаются не деформируясь, поэтому вертикальные перемещения под ними представимо в виде ( $i = \overline{1, n}$ ,  $x \in [a_i, b_i]$ ,  $t \geq \tau_0$ )

$$u_{yi}(x, t) = \delta_i(t) + \alpha_i(t)(x - \bar{a}_i), \quad (2)$$

где  $\delta_i(t)$  — осадка  $i$ -го штампа,  $\alpha_i(t)$  — угол его поворота,  $\bar{a}_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$  — его срединная точка. Приравнявая правые части равенств (1) и (2), получим систему интегральных уравнений задачи множественного конформного контакта ( $i = \overline{1, n}$ ,  $x \in [a_i, b_i]$ ,  $t \geq \tau_0$ ):

$$u_{zi}(x, t) = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \frac{k_\nu q_i(x, t) h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \int_{a_j}^{b_j} k_{\text{pl}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right) \frac{q_j(\xi, t)}{E_2(t - \tau_2)} d\xi = \delta_i(t) + \alpha_i(t)(x - \bar{a}_i). \quad (3)$$

Условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями ( $i = \overline{1, n}$ ,  $t \geq \tau_0$ ):

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} (\xi - \bar{a}_i) q_i(\xi, t) d\xi = M_i(t) \equiv e_i(t) P_i(t), \quad (4)$$

где через  $P_i(t)$  обозначены действующие на штампы силы, а через  $e_i(t)$  и  $M_i(t)$  — эксцентриситеты и моменты приложения этих сил.

**Преобразование системы разрешающих уравнений.** Сделаем в (3) и (4) замену переменных по формулам ( $i, j = \overline{1, n}, x \in [a_i, b_i], \xi \in [a_j, b_j], t \geq \tau_0$ )

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x - \bar{a}_i}{\frac{1}{2}l} = \frac{x}{\frac{1}{2}l} - \eta_i, \quad \xi^* = \frac{\xi - \bar{a}_j}{\frac{1}{2}l} = \frac{\xi}{\frac{1}{2}l} - \eta_j, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau_k^* = \frac{\tau_k}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{\frac{1}{2}l}, \quad \eta_i = \frac{\bar{a}_i}{\frac{1}{2}l}, \\ \delta^{i*}(t^*) &= \frac{\delta_i(t)}{\frac{1}{2}l}, \quad \alpha^{i*}(t^*) = \alpha_i(t), \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_1}, \quad m^*(x^*) = \frac{k_\nu}{2(1 - \nu_2^2)} \frac{h(x)}{\frac{1}{2}l}, \\ q^{i*}(x^*, t^*) &= \frac{2(1 - \nu_2^2)q_i(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad P^{i*}(t^*) = \frac{2(1 - \nu_2^2)P_i(t)}{E_2(t - \tau_2)\frac{1}{2}l}, \quad M^{i*}(t^*) = \frac{2(1 - \nu_2^2)M_i(t)}{E_2(t - \tau_2)(\frac{1}{2}l)^2}, \\ \mathbf{F}^{ij*}f(x^*) &= \int_{-1}^1 k^{ij}(x^*, \xi^*)f(\xi^*)d\xi^*, \quad k^{ij}(x^*, \xi^*) = \frac{1}{\pi}k_{\text{pl}}\left(\frac{x^* + \eta_i - \xi^* - \eta_j}{\lambda}\right), \\ \mathbf{V}_k^*f(t^*) &= \int_1^{t^*} K_k^*(t^*, \tau^*)f(\tau^*)d\tau^*, \quad K_2(t^*, \tau^*) = K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\tau_0, \\ K_1^*(t^*, \tau^*) &= \frac{E_1(t - \tau_1)}{E_1(\tau - \tau_1)} \frac{E_2(\tau - \tau_1)}{E_2(t - \tau_1)} K_1(t - \tau_1, \tau - \tau_1)\tau_0, \end{aligned}$$

где  $l = b_1 - a_1 = \dots = b_n - a_n$  — ширины штампов, а  $\frac{1}{2}l$  — полуширины штампов. Опустив в окончательных формулах звездочки, получим безразмерную систему интегральных уравнений с дополнительными условиями ( $i = \overline{1, n}, x \in [-1, 1], t \geq 1$ )

$$\begin{aligned} c(t)m(x)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)q^i(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij}q^j(x, t) &= \delta^i(t) + \alpha^i(t)x, \quad (5) \\ \int_{-1}^1 q^i(\xi, t)d\xi = P^i(t), \quad \int_{-1}^1 \xi q^i(\xi, t)d\xi &= M^i(t). \quad (6) \end{aligned}$$

Приведем систему уравнений (5) с дополнительными условиями (6) к одному операторному уравнению с двумя дополнительными векторными условиями. Примем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t) &= q^i(x, t)\mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{P}(t) = P^i(t)\mathbf{i}^i, \\ \mathbf{M}(t) &= M^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{k}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi)\mathbf{i}^i\mathbf{j}^j, \quad \mathbf{Gf}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{k}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до  $n$ , если левая часть формулы не зависит от этого индекса;  $x \in [-1, 1]$  и  $t \geq 1$ , если не указано иное. Тогда уравнения (5), (6) можно записать в виде

$$c(t)m(x)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{Gq}(x, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x, \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t)d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \xi \mathbf{q}(\xi, t)d\xi = \mathbf{M}(t). \quad (8)$$

Введя (7), (8) обозначения

$$\mathbf{Q}(x, t) = \sqrt{m(x)}\mathbf{q}(x, t), \quad \mathbf{K}(x, t) = \frac{\mathbf{k}(x, \xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}}, \quad \mathbf{Ff}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi)d\xi,$$

получим

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{F}\mathbf{Q}(x, t) = \frac{\delta(t) + \alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}} \equiv \mathbf{\Delta}(x, t), \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathbf{Q}(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{\xi \mathbf{Q}(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{M}(t), \quad (10)$$

где через  $\mathbf{\Delta}(x, t)$  обозначена правая часть уравнения (9).

Таким образом, мы получили смешанное операторное уравнение (9) с векторными дополнительными условиями (10).

**Построение решения в случае известных приложенных сил и моментов.**

Решение полученного разрешающего операторного уравнения (9) с векторными дополнительными условиями (10) будем строить в классе вектор-функций из гильбертова пространства  $L_2([-1, 1], V)$ . Так как в операторное уравнение и дополнительные условия входит функция  $\sqrt{m(x)}$ , связанная с толщиной покрытия, то при построении решения следует учитывать, что эта функция может быть быстро осциллирующей. Поэтому в структуру функционального базиса должна входить функция  $\sqrt{m(x)}$ . Система ортонормированных базисных вектор-функций, удовлетворяющая вышеописанному условию, может быть построена по следующему правилу

$$\mathbf{p}_k^i(x) = \frac{\mathbf{p}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \mathbf{p}_k^{i*}(x) = p_k^*(x)\mathbf{i}^i, \quad d_{-1} = 1, \quad J_k = \int_{-1}^1 \frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)},$$

$$d_k = \begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k & \cdots & J_{2k} \end{vmatrix}, \quad p_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k-1} & J_k & \cdots & J_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{vmatrix}.$$

Следуя обобщенному проекционному методу [9], [11], пространство  $L_2([-1, 1], V)$  представим в виде прямой суммы евклидова пространства  $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ , базисом которого являются функции  $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$ , и ортогонального ему гильбертова пространства  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$  с базисом  $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , то есть  $L_2([-1, 1], V) = L_2^{(0)}([-1, 1], V) \oplus L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ . Тогда неизвестная вектор-функция  $\mathbf{Q}(x, t)$  и правая часть уравнения (9) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, определенных в пространствах  $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$  и  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ :

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_0(x, t) + \mathbf{Q}_1(x, t), \quad \mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_0(x, t) + \mathbf{\Delta}_1(x, t),$$

где

$$\mathbf{Q}_0(x, t) = \sum_{l=0}^1 z_l^i(t) \mathbf{p}_l^i(x) \in L_2^{(0)}([-1, 1], V), \quad (11)$$

$$\mathbf{\Delta}_0(x, t) = \sum_{l=0}^1 [k_{\delta l}^i \delta^i(t) + k_{\alpha l}^i \alpha^i(t)] \mathbf{p}_l^i(x) \in L_2^{(0)}([-1, 1], V). \quad (12)$$

Здесь  $k_{\delta l}^i$  и  $k_{\alpha l}^i$  — коэффициенты разложения вектор-функций  $\mathbf{i}^i/\sqrt{m(x)}$  и  $\mathbf{i}^i x/\sqrt{m(x)}$ , которые можно определить по формулам

$$k_{\delta l}^i = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{m(\xi)}} \mathbf{p}_l^i(\xi) \cdot \mathbf{i}^i d\xi = \begin{cases} \sqrt{J_0}, & l = 0, \\ 0, & l = 1, \end{cases}$$

$$k_{\alpha l}^i = \int_{-1}^1 \frac{\xi}{\sqrt{m(\xi)}} \mathbf{p}_l^i(\xi) \cdot \mathbf{i}^i d\xi = \begin{cases} J_1/\sqrt{J_0}, & l = 0, \\ \sqrt{(J_0 J_2 - J_1^2)/J_0}, & l = 1. \end{cases}$$

Заметим, что в представлении  $\mathbf{Q}(x, t)$  нам известно слагаемое  $\mathbf{Q}_0(x, t)$ , функции разложения которого  $z_l^i(t)$  ( $l = 1, 2, i = \overline{1, n}$ ) определяются дополнительными условиями (10)

$$z_0^i(t) = \frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1^i(t) = \frac{J_0 M^i(t) - J_1 P^i(t)}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}},$$

а слагаемое  $\mathbf{Q}_1(x, t)$  подлежит определению. В правой части  $\mathbf{\Delta}_1(x, t) \equiv 0$ , а требуется определить  $\mathbf{\Delta}_0(x, t)$ . Для нахождения неизвестной вектор-функции  $\mathbf{Q}_1(x, t)$  введем ортогональные проекторы  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ , которые отображают гильбертово пространство  $L_2([-1, 1], V)$  на подпространства  $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$  и  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ , соответственно:

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{f}(x) = \sum_{l=0}^1 k_{fl}^i \mathbf{p}_l^i(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0,$$

где коэффициенты разложения вектор-функции  $\mathbf{f}(x)$  определяются по формуле

$$k_{fl}^i = \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{p}_l^i(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi, \quad l = 1, 2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что имеют место соотношения

$$\mathbf{P}_l \mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_l(x, t), \quad \mathbf{P}_l \mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_l(x, t), \quad l = 1, 2.$$

Поддействовав оператором  $\mathbf{P}_1$  на (9), получим уравнение с известной правой частью

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \mathbf{Q}_1(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{P}_1 \mathbf{F} \mathbf{Q}_1(x, t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{P}_1 \mathbf{F} \mathbf{Q}_2(x, t) \equiv \tilde{\mathbf{\Delta}}_1(x, t). \quad (13)$$

Решение уравнения (11) необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора  $\mathbf{P}_1 \mathbf{F}$ , который является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$  в  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ . Система его собственных функций составляет базис пространства  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ . Поставив для него спектральная задачу

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{F} \varphi_k(x) = \gamma_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^i(x), \quad k = 2, 3, \dots,$$

получим невырожденную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\psi_{km}^i$

$$\sum_{l=2}^{\infty} K_{ml}^{ij} \psi_{kl}^j = \gamma_k \psi_{km}^i, \quad k, m = 2, 3, \dots, \quad i = \overline{1, n},$$

где коэффициенты разложения ядра  $\mathbf{K}(x, \xi)$  определяются из соотношений

$$K_{ml}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{p}_m^i(x) \cdot \mathbf{K}(x, \xi) \mathbf{p}_l^j(\xi) dx d\xi, \quad m, l = 0, 1, 2, \dots, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Представив функцию  $\mathbf{Q}_1(x, t)$  в виде разложения по  $\varphi_k(x)$ , то есть

$$\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x),$$

и подставив это представление в (11), получим уравнение для определения функций  $z_k(t)$ :

$$\sum_{k=2}^{\infty} [c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \varphi_k(x) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \gamma_k \varphi_k(x)] z_k(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \Delta_k(t) \varphi_k(x),$$

где  $\Delta_k(t)$  — функциональные коэффициенты разложения вектор-функции  $\tilde{\Delta}_1(x, t)$ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta_k(t) &= \int_{-1}^1 \tilde{\Delta}_1(x, t) \cdot \varphi_k(x) dx = \\ &= -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \int_{-1}^1 \mathbf{P}_1 \mathbf{F} \mathbf{Q}_0(x, t) \cdot \varphi_k(x) dx = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{l=0}^1 K_{lk}^i z_l^i(t). \end{aligned}$$

Легко показать, что коэффициенты  $K_{lk}^i$  в этом выражении вычисляются по формуле

$$K_{lk}^i = \sum_{m=2}^{\infty} K_{ml}^{ji} \psi_{km}^j, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = 0, 1, \quad k = 2, 3, \dots$$

Тогда

$$[c(t) + \gamma_k] z_k(t) - [c(t) \mathbf{V}_1 + \gamma_k \mathbf{V}_2] z_k(t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) [K_{0k}^i z_0^i(t) + K_{1k}^i z_1^i(t)],$$

откуда ( $k = 2, 3, \dots$ )

$$z_k(t) = -(\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) [K_{0k}^i z_0^i(t) + K_{1k}^i z_1^i(t)]}{c(t) + \gamma_k},$$

$$\mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где  $R_k(t, \tau)$  — резольвенты ядер  $[c(t)K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)]/[c(t) + \gamma_k]$ . Отметим, что решение имеет вид

$$q^i(x, t) = \frac{1}{m(x)} [z_0^i(t) p_0^*(x) + z_1^i(t) p_1^*(x) + \dots], \quad i = \overline{1, n},$$

то есть в нем отдельным сомножителем выделена функция  $m(x)$ , связанная с толщиной покрытия и формой оснований штампов, что позволяет производить вычисления для оснований с покрытиями, толщина которых описывается быстро осциллирующими функциями. Этого невозможно добиться другими известными методами.

Определив функцию  $\mathbf{Q}_1(x, t)$  можно найти и осадки и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором  $\mathbf{P}_0$  на уравнение (9):

$$\begin{aligned} c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \sum_{l=0}^1 z_l^i(t) \mathbf{p}_l^i(x) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{P}_0 \mathbf{F} \left[ \sum_{l=0}^1 z_l^i(t) \mathbf{p}_l^i(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x) \right] = \\ = \sum_{l=0}^1 [k_{\delta l}^i \delta^i(t) + k_{\alpha l}^i \alpha^i(t)] \mathbf{p}_l^i(x). \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{F} \mathbf{P}_l^i(x) = \sum_{m=0}^1 K_{ml}^{ji} \mathbf{P}_m^j(x), \quad \mathbf{P}_0 \mathbf{F} \varphi_k(x) = \sum_{m=0}^1 K_{mk}^i \mathbf{P}_m^i(x).$$

Тогда мы получим систему уравнений относительно  $\delta^i(t)$  и  $\alpha^i(t)$ :

$$\begin{aligned} c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)z_0^i(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \left[ K_{00}^{ij} z_0^j + K_{01}^{ij} z_1^j + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t) \right] &= k_{\delta 0}^i \delta^i(t) + k_{\alpha 0}^i \alpha^i(t), \\ c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)z_1^i(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \left[ K_{10}^{ij} z_0^j + K_{11}^{ij} z_1^j + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^i z_k(t) \right] &= k_{\delta 1}^i \delta^i(t) + k_{\alpha 1}^i \alpha^i(t), \end{aligned}$$

решая которую с учетом выражений для коэффициентов  $k_{\delta l}^i$  и  $k_{\alpha l}^i$  получим следующие выражения для осадок и углов поворота штампов ( $i = \overline{1, n}$ )

$$\begin{aligned} \alpha^i(t) &= \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}} \left\{ c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)z_1^i(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \left[ K_{10}^{ij} z_0^j(t) + K_{11}^{ij} z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^i z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta^i(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)z_0^i(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \left[ K_{00}^{ij} z_0^j(t) + K_{01}^{ij} z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t) \right] \right\} - \frac{J_1}{J_0} \alpha^i(t). \end{aligned}$$

**Численные эксперименты.** Рассмотрим двухслойное основание, лежащее на недеформируемой подложке, нижний слой которого из упругого материала, а верхний — из вязкоупругого стареющего. Будем считать, что изменение модуля упругости вязкоупругого материала несущественно ( $E_1(t) \equiv E_1$ ), а его мера ползучести представлена в виде

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\chi \tau}) [1 - e^{-\psi(t-\tau)}].$$

Зададимся следующими значениями параметров для стального основания, покрытого слоем полимера,

$$\begin{aligned} c(t) &\equiv \frac{E_2}{E_1} = 40, \quad \nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.1, \\ C_0 E_1 &= 0.5522, \quad A_0 E_1 = 4, \quad \chi \tau_0 = 0.31, \quad \psi \tau_0 = 0.6 \quad (\tau_0 = 10 \text{ сут}), \end{aligned}$$

между слоями и между нижним слоем и нижним подстилающим основанием осуществляется идеальный контакт, т.е.  $k_\nu = 1 - 2\nu_1^2/(1 - \nu_1) \approx 0.74$ ,  $L(u) = [5.2 \operatorname{sh}(2u) - 4u]/[5.2 \operatorname{ch}(2u) + 4u^2 + 7.76]$ . Без ограничения общности будем предполагать, что момент изготовления вязкоупругого слоя примем равным нулю, т.е.  $\tau_1 = 0$ .

Рассмотрим случай, когда на вышеописанное основание действуют 2 одипаковых штампа, расстояние между которыми равно полуширине штампов, т.е.  $\eta_2 - \eta_1 = 3$ . Единообразные нагрузки приложены по осям штампов, то есть  $P_k(t) \equiv 1$ ,  $e_k(t) \equiv 0$ . Будем



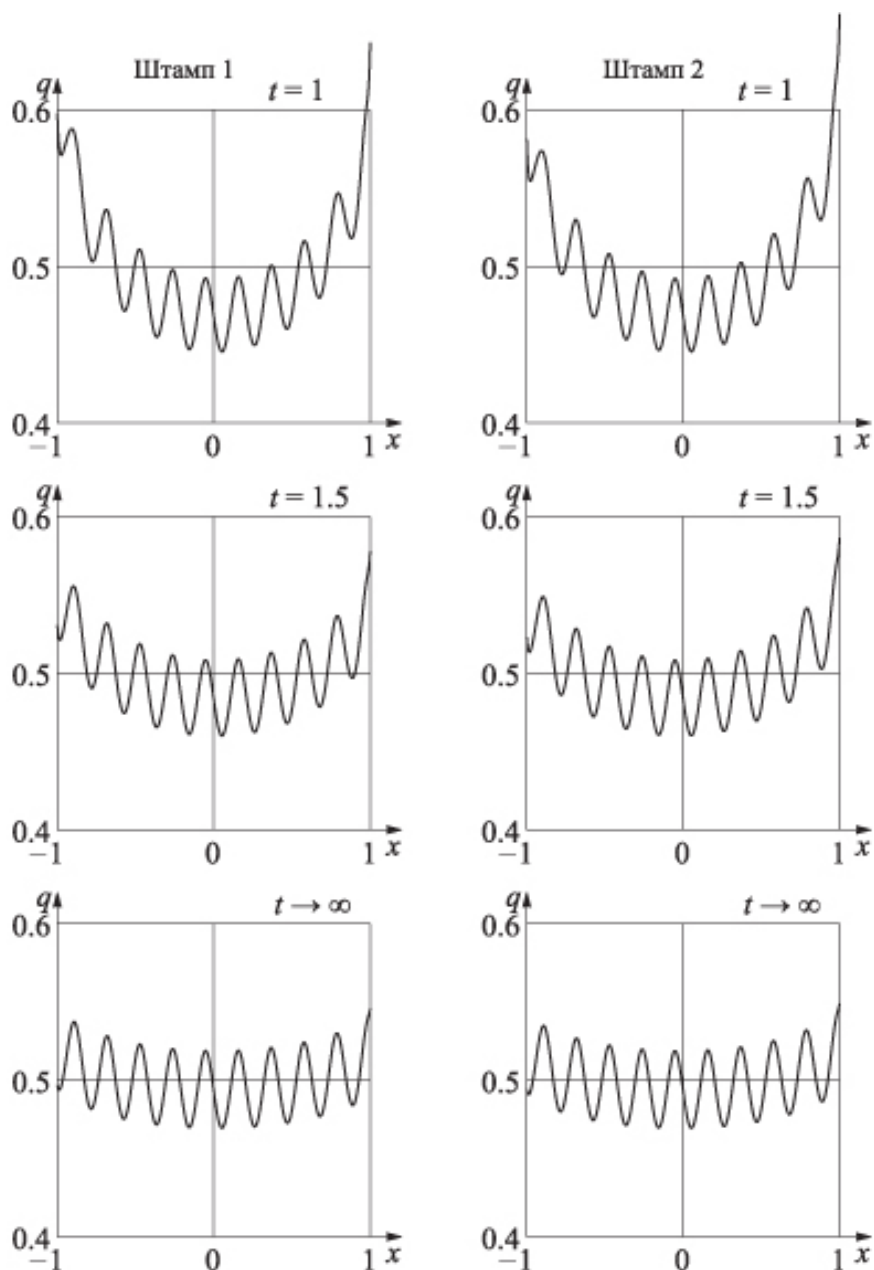


Рис. 2. Контактные давления для случая двух штампов при  $\eta_2 - \eta_1 = 3$

считать, что функция  $m(x)$ , пропорциональная высоте покрытия и форме оснований штампов, задается формулой

$$m(x) = 0.025 + 0.00125 \sin(30x),$$

т.е. происходят небольшие колебания высоты покрытия вокруг среднего значения 0.025. Толщина нижнего слоя равна ширинам штампов, т.е.  $\lambda = 2$ . На рис. 2 показано

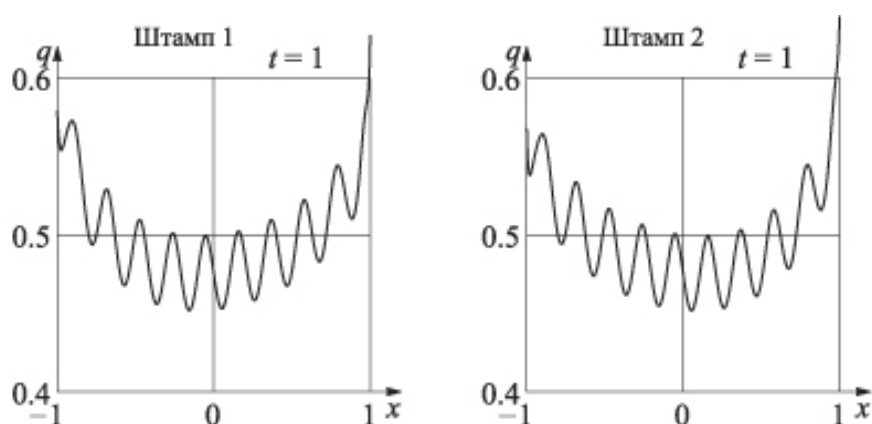


Рис. 3. Контактные давления для случая двух штампов при  $\eta_2 - \eta_1 = 2.3$

распределение контактных давлений под штампами в различные моменты времени ( $t = 1$ ,  $t = 10$  и установившееся значение). Видно, что с течением времени контактные давления перераспределяются, однако всюду в явном виде видна прямая зависимость от функции  $m^{-1}(x)$ , а следовательно, от высоты покрытия. Рассматривая график каждого штампа в отдельности, можно заметить, что распределение контактных давлений несимметрично относительно оси, что вызовет его наклон (в нашем случае штампы наклонятся друг к другу). Причем, чем ближе штампы друг к другу, тем сильнее их взаимовлияние друг на друга и тем сильнее будет их наклон ( $\eta_2 - \eta_1 = 2.3$ , рис. 3). Если же, наоборот, штампы находятся вдали друг от друга, то распределение контактных давлений под штампами практически не будет зависеть от давлений на другом штампе, и расчеты можно производить для каждого штампа в отдельности. Чтобы избавиться от наклонов, необходимо прикладывать нагрузки с другими эксцентриситетами. Характер наклона также изменится, если изменить профиль основания штампов.

**Выводы.** Поставлена и решена плоская задача о согласованном контакте между вязкоупругим стареющим основанием с вязкоупругим стареющим покрытием и конечной системой одинаковых жестких штампов, расположенных на одном и том же расстоянии друг от друга (одно из обобщений периодической задачи). Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы поверхности основания выделена в явном виде. Это позволяет проводить расчеты для реальных форм поверхности покрытий, часто описываемых быстро осциллирующими функциями.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gibson I., Rosen D., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. New York: Springer, 2015. 498 p.
- [2] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
- [3] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.

[4] Манжиров А. В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 684–693.

[5] Манжиров А. В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1019–1025.

[6] Манжиров А. В., Александров В. М. О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ. 1987. № 5. С. 146–152.

[7] Манжиров А. В., Черныш В. А. О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 112–118.

[8] Манжиров А. В., Черныш В. А. Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 101–109.

[9] Манжиров А. В., Казаков К. Е. Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактным задачам для тел с неоднородными покрытиями // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела: сб. трудов / под ред. Р. В. Гольдштейна. Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2009. С. 238–263.

[10] Kazakov K., Kurdina S., Manzhirou A. Multibody Contact Problems for Discretely Growing Systems // IUTAM Symposium on Growing solids. Symposium Materials. Edited by A. Manzhirou and N. Gupta. M.: ИПМех РАН. 2015. P. 39–42.

[11] Polyanin A. D., Manzhirou A. V. Handbook of Integral Equations. Second Edition. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 1144 p.

A. V. Manzhirov<sup>1,2,3</sup>, S. P. Kurdina<sup>2</sup>, K. E. Kazakov<sup>2</sup>, I. Fedotov<sup>4</sup>

## CONFORMAL CONTACT BETWEEN A VISCOELASTIC FOUNDATION WITH ROUGH COATING AND A FINITE SYSTEM OF IDENTICAL RIGID PUNCHES

<sup>1</sup>*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

<sup>3</sup>*National Research Nuclear University (MEPhI), Moscow, Russia*

<sup>4</sup>*Tshwane University of Technology, Pretoria, South Africa*

**Abstract.** Various coatings are used in the manufacturing of machine, device, and instrument parts to improve the strength characteristics of the latter in the designed contact regions. Such coatings are applied layer by layer with the use of modern additive technologies [1]. The paper deals with the contact interaction of a coated base with a system of identical rigid dies, the shape of the coating surface being completely identical to that of the die bases. Such a situation occurs, e.g., if the coating is applied by laser cladding or bonding and the rigid die is partly immersed in the still unhardened coating. Depending on the processing technique, the surface shape can be described by rather complicated functions, which are often rapidly oscillating. From the viewpoint of the classification of contact problems, we make one more step in the complication of the periodic contact problem: all dies are identical, but the system is finite (e.g., see [2]–[10]). From the viewpoint of integral equations, we consider a vector integral equation with matrix kernel and with one rapidly oscillating function in the free term [11].

**Keywords:** coating, additive technology, multibody contact, tilt angle, settlement, surface shape, system of integral equations, rapidly oscillating function.

## REFERENCES

[1] Gibson I., Rosen D., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. New York: Springer, 2015. 498 p.

---

*Manzhirov Alexander Vladimirovich*

**e-mail:** manzh@inbox.ru, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Foreign Member of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Deputy Director of the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Professor of the Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; Professor of the Department of Higher Mathematics at the National Research Nuclear University (MEPhI), Moscow, Russia.

*Kurdina Svetlana Pavlovna*

**e-mail:** svetlana-ka@yandex.ru, Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

*Kazakov Kirill Evgenievich*

**e-mail:** kazakov@ipmnet.ru, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

*Fedotov Igor*

Ph.D., Professor of Department of Mathematics and Statistics at the Tshwane University of Technology, Pretoria, South Africa.

- [2] Arutyunyan N. Kh., Manzhairov A. V., Naumov V. E. Contact Problems of Mechanics of Growing Bodies. Moscow: Nauka, 1991. 176 p.
- [3] Arutyunyan N. Kh., Manzhairov A. V.. Contact Problems of the Theory of Creep. Erevan: Izd-vo Inst. Mekaniki NAN RA, 1999. 318 p.
- [4] Manzhairov A. V. Axisymmetric contact problems for non-uniformly aging layered viscoelastic foundations // J. Appl. Math. Mech. 1983. Vol. 47. Issue 4. P. 558–566.
- [5] Manzhairov A. V. On using the more-accurate equations of thin coatings in the theory of axisymmetric contact problems for composite foundations // J. Appl. Math. Mech. 1985. Vol. 49. Issue 6. P. 770–777.
- [6] Alexandrov V. M., Manzhairov A. V. Two-dimensional integral equations in applied mechanics of deformable solids // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1987. Vol. 28. № 5. P. 781–786.
- [7] Manzhairov A. V., Chernysh V. A. On the interaction of a rigid reinforcing sleeve and inhomogeneous aging high-pressure pipes // Izv. AN SSSR. MTT. 1988. № 6. P. 112–118.
- [8] Manzhairov A. V., Chernysh V. A. Contact problem for a layered inhomogeneous aging cylinder reinforced by a rigid ring // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1990. Vol. 30. № 6. P. 894–900.
- [9] Manzhairov A. V., Kazakov K. E. Projection method for solving mixed integral equations of mechanics and its application in contact problems for bodies with inhomogeneous coatings // Actual Problems in Mechanics: mechanics of solids: collection of papers / Edited by R. V. Goldstein. Ishlinsky Institute for problems in mechanics. Moscow: Nauka, 2009. P. 238–263.
- [10] Kazakov K., Kurdina S., Manzhairov A. Multibody Contact Problems for Discretely Growing Systems // IUTAM Symposium on Growing solids. Symposium Materials. Edited by A. Manzhairov and N. Gupta. M.: ИПИМех РАН. 2015. P. 39–42.
- [11] Polyanin A. D., Manzhairov A. V. Handbook of Integral Equations. Second Edition. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 1144 p.