

В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев, В. И. Гультьяев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ОБРАЗА  
ПРОЦЕССА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
СТАЛИ ПО СЛОЖНЫМ ПЛОСКИМ ОКРУЖНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

**Аннотация.** Представлены результаты численного моделирования процесса непропорционального упругопластического деформирования стали 45 по сложной плоской траектории с участком постоянной кривизны. Использована теория процессов А. А. Ильюшина и математическая модель В. Г. Зубчанинова, учитывающая все параметры сложного нагружения для плоских траекторий. Для оценки достоверности используемых определяющих соотношений результаты численного моделирования сопоставлены с данными физического эксперимента, проведенного на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ. Установлена правильность моделирования непропорционального пластического деформирования стали 45 с использованием предлагаемой математической модели. Показано, что отсутствие некоторых параметров сложного нагружения в аппроксимациях функционалов дает расчетные результаты, отличающиеся от экспериментальных данных.

**Ключевые слова:** пластичность, математическая модель, численное моделирование, верификация, сложное нагружение, плоская криволинейная траектория, векторные и скалярные свойства материалов, испытательный комплекс СН-ЭВМ.

УДК: 539.3

**1. Основные уравнения и определяющие соотношения теории процессов упругопластического деформирования материалов.** В теории процессов А. А. Ильюшина тензоры напряжений и деформаций представляются [1]–[3] в виде

$$(\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \Theta(\Theta_{ij}^*), \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

---

© Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультьяев В. И., 2015  
Зубчанинов Владимир Георгиевич  
e-mail: vlgzub@gmail.com, доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.  
Алексеев Андрей Алексеевич  
e-mail: alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.  
Гультьяев Вадим Иванович  
e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} \quad (2)$$

— модули шаровых тензоров и тензоров-девиаторов соответственно (первые и вторые инварианты);

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0, \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad \Theta_{ij}^* = \frac{\Theta_{ij}}{\Theta} \quad (3)$$

— компоненты девиаторов и их направляющих тензоров;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

При простом (пропорциональном) нагружении направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают, то есть  $(S_{ij}^*) = (\Theta_{ij}^*)$ , и с учетом упругости объемной деформации имеют место соотношения теории малых упругопластических деформаций А. А. Ильюшина [4]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\Theta} \Theta_{ij} = 2G_p \Theta_{ij}, \quad \sigma = \Phi(\Theta) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Здесь  $K$  — упругий модуль объемной деформации;  $2G_p$  — удвоенный пластический модуль сдвига;  $\sigma = \Phi(\Theta)$  — универсальная функция единой диаграммы деформирования материалов Роша и Эйхингера, которая для произвольного напряженно-деформированного состояния определяет только скалярные свойства материала.

При сложном (непропорциональном) нагружении направляющие тензоры напряжений и деформаций, а также их скоростей не равны между собой, то есть  $(S_{ij}^*) \neq (\Theta_{ij}^*)$ ,  $(\dot{S}_{ij}^*) \neq (\dot{\Theta}_{ij}^*)$ . В этом случае учет в определяющих соотношениях (1) только скалярных свойств материалов недостаточен. А. А. Ильюшин предложил [1, 2] векторное представление деформаций и напряжений в линейном координатном шестимерном евклидовом пространстве с ортогоизированым неподвижным базисом  $\{\hat{i}_k\}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ . В этом пространстве  $E_6$  тензорам напряжений и деформаций ставятся в соответствие векторы напряжений  $\bar{S}$  и деформаций  $\bar{\Theta}$

$$\begin{cases} \bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{\sigma}, & \bar{S}^0 = S_0 \hat{i}_0, \quad \bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \\ \bar{\Theta} = \bar{\varepsilon}^0 + \bar{\Theta}, & \bar{\varepsilon}^0 = \Theta_0 \hat{i}_0, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (5)$$

где  $\bar{S}^0$ ,  $\bar{\varepsilon}^0$  — векторы напряжений и деформаций объемного растяжения-сжатия в одномерном пространстве;  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\Theta}$  — векторы напряжений и деформаций формоизменения в пятимерном девиаторном пространстве  $E_5$ . Координаты векторов связаны с компонентами тензоров и девиаторов взаимно-однозначными преобразованиями [1–3]

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{3} \sigma_0, \quad S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11}, \quad S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12}, \\ S_4 &= \sqrt{2} S_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2} S_{13}, \\ \Theta_0 &= \sqrt{3} \varepsilon_0, \quad \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \Theta_{11}, \quad \Theta_2 = \frac{\Theta_{22} - \Theta_{33}}{\sqrt{2}}, \quad \Theta_3 = \sqrt{2} \Theta_{12}, \\ \Theta_4 &= \sqrt{2} \Theta_{23}, \quad \Theta_5 = \sqrt{2} \Theta_{13}, \end{aligned} \quad (6)$$

а модули векторов  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\Theta}$  равны соответственно

$$\sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{S_k S_k}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} = \sqrt{\Theta_k \Theta_k}. \quad (7)$$

В пространстве  $E_5$  конец вектора деформаций  $\bar{\Theta} = \Theta \hat{\Theta}$  описывает траекторию деформирования  $\bar{\Theta}(s)$  с длиной дуги  $s$ , которая отображает в этом пространстве процесс

деформирования материала при его формоизменении. В каждой точке этой траектории  $\bar{\Theta}(s)$  строится естественный обобщенный ортонормированный репер Френе—Ильюшина  $\{\hat{p}_k\}$ , где  $k = 1, 2, \dots, 5$ , а также вектор напряжений  $\bar{\sigma} = \sigma\hat{\sigma}$  и его приращение  $d\bar{\sigma}/ds$ , где  $\bar{\Theta}$  и  $\hat{\sigma}$  — единичные векторы деформаций и напряжений соответственно. Совокупность траектории деформирования  $\bar{\Theta}(s)$  и векторов  $\bar{\sigma}$ ,  $d\bar{\sigma}/ds$ , построенных в каждой ее точке вместе с соответствующей температурой  $T$ , модулем  $\varepsilon_0$  и нетермомеханическими параметрами  $\beta$  образуют *геометрический образ физического процесса деформирования* в девиаторном пространстве  $E_5$ . Очевидно, что направления и длины векторов  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\Theta}$ , характеризующих траекторию и процесс деформирования, будут зависеть от инвариантов тензоров, параметров кривизны и кручения траектории  $\kappa_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), температуры  $T$  и параметров  $\beta$ .

На основе частного постулата изотропии А. А. Ильюшина [1], В. Г. Зубчаниновым получены [3] определяющие соотношения связи векторов напряжений и деформаций в  $E_5$ , локальная форма которых для трехмерных задач имеет вид

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3. \quad (8)$$

Здесь

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}_3) \quad (9)$$

единичный вектор напряжений;  $\vartheta_1, \vartheta_2$  — углы сближения и депланации, которые являются полярными сферическими координатами вектора  $\bar{\sigma}$  в подвижном репере Френе  $\{\hat{p}_k\}$  ( $k = 1, 2, 3$ ), для которого

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\kappa_2} \left[ \kappa_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2} \right) \right]; \quad (10)$$

$$M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2; \quad (11)$$

$M_1, M_3, d\sigma/ds$  — функционалы процесса деформирования, зависящие от параметров сложности процесса:  $s$  — длины дуги траектории деформирования, углов ее излома  $\vartheta_1^0$  и параметров кривизны  $\kappa_1$  и кручения  $\kappa_2$ .

Для определения углов  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  используются дифференциальные нелинейные уравнения [3]

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 \cos \vartheta_2 &= \frac{1}{\sigma} (-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2), \\ \sin \vartheta_1 \left( \frac{d\vartheta_2}{ds} + \kappa_2 \right) &= \kappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае плоских траекторий при  $\vartheta_2 = 0, \kappa_2 = 0$  из (8), (12) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} &= M_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \left( \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} &= - \left( \frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1 + \kappa_1 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Угол сближения  $\vartheta_1$ , который характеризует отклонение вектора напряжений  $\bar{\sigma}$  от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке является функционалом параметров сложности процесса  $\vartheta_1 = \vartheta_1(s, \vartheta_1^0, \kappa_1)$ . Этот угол отражает влияние

векторных свойств материала на процесс деформирования, а  $\sigma = \sigma(s, \vartheta_1^0, \kappa_1)$ , являющийся функционалом тех же параметров, — влияние скалярных свойств материала.

В простейших случаях сложного нагружения, близких к простому, то есть когда траектории деформирования близки к прямолинейному пропорциональному нагружению, например, по траекториям малой кривизны, может быть использован приближенный закон упрочнения Одквиста—Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s) \quad (14)$$

мало отличающейся от универсального закона Роша и Эйхингера  $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$  при простом нагружении. В (14) всегда  $s \geq \mathcal{E}$  и в явном виде не учитывается история сложного нагружения, то есть считается, что она слабо влияет на процессы сложного нагружения. Такое пренебрежение параметрами  $\kappa_1$  и  $\vartheta_1^0$  в соотношении (14) при практических расчетах может приводить к недостоверным результатам, особенно для траекторий средней и большой кривизны, а также траекторий с большими углами излома  $\vartheta_1^0 \geq 90^\circ$ . Поэтому создание новых математических моделей, описывающих неупругое деформирование материалов и построение на их базе более точных аппроксимаций функционалов, учитывающих все параметры сложности процесса, является важной задачей теории пластичности.

**2. Математическая модель теории процессов в плоских задачах.** К основным уравнениям математической модели теории процессов в плоских задачах относятся определяющие соотношения (13) и универсальные аппроксимации функционалов В. Г. Зубчанипова [3]

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(s, \vartheta_1^0, \kappa_1) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s) - B\Delta s \kappa_1, \\ \frac{d\sigma}{ds} &= \frac{d\Phi}{ds} + Af_0^p \frac{d\Omega}{ds} - B \frac{d}{ds}(\Delta s \kappa_1); \end{aligned} \quad (15)$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q, \quad (16)$$

где  $\Delta s = s - s_K^T$  — приращение дуги траектории деформирования;  $s_K^T$  — длина дуги в точке ее излома;  $G$ ,  $G_p$  — упругий и пластический модули сдвига для начально-изотропного материала;  $G_p^0$  — значение  $G_p$  в точке излома;

$$\Omega(\Delta s) = -\left(\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b(1 - e^{-\gamma \Delta s})\right), \quad (17)$$

— функция, описывающая "нырок" модуля вектора напряжений и обобщенный эффект Баушингера при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании;

$$f = f(\vartheta_1) = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \quad (18)$$

— функция сложного нагружения, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома траектории;  $A$ ,  $B$ ,  $b$ ,  $\gamma$ ,  $p$ ,  $q$  — материальные параметры для каждого конструкционного материала, экспериментально определяемые из базовых опытов. Обобщенный па сложное нагружение эффект Баушингера рассматривается как проявление общего свойства запаздывания скалярных свойств материалов [3].

При заданных начальных условиях с конкретизированными функционалами (15)–(16), определяющие соотношения (13) приводятся к задаче Коши, которая решалась

с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка точности. Полученные решения при сравнении расчетных и экспериментальных данных позволяют производить верификацию различных вариантов модели, в том числе при неучете некоторых параметров сложности процесса в аппроксимациях функционалов.

### 3. Результаты физического эксперимента и численного моделирования.

По рассмотренной математической модели теории процессов были проведены численные расчеты и экспериментальные исследования упругопластического деформирования (жесткое нагружение) тонкостенного трубчатого образца по плоской траектории, содержащей прямолинейный участок и участок окружности постоянной кривизны. Экспериментальные исследования проводились на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А. А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета.

Трубчатые образцы, выполненные из стали 45 с механическими характеристиками  $E = 2,05 \text{ ГПа}$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $G = 0,788 \text{ ГПа}$ , имели толщину стенки  $h = 1 \text{ мм}$ , радиус срединной поверхности  $r = 15,5 \text{ мм}$ , длину рабочей части  $l = 110 \text{ мм}$ . На рис. 1 приведена полученная при деформировании такого образца экспериментальная диаграмма растяжения материала сталь 45 при нормальной температуре (экспериментальные точки отмечены "кружочками").

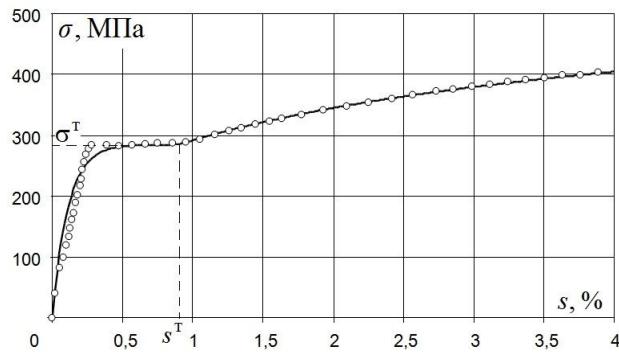


Рис. 1

Ее аппроксимация (сплошная линия на рис. 1) выполнялась по двум участкам с помощью выражений

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha}(1 - e^{-\alpha s}), & \text{при } 0 \leq s < s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_*(1 - e^{-\beta(s-s^T)}), & \text{при } s \geq s^T, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_t$ ;  $\sigma_t$  — предел текучести при растяжении;  $\sigma_*$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $G_*$ , — постоянные параметры. Обработка экспериментальной диаграммы дала следующие численные значения параметров для материала образцов:  $\sigma^T = 286 \text{ МПа}$ ,  $s^T = 9 \cdot 10^{-3}$ ,  $2G = 1,577 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\beta = 70$ ,  $\alpha = 900$ ,  $\sigma_* = 78,8 \text{ МПа}$ ,  $2G_* = 1619 \text{ МПа}$ . Материал образцов в достаточной степени был начально изотропен, что подтверждалось хорошим совпадением диаграммы растяжения с диаграммой простого нагружения при кручении.

Программы испытаний сложного нагружения в условии нормальной температуры при неупорциональном воздействии осевой силы и крутящего момента реализовывались с постоянной скоростью  $\dot{\varepsilon} = 10^{-6}$  сек $^{-1}$  в плоскости  $\mathcal{E}_1$ - $\mathcal{E}_3$  девиаторного пространства деформаций  $E_5$ . В серии проведенных испытаний реализовано несколько траекторий деформирования с участками различной постоянной кривизны  $\kappa_1 = \text{const}$  [5]. Одна из таких двузвенных неаналитических траекторий представлена на рис. 2.

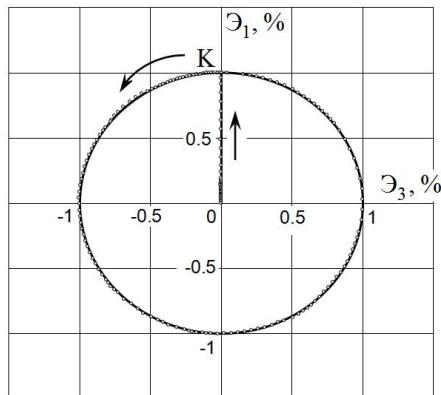


Рис. 2

На первом прямолинейном участке траектории реализовывалось растяжение до значения  $\mathcal{E}_1 = 1\%$ , в точке К начала второго участка производился излом на угол  $\vartheta_1^0 = 90^\circ$  и осуществлялось непропорциональное растяжение с кручением в виде окружной траектории радиуса  $R = \mathcal{E} = 1\%$  и кривизной  $\kappa_1 = 100$  (рис. 2). Для проведения численных расчетов из базовых опытов по типу веера двузвенных траекторий определены значения материальных параметров для материала сталь 45:  $b = 0,125$ ,  $A = 370,2$  МПа,  $B = 23$  МПа,  $\gamma = 386,8$ ,  $p = 1,8$ ,  $q = 0,5$ .

На рис. 3 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в плоскости  $S_1$ - $S_3$  девиаторного пространства напряжений. На рис. 4, 5 представлены диаграммы  $\sigma$ - $s$  и  $\vartheta$ - $\Delta s$ , характеризующие скалярные и векторные свойства материалов соответственно. Локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия  $S_1$ - $\mathcal{E}_1$  и кручения  $S_3$ - $\mathcal{E}_2$  приведены на рис. 6, 7. Экспериментальные точки на рис. 2-7 отмечены кружочками.

Кривые 1 на рис. 3-7 отвечают расчетным данным согласно рассматриваемой математической модели теории процессов в плоских задачах, учитывающей в аппроксимациях функционалов процесса (15) все параметры сложности процесса  $s$ ,  $\kappa_1$ ,  $\vartheta_1^0$  для плоских траекторий и обобщенный эффект Баушингера. Как видно, численные расчеты по представленной математической модели теории процессов с использованием аппроксимаций функционалов (15)-(16) достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным для данного типа траекторий как по скалярным (рис. 3, 4, 6, 7), так и по векторным свойствам (рис. 5).

Кривые 2 на рис. 3-7 получены в предположении  $B = 0$ , то есть без учета влияния кривизны  $\kappa_1$  в аппроксимациях (15). В таком виде функционалы используются для процессов деформирования материалов вида ломаных прямолинейных траекторий и

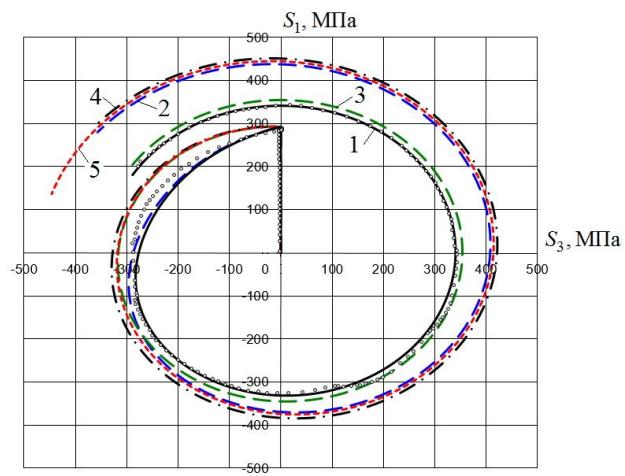


Рис. 3

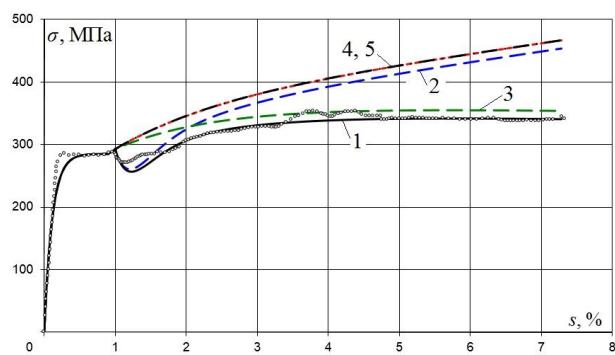


Рис. 4

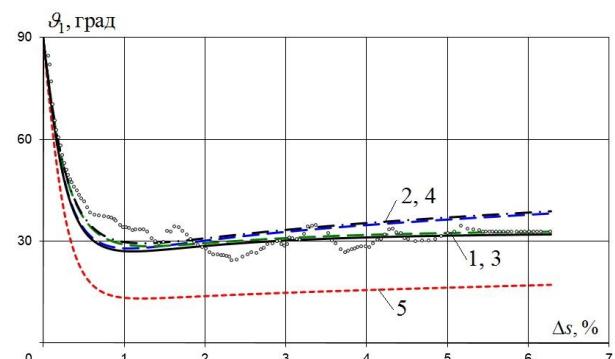


Рис. 5

хорошо зарекомендовали себя для траекторий с большими углами излома, например,

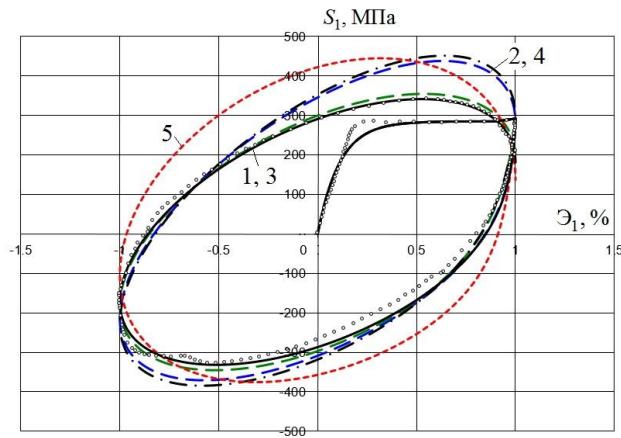


Рис. 6

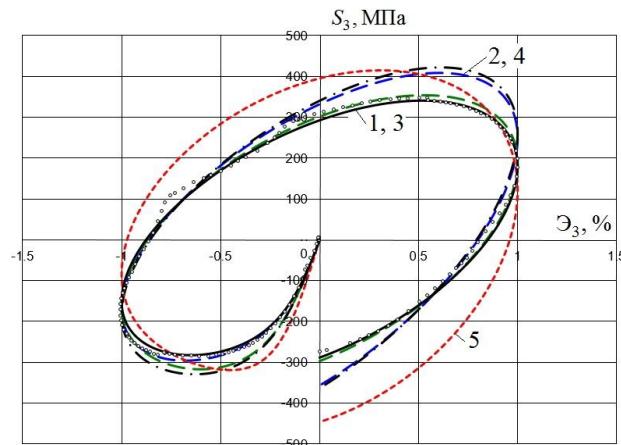


Рис. 7

при  $\vartheta_1^0 = 135^\circ$  [6]. Соответственно, для реализованной криволинейной траектории такой расчет приводит к несоответствию с данными эксперимента по скалярным свойствам (рис. 3, 4, 6, 7). Учет кривизны  $\kappa_1$  во втором определяющем соотношении (13) для определения угла сближения дает удовлетворительное соответствие по векторным свойствам (рис. 5).

Кривые 3 на рис. 3–7 получены в предположении  $A = 0$ , то есть без учета в (15) функции сложного нагружения  $\Omega(\Delta s)$ , описывающей «нырок» напряжений и значения функции  $f(\vartheta_1^0) = f_0$  угла излома траектории, но с учетом кривизны  $\kappa_1$ . В этом случае с ростом длины дуги траектории деформирования после точки ее излома достигается достаточно хорошее соответствие расчетных и опытных данных как по скалярным, так и по векторным свойствам (рис. 3–7). Однако, такой расчет фактически соответствует гладкой траектории без угла излома и неизбежно приведет к ошибочным результатам для больших углов излома  $\vartheta_1^0 > 90^\circ$ , которые существенно

влияют на процесс деформирования и величину скалярного "нырка" модуля вектора напряжений в окрестности точки излома.

Кривые 4 на рис. 3–7 получены в предположении  $A = 0$ ,  $B = 0$ , в аппроксимациях (10), то есть с использованием закона упрочнения Одквиста–Ильюшина  $\sigma = \Phi(s)$  и без учета влияния параметров сложного нагружения  $\kappa_1$ ,  $\vartheta_1^0$ , но с учетом аппроксимации для функционала  $M_1$  по (16), отвечающего за векторные свойства материалов. Кривые 5 на рис. 3–7 представляют результаты расчета по теории пластического течения Прандтля–Рейсса–Хилла для упрочняющихся материалов. В этой теории также используется зависимость  $\sigma = \Phi(s)$ , принимается значение функционала  $M_1 = 2G$  и не учитываются векторные свойства материала в явном виде, но при этом в определяющих соотношениях (13) сохраняется дифференциальное уравнение для определения угла сближения  $\vartheta_1$ . Как видно, обе расчетные кривые 4 и 5 не соответствуют экспериментальным данным по скалярным свойствам (рис. 3, 4, 6, 7). Расчет по теории течения (кривая 5), не учитывающей в явном виде векторные свойства материалов, так же заметно отличаются от опытных данных при определении угла сближения  $\vartheta_1$  (рис. 5). Более подробный анализ расчетных результатов при сложном нагружении по криволинейным траекториям по теориям пластичности, использующим закон упрочнения Одквиста–Ильюшина (14) приведен в [7].

На рис. 8 приведены расчетные значения функционалов  $M_1$  и  $d\sigma/ds$  в зависимости от изменения длины дуги  $\Delta s$  траектории деформирования. Кривые на этом рисунке имеют ту же нумерацию.

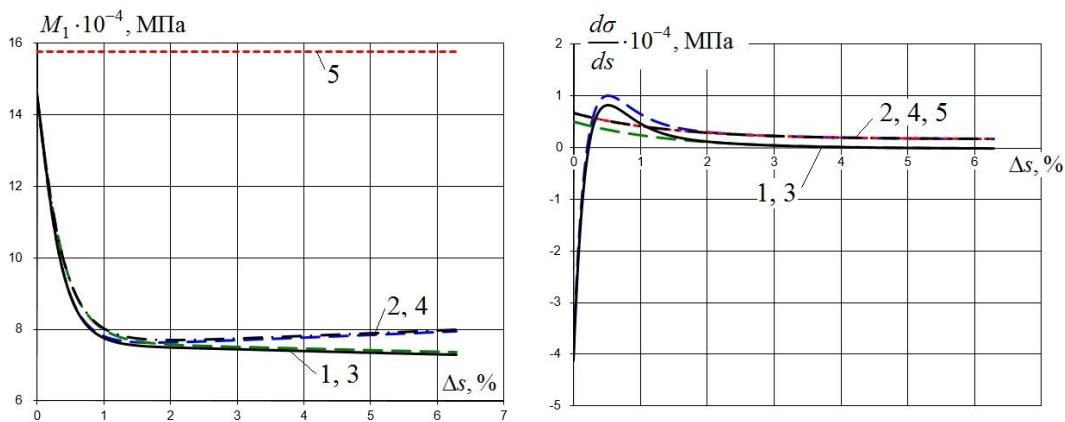


Рис. 8

Как видно, предлагаемая математическая модель теории процессов для плоских траекторий криволинейных дала результаты, хорошо соответствующие экспериментальным данным, а неучет параметров сложного нагружения  $\kappa_1$ ,  $\vartheta_1^0$  привел к отклонению расчетных результатов от данных эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [2] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.

- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Ильюшин А. А. Пластичность. Упругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
- [5] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гульяев В. И. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским криволинейным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77, Ч. 2. С. 113–123.
- [6] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гульяев В. И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двузвездным ломанным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76, Ч. 1. С. 18–25.
- [7] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Алексеева Е. Г. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Materials Physics and Mechanics (MPM). 2015. Vol. 24, № 2. P. 107–118.

V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, V. I. Gulyaev

**NUMERICAL MODELLING AND CREATION OF THE IMAGE OF PROCESS  
UNDER ELASTO-PLASTIC DEFORMATION STEEL ALONG COMPLEX FLAT  
CIRCLE TRAJECTORIES**

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** The results of numerical modeling of process nonproportional elasto-plastic deformation steel 45 along complex flat trajectory with a constant curvature are presented. The theory of processes of A. A. Ilyushin and mathematical model of V. G. Zubchaninov considering all parameters of complex loading for flat trajectories is used. To assess the reliability of used constitutive equations, the numerical simulation results are compared with experimental data conducted on an automated SN-EVM test stand. Set the correct of modeling nonproportional plastic deformation of steel 45 using the proposed mathematical model. It is shown that the absence of some parameters of complex loading in functional approximations gives the calculated results that differ from the experimental data.

**Keywords:** plasticity, mathematical model, numerical simulation, verification, complex loading, flat curved trajectory, vector and scalar properties of materials, SN-EVM test stand.

**REFERENCES**

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory. Moscow: Izdatelstvo AS USSR, 1963. 271 p. (in Russian)

*Zubchaninov Vladimir Georgievich*

e-mail: vlgzub@gmail.com, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Alekseev Andrey Alekseevich*

e-mail: alexeew@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Gulyaev Vadim Ivanovich*

e-mail: vig0@mail.ru, Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

- [2] Ilyushin A. A. Continuum Mechanics. Moscow: Izdatelstvo MSU, 1990. 310 p. (in Russian)
- [3] Zubchaninov V. G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010. 352 p. (in Russian)
- [4] Ilyushin A. A. Plasticity. Elastic- plastic deformation. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian)
- [5] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gul'tyaev V. I. Modeling the processes of complex elastoplastic deformation of materials along flat curvilinear trajectories // Problems of strength and plasticity. 2015. Vol. 77, № 2. P. 113–123. (in Russian)
- [6] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gul'tyaev V. I. Numerical simulation a processes of complex elastoplastic deformation steel on two-link broken trajectories // Problems of strength and plasticity. 2014. Vol. 76, № 1. P. 18–25. (in Russian)
- [7] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G. Mathematical modeling of plastic deformation of materials on complex flat trajectories // Materials Physics and Mechanics (MPM). 2015. Vol. 24, № 2. P. 107–118. (in Russian)