

Г. М. Севастьянов¹, В. И. Штука², А. А. Буренин¹

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД В ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ

¹Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

²Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Получено приближённое решение одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости об ударном скручивающем нагружении цилиндрического слоя, подвергнутого предварительным антиплоским деформациям. Показано, что граничное ударное воздействие распространяется по среде посредством двух поверхностей разрывов деформаций. Указаны особенности построения прифронтных лучевых асимптотик за каждой из поверхностей разрывов и вычисления коэффициентов лучевых рядов согласно условиям совместности разрывов и краевым условиям.

Ключевые слова: нелинейная упругость, большие деформации, динамические задачи, ударные волны, лучевой метод

УДК: 539.3

Введение. Метод приближённого решения существенно нестационарных краевых задач механики деформирования в форме построения прифронтных асимптотических разложений решений при помощи лучевых рядов был независимо предложен Дж. Ахенбахом [1] и Г. И. Быковцевым [2] вместе с учениками. В первом случае лучевой ряд представлялся в форме степенного ряда по времени, во втором – по лучевой координате, отсчитываемой от поверхности разрывов. Коэффициенты таких рядов представляют собой разрывы функций и их производных на фронте волны;

© Севастьянов Г. М., Штука В. И., Буренин А. А., 2015

Севастьянов Георгий Мамиевич

e-mail: akela.86@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Штука Виктор Игоревич

e-mail: onslice@mail.ru, аспирант, инженер-математик, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Буренин Анатолий Александрович

e-mail: burenin@iacp.dvo.ru, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00292).

Поступила 30.09.2015

их построение основано на динамических (следующих из законов сохранения), геометрических и кинематических условиях совместности разрывов [3], [4], [5]. Кинематические условия используются в форме рекуррентных зависимостей, связывающих разрывы функции и её производных по пространственным координатам и времени до любого используемого порядка. Теория таких рекуррентных зависимостей для условий совместности разрывов была завершена сравнительно недавно [6]. Первоначально данный метод использовался для построения решения в прифронтовых областях, деформирование в которых подчинялось линейным системам уравнений. Он оказался также пригодным и для нелинейных систем уравнений с тем только ограничением, чтобы поверхности разрывов не были ударными волнами (поверхностями разрывов деформаций), а только слабыми (звуковыми волнами или, что то же, поверхностями разрывов градиентов деформаций). На ударных волнах рекуррентный характер условий совместности разрывов не следует. Предложение по преодолению таких трудностей было дано в [7]. Оно было основано на дополнительном разложении интенсивности ударной волны в степенной ряд по времени с учётом того, что данная функция задана на продвигающейся поверхности разрывов и, следовательно, коэффициентами разложения оказываются дельта-производные по Томасу [8] от интенсивности по времени, для которых снова следует воспользоваться рекуррентными зависимостями для вычисления производных следующего порядка на каждом шаге вычислений. Таким способом был получен ряд приближённых решений краевых задач нелинейной динамической теории упругости с ударными волнами. Основная их часть помещена в основательный обзор [9], посвящённый главным образом лучевому методу. Далее отметим только публикации, относящиеся к ставящейся задаче.

В [10] приведено решение одномерной задачи об ударе по предварительно продеформированному полупространству. Указаны особенности построения прифронтовых лучевых рядов за тремя движущимися поверхностями разрывов: квазипродольной ударной волной, несущей в деформируемую среду главным образом объёмные деформации, за плоскополяризованной ударной волной сдвиговой нагрузки и за ударной волной круговой поляризации (нейтральной волной). В настоящей работе первую из таких волн с целью упрощения исключим, предположив среду несжимаемой. В работе [11] рассмотрена задача с цилиндрической ударной волной. Однако, полагая отсутствие в среде предварительных деформаций, авторы [11] получили лишь случай с одной распространяющейся ударной волной. Это было связано с целью работы – предложить на основе прифронтовых лучевых разложений способ выделения разрывов на каждом временном шаге численных расчётов. Использование для таких целей прифронтовых асимптотик впервые было предложено в [12]. Отсутствие в динамике деформируемых сред (в отличие от газовой динамики) общепотребимых алгоритмов вычисления на каждом шаге места и интенсивностей разрывов делает подобные подходы перспективными в тех ситуациях, когда методы сквозного счёта по каким-либо причинам применять нежелательно.

Здесь построим только приближённое решение задачи об ударе скручивающим нагружением цилиндрического слоя, подвергнутого предварительной антиплоской деформации, считая, что на малых временах прифронтовые асимптотики с достаточной степенью точности приближают решение динамической задачи. Таким образом, неизвестные коэффициенты лучевых рядов найдём из краевых условий. Построенные асимптотические разложения можно будет использовать в численных расчётах, как

это предлагалось в [11], [13]. В этом случае коэффициенты лучевых рядов определяются решением соответствующей разностной схемы для исходного уравнения движения с учётом прифронтного лучевого разложения для поля перемещений.

Исходные модельные соотношения. Движение несжимаемой упругой среды опишем в пространственных переменных Эйлера x_1, x_2, x_3 зависимостями

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), & \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}) - p\delta_{ij}, \\ 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, & v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \\ & & \dot{u}_i &= \partial u_i / \partial t, & u_{i,j} &= \partial u_i / \partial x_j.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей, ρ и p – плотность среды и функция добавочного всестороннего давления, обусловленная припимаемой несжимаемостью $\rho = const$, α_{ij} и σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций Альманзи и напряжений Коши-Эйлера. Система уравнений (1) окажется замкнутой когда в рассматриваемом здесь адиабатическом приближении для упругой среды упругий потенциал $W = W(\alpha_{ij})$ (массовая плотность распределения внутренней энергии) будет задан в форме функции деформаций α_{ij} . Полагая среду изотропной, такую зависимость принимаем в виде $W = W(A_1, A_2)$, где $A_1 = \alpha_{ii}$, $A_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}$ – инварианты тензора деформаций. То обстоятельство, что в данной зависимости участвуют только два инварианта, следует из принимаемого условия несжимаемости. Более того, осуществимость простейших движений среды (антиплоского, винтового и др.) накладывает дополнительные ограничения [14], такие, что коэффициенты в разложении функции $W(A_1, A_2)$ в ряд Тейлора относительно свободного состояния оказываются зависимыми и число их сокращается. Для рассматриваемого случая винтового движения точек среды следует принять

$$W(A_1, A_2) = -2\mu A_1 - \mu A_2 + bA_1^2 - (\mu - b)A_1A_2 - aA_1^3 + \dots \quad (2)$$

В (2) многоточием отмечены иные не выписанные здесь слагаемые, имеющие четвёртый и более высокие порядки по компонентам α_{ij} тензора деформаций; μ – модуль сдвига, a и b – упругие постоянные более высоких порядков.

Частные решения системы уравнений (1), (2), соответствующие как раз винтовому движению частиц среды в цилиндрической системе координат r, φ, z будем искать в форме зависимостей

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t). \quad (3)$$

В таком случае неизвестными в системе уравнений, следующей из (1), (2), наряду с функцией добавочного всестороннего давления $p = p(r, t)$, остаются осевое перемещение $u(r, t)$ и скрутка $\psi(r, t)$. Действительно, для отличных от нуля компонент тензора деформаций Альманзи имеем

$$\begin{aligned}\alpha_{rr} &= -\frac{1}{2}m, & \alpha_{r\varphi} &= \frac{1}{2}r\psi_{,r}, & \alpha_{rz} &= \frac{1}{2}u_{,r}, \\ m &= u_{,r}^2 + r^2\psi_{,r}^2.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь и далее в индексе после запятой содержится обозначение частной производной по переменной r : $\psi_{,r} = \partial\psi/\partial r$, $u_{,r} = \partial u/\partial r$. Частную производную по переменной t будем обозначать по аналогии: $\psi_{,t} = \partial\psi/\partial t$, $u_{,t} = \partial u/\partial t$.

Следуя формуле Мурнагана из (1), в цилиндрической системе координат для компонент тензора напряжений получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p - 2\mu - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \dots, \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2\mu - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 u_{,r}^2 m + \dots, \\
\sigma_{zz} &= -p - 2\mu - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \mu u_{,r}^2 - \theta_3 r^2 \psi_{,r}^2 m + \dots, \\
\sigma_{\varphi z} &= u_{,r} r \psi_{,r} (\mu + \theta_3 m + \dots), \\
\sigma_{r\varphi} &= \mu r \psi_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots) = \rho h r \psi_{,r}, \\
\sigma_{rz} &= \mu u_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots) = \rho h u_{,r}, \\
\theta_1 &= \frac{\mu + b}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3(a - b + \mu)}{4}, \quad \theta_3 = \frac{b - \mu}{2}, \quad \chi_1 = \frac{\theta_2}{\mu}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Подстановка (5) в уравнение движения, записанное в цилиндрической системе координат для рассматриваемого случая,

$$\begin{cases} \sigma_{rr,r} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = \rho w_r, \\ \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1} \sigma_{r\varphi} = \rho w_\varphi, \\ \sigma_{rz,r} + r^{-1} \sigma_{rz} = \rho w_z, \end{cases} \tag{6}$$

где w_r, w_φ, w_z – компоненты вектора ускорений, приводит к системе трёх дифференциальных уравнений относительно трёх функций $p(r, t)$, $u(r, t)$ и $\psi(r, t)$ при $C = \sqrt{\mu/\rho}$

$$\begin{cases} p_{,r} + r^{-1} (\mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 u_{,r}^2 m) + 2(\theta_1 + 2\theta_2 m) (u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2) = r \psi_{,t}^2, \\ (1 + \chi_1 m^2) (\psi_{,rr} + 3r^{-1} \psi_{,r}) + 4\chi_1 (u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2) \psi_{,r} m = C^{-2} \psi_{,tt}, \\ (1 + \chi_1 m^2) (u_{,rr} + r^{-1} u_{,r}) + 4\chi_1 (u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2) u_{,r} m = C^{-2} u_{,tt}. \end{cases} \tag{7}$$

Ударные волны. Ударной волной называем здесь поверхность Σ разрывов деформаций. Когда деформации на некоторой поверхности претерпевают разрыв, то разрывными окажутся скорости движения среды и напряжений в ней. Следствиями законов сохранения на поверхности разрывов являются ограничения на разрывы, называемые динамическими условиями совместности разрывов [15]. Анализ этих ограничений позволяет сделать выводы о скоростях движения таких поверхностей и соотношениях их интенсивностей. Для случая адиабатической упругой среды и принимаемого условия её несжимаемости содержательным оказывается только следствие закона сохранения импульса на поверхности разрывов

$$[\sigma_{ij}] n_j = \rho^+ (v_j^+ n_j - G) [v_i]. \tag{8}$$

Это динамическое условие совместности разрывов записано в общем виде в прямоугольной декартовой системе координат. В нём квадратными скобками обозначены разрывы величин $[f] = f^+ - f^-$. При этом индексом "плюс" обозначено значение разрывной величины непосредственно перед поверхностью разрывов, индексом "минус" – сразу за такой поверхностью. Ограничение (8) на возможные разрывы справедливы в каждой точке продвигающейся поверхности разрывов Σ , в которой задан единичный вектор внешней нормали с компонентами n_j и величина скорости движения G в

направлении нормали. В рассматриваемом случае (8) сводится к системе трёх уравнений ($n_r = 1, n_\varphi = 0, n_z = 0$):

$$\begin{cases} [\sigma_{rr}] = 0, \\ [\sigma_{r\varphi}] = -\rho G[v_\varphi], \\ [\sigma_{rz}] = -\rho G[v_z]. \end{cases} \quad (9)$$

Первое из соотношений (9) является вспомогательным и служит для вычисления разрыва функции добавочного всестороннего давления $[p]$. Два последних соотношения являются системой двух уравнений, в которые входят три неизвестных $[\psi_{,r}], [u_{,r}], G$. Действительно, перепишем их, опираясь на условие совместности Адамара [8]:

$$[f_{,r}] = -G^{-1}[f_{,t}]. \quad (10)$$

Вычисляя $[\sigma_{r\varphi}], [\sigma_{rz}]$ согласно (5) и исключая $[v_\varphi], [v_z]$ при помощи (10), получим

$$\begin{aligned} h[\psi_{,r}] + (\psi_{,r} - [\psi_{,r}]) [h] &= G^2[\psi_{,r}], \\ h[u_{,r}] + (u_{,r} - [u_{,r}]) [h] &= G^2[u_{,r}], \\ [h] &= C^2[m] (\chi_1 (m - 2[m]) + \dots), \end{aligned} \quad (11)$$

где $h = h^+, \psi = \psi^+, u = u^+, m = m^+$ – значения разрывных функций перед Σ . Далее при обозначении величин перед поверхностью разрывов индекс плюс будем опускать.

Домножим первое уравнение системы (11) на $[u_{,r}]$ а второе – на $[\psi_{,r}]$ и вычтем одно из другого. В результате получим условие существования поверхностей разрывов в форме

$$[h] (\psi_{,r}[u_{,r}] - [\psi_{,r}]u_{,r}) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, в несжимаемой упругой среде могут распространяться поверхности разрывов, на которых необходимо выполнены условия (12), согласно им возможны два случая.

1. Выполнение (12) обеспечивается равенством нулю выражения, содержащегося в скобках

$$\psi_{,r}[u_{,r}] - [\psi_{,r}]u_{,r} = 0,$$

отсюда

$$\frac{r\psi_{,r}}{u_{,r}} = \frac{r[\psi_{,r}]}{[u_{,r}]}. \quad (13)$$

Следовательно такая поверхность разрывов Σ_1 является плоскополяризованной; она не способна изменить направленность присутствующего в среде предварительного сдвига и меняет скачкообразно только его интенсивность. В статье [16] подобная ударная волна в плоском случае называется волной нагрузки. В частности, когда перед Σ_1 присутствуют лишь антишлюские деформации $u_{,r} \neq 0$, а $\psi_{,r} = 0$, то и за такой поверхностью разрывов скручивающие деформации будут отсутствовать: $\psi_{,r}^- = 0$, и наоборот. Термодинамические ограничения (аналог теоремы Цемпелепа для совершенного газа) приводят к существованию ударных волн, увеличивающих предварительный сдвиг, и невозможности существования разгружающих ударных волн [16]. Полагая разрывы функций на Σ_1 известными, найдём скорость движения поверхности разрывов

$$G_1 = \left(h - [h] + \frac{u_{,r}}{[u_{,r}]} [h] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Следовательно, скорость распространения плоскополяризованной ударной волны нагрузки зависит как от уровня предварительных деформаций, так и от интенсивности ударного воздействия на деформируемую среду.

2. Условие существования разрывов (12) будет выполнено при $[h] = 0$ или, что то же, $[m] = 0$. На такой поверхности разрывов Σ_2 не изменяется интенсивность предварительного сдвига, но скачкообразно изменяется его направленность. Такую поверхность разрывов называют нейтральной ударной волной или волной круговой поляризации [16]. Данная ударная волна является изоэнтропической [16] и её скорость полностью определяется предварительными деформациями

$$G_2 = h^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Можно показать [16], что в случае несжимаемой упругой среды $G_1 > G_2$.

Постановка задачи. Лучевой метод. Полагая, что слой несжимаемой упругой среды расположен между двумя цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$) и подвержен осевой антиплоской деформации, связанной с краевыми условиями при $t = 0$:

$$\begin{aligned} \psi(r_0, 0) = 0, \quad \psi(R, 0) = 0, \\ u(r_0, 0) = u_0, \quad u(R, 0) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $u_0 = const$ – задаваемое предварительное смещение границы $r = r_0$. Неизвестные функции $\psi(r) = \psi(r, 0)$ и $u(r) = u(r, 0)$ такой задачи определяем интегрированием уравнения равновесия.

Пусть, начиная с момента времени $t = 0$, на таким способом продеформированный упругий слой производится ударное скручивающее воздействие

$$\begin{aligned} \psi(r_0, t) = \psi_1 t + \psi_2 t^2, \quad \psi(R, t) = 0, \\ u(r_0, t) = u_0, \quad u(R, t) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Данное ударное воздействие согласно предыдущим рассмотрениям приведёт к распространению по слою двух ударных волн Σ_1 и Σ_2 . На рисунке 1 римской цифрой I обозначена область, содержащая только предварительные деформации, когда $r_1 < r < R$, II – область за Σ_1 и перед Σ_2 , когда $r_2 < r < r_1$, III – область за Σ_2 , когда $r_0 < r < r_2$.

Поверхность разрывов Σ_1 является плоскополяризованной ударной волной. Разрывной за ней оказывается только $u_{,r}$ ($[u_{,r}] \neq 0$), в то время как ψ остаётся равной нулю всюду в области II (рис. 1). Приближённое решение в области II будем представлять в форме лучевого ряда

$$\begin{aligned} u^-(r, t) = u(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t - t_1)^j}{j!}, \\ \kappa_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, \quad t_1 = \int_0^r G_1^{-1}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь G_1 вычисляется согласно (14), когда полагается $\psi_{,r} = 0$ и $[\psi_{,r}] = 0$,

$$G_1 = C \left(1 + \chi_1 u_{,r}^4 \left(5 - 10 \frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} + 10 \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^2 - 5 \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^3 + \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^4 \right) + \dots \right).$$

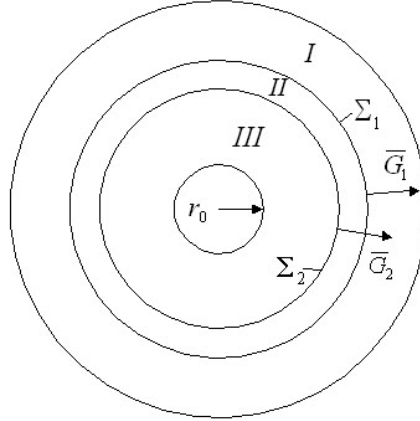


Рис. 1. Схематическое изображение распространяющихся волн разрывов деформаций в цилиндрическом слое

В области III за волной круговой поляризации Σ_2 появляется $\psi^- \neq 0$, поскольку $[\psi_{,r}] \neq 0$. Запишем приближение решения в виде

$$u^-(r, t) = u(r, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(t - t_2)^j}{j!}, \quad \psi^-(r, t) = - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{(t - t_2)^j}{j!}, \quad (19)$$

$$\eta_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad \omega_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad t_2 = \int_0^r G_2^{-1}(\xi) d\xi.$$

Здесь G_2 вычисляется согласно (15), когда в нём полагается действительным представление (18):

$$G_2 = C \left(1 + \chi_1 u_{,r}^4 \left(1 - 4 \frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} + 6 \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^2 - 4 \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^3 + \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^4 \right) + \dots \right).$$

Чтобы определить неизвестные коэффициенты в разложениях (18) и (19), необходимо воспользоваться уравнением движения в разрывах, записанном на Σ_1 и Σ_2 при помощи геометрических и кинематических условий совместности (10) и

$$[f_{,rr}] = G^{-2} \left([f_{,tt}] - 2 \frac{\delta[f_{,t}]}{\delta t} + G^{-1} \frac{\delta G}{\delta t} [f_{,t}] \right). \quad (20)$$

Итак, на волне нагрузки Σ_1 получим

$$A[u_{,rr}] + B = C^{-2}[u_{,tt}], \quad (21)$$

где

$$A = 1 + 5\chi_1 (u_{,r}^4 - [u_{,r}^4] + \dots),$$

$$B = r^{-1}[u_{,r}] (1 + \chi_1 u_{,r}^4) + \chi_1 ((5u_{,rr} + r^{-1}(u_{,r} - [u_{,r}])) [u_{,r}^4] + \dots).$$

Таким образом выразим на волне нагрузки Σ_1 дельта-производную разрыва скорости осевого смещения

$$\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} = \kappa_1 \left(-\frac{1}{2} \frac{C}{r} + 10\chi_1 \frac{u_{,r}^3}{C} (\kappa_2 - C^2 u_{,rr}) \right) + \dots, \quad (22)$$

из чего следует зависимость скорости изменения интенсивности разрыва κ_1 от геометрии поверхности (множитель $-r^{-1}C/2$ при κ_1) предварительных деформаций $u_{,r}$ и величины разрыва ускорения κ_2 .

Поскольку соотношения записаны на поверхности разрывов Σ_1 , то полагаем в (21), (22), что $r = r_1$.

На волне круговой поляризации Σ_2 соотношения будут следующими

$$\begin{aligned} D[\psi_{,rr}] + F[u_{,rr}] + H &= C^{-2}[\psi_{,tt}], \\ K[u_{,rr}] + L[\psi_{,rr}] + M &= C^{-2}[u_{,tt}], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} D &= 1 + \chi_1 (u_{,r}^4 - [m^2] - 4r^2[\psi_{,r}^2 m] + \dots), \quad F = -4\chi_1 [u_{,r} \psi_{,r} m] + \dots, \\ H &= 3r^{-1}[\psi_{,r}] + \chi_1 (3r^{-1}[\psi_{,r}] (u_{,r}^4 - [m^2]) + 4(u_{,rr}[u_{,r} \psi_{,r} m] + r[\psi_{,r}^3 m]) + \dots), \\ K &= 1 + \chi_1 (u_{,r}^4 - [m^2] + 4(u_{,r}^4 - [u_{,r}^2 m]) + \dots), \quad L = -4r^2 \chi_1 [u_{,r} \psi_{,r} m] + \dots, \\ M &= r^{-1}[u_{,r}] + \chi_1 ((u_{,rr} + r^{-1}u_{,r}) [m^2] + r^{-1}[u_{,r}] (u_{,r}^4 - [m^2]) + 4(u_{,rr}[u_{,r}^2 m] + r[u_{,r} \psi_{,r}^2 m]) + \dots). \end{aligned}$$

В (18) коэффициенты A и B определяются величинами разрывов деформаций и состоянием среды перед поверхностью разрывов, а в (23) коэффициенты D , F , H , K , L и M записаны для состояния среды за волной нагрузки через предварительные деформации и разрывы скоростей κ и λ на волне нагрузки согласно (18).

Аналогично запишем систему уравнений на волне круговой поляризации Σ_2

$$\begin{aligned} \frac{\delta \eta_1}{\delta t} &= \eta_1 \left(-\frac{3}{2} \frac{C}{r} + 2\chi_1 \frac{u_{,r}^3}{C} (\kappa_2 - C^2 u_{,rr}) \right) + \\ &+ \chi_1 u_{,r}^2 \kappa_1 \left(3\eta_1 \left(\frac{u_{,r}}{r} + 2 \left(\frac{\kappa_2}{C^2} - u_{,rr} \right) \right) + 2 \frac{\eta_2 u_{,r}}{C} \right) + \dots, \\ \omega_2 &= -\frac{r^2 \eta_1 \eta_2}{C u_{,r}} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\kappa_1}{C u_{,r}} (1 - \chi_1 u_{,r}^4) \right) + \dots, \\ \omega_1 &= -\frac{1}{2} \frac{r^2 \eta_1^2}{C u_{,r}} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) следует зависимость скорости изменения интенсивности разрыва η_1 от геометрии поверхности (множитель $-3r^{-1}C/2$ при η_1), предварительных деформаций $u_{,r}$, величин разрыва скорости κ_1 и ускорений κ_2 , η_2 , а также явная связь коэффициентов ω_2 и η_2 . Поскольку соотношения записаны на поверхности разрывов Σ_2 , то полагаем в (23), (24), что $r = r_2$.

Системы дифференциальных уравнений (21) и (23) относительно дельта-производных, равно как (22) и (24), являются существенно нелинейными, параметрическими и пезамкнутыми. На n -ом шаге лучевого метода на ударных волнах будем

получать соотношения вида

$$f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \frac{\delta \eta_n}{\delta t}, \eta_{n+1}) = 0,$$

которые невозможно разрешить без знания η_{n+1} – по сути параметра, определить который можно только на следующем шаге, который также зависит от параметра – разрыва более старшей производной. В этом и заключается коренное отличие в методе от случая слабых волн (поверхностей разрывов ускорений). В случае линейных уравнений движения данную зависимость также можно рассматривать в качестве обыкновенных дифференциальных уравнений для интенсивностей разрывов (η_{n+1} отсутствует), которые и задают коэффициенты лучевых рядов. В рассматриваемом случае разрывы скоростей и разрывы ускорений ищем в форме рядов на поверхностях разрывов. Для этого воспользуемся дополнительными разложениями функций, положив времена в таких представлениях малыми, чтобы они удовлетворяли решению с достаточной степенью точности в окрестности фронта волны. Разрывы на Σ_1 и Σ_2 запишем в виде

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_1|_{t_1=0} + \frac{\delta \kappa_1}{\delta t}|_{t_1=0} t_1 + \dots \simeq \kappa_{10} + \kappa_{11} t_1, & \kappa_2 &= \kappa_2|_{t_1=0} + \dots \simeq \kappa_{20}, \\ \omega_1 &= \omega_1|_{t_2=0} + \frac{\delta \omega_1}{\delta t}|_{t_2=0} t_2 + \dots \simeq \omega_{10} + \omega_{11} t_2, & \omega_2 &= \omega_2|_{t_2=0} + \dots \simeq \omega_{20}, \\ \eta_1 &= \eta_1|_{t_2=0} + \frac{\delta \eta_1}{\delta t}|_{t_2=0} t_2 + \dots \simeq \eta_{10} + \eta_{11} t_2, & \eta_2 &= \eta_2|_{t_2=0} + \dots \simeq \eta_{20}. \end{aligned} \quad (25)$$

Количество неопределённых коэффициентов в (25) достаточно для первого шага лучевого метода: n -ый шаг метода состоит в том, чтобы воспользоваться уже продифференцированным $n-1$ раз по времени уравнением движения, записанного на волнах нагрузки и круговой поляризации, и красивыми условиями для определения неизвестных коэффициентов лучевых рядов. Чтобы сделать следующий $n+1$ -ый шаг в разложениях (25) необходимо учитывать члены более высоких порядков, чтобы получить алгебраические уравнения на определение соответствующих коэффициентов из системы дифференциальных уравнений.

При помощи (25) запишем (17), (21) и (23) в виде системы, выделяя коэффициенты при t и t^2 ; ω_{10} и ω_{11} являются зависимыми от η_{10} и η_{11} согласно (24). Поскольку мы определяем коэффициенты в разложениях (25) и устремляем t_1 и t_2 к нулю, то r_1 и r_2 стремятся к r_0 , за счёт чего возможно определение неизвестных коэффициентов из краевых условий. Решение данной системы достаточно громоздко для коэффициентов κ_{10} , κ_{11} , κ_{20} , η_{11} , ω_{20} , поэтому представим их лишь первыми слагаемыми

$$\begin{aligned} \kappa_{10} &= \frac{1}{2} \frac{r_0^2 \psi_1^2}{C u_{,r}(r_0)} + \dots, & \kappa_{11} &= -\frac{1}{4} \frac{r_0 \psi_1^2}{u_{,r}(r_0)} + \dots, & \kappa_{20} &= C^2 u_{,rr}(r_0) + \dots, \\ \eta_{10} &= -\psi_1, & \eta_{11} &= \frac{3}{2} \frac{C}{r_0} \psi_1 + \dots, & \eta_{20} &= -\psi_2, & \omega_{20} &= -C^2 u_{,rr}(r_0) + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь, определив все неизвестные коэффициенты в разложениях, можем записать решение за Σ_2 в виде

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= \psi(r) - (\eta_{10} + \eta_{11} t_2) (t - t_2) - \eta_{20} (t - t_2)^2 + \dots, \\ u(r, t) &= u(r) - (\kappa_{10} + \kappa_{11} t_1) (t - t_1) - \kappa_{20} (t - t_1)^2 - \\ &\quad - (\omega_{10} + \omega_{11} t_2) (t - t_2) - \omega_{20} (t - t_2)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{r - r_0}{C (1 + 5\chi_1 u_{,r}^2(r_0) (u_{,r}^2(r_0) + 2C^{-1}\kappa_{10} (C^{-1}\kappa_{10} - u_{,r}(r_0))))} - \\
 &\quad - \frac{5\chi_1 \kappa_{11} u_{,r}^2(r_0) (2C^{-1}\kappa_{10} - u_{,r}(r_0)) (r - r_0)^2}{C^3 (1 + 5\chi_1 u_{,r}^2(r_0) (u_{,r}^2(r_0) + 2C^{-1}\kappa_{10} (C^{-1}\kappa_{10} - u_{,r}(r_0))))^3} + \dots, \\
 t_2 &= \frac{r - r_0}{C (1 + \chi_1 u_{,r}^2(r_0) (u_{,r}^2(r_0) + 2C^{-1}\kappa_{10} (3C^{-1}\kappa_{10} - 2u_{,r}(r_0))))} - \\
 &\quad - \frac{2\chi_1 \kappa_{11} u_{,r}^2(r_0) (3C^{-1}\kappa_{10} - u_{,r}(r_0)) (r - r_0)^2}{C^3 (1 + \chi_1 u_{,r}^2(r_0) (u_{,r}^2(r_0) + 2C^{-1}\kappa_{10} (3C^{-1}\kappa_{10} - 2u_{,r}(r_0))))^3} + \dots
 \end{aligned} \tag{28}$$

Отметим ещё раз рекуррентность описанных процедур определения постоянных лучевых рядов согласно условиям при $r = r_0$.

Заключение. Таким образом, здесь удалось показать, что ударное граничное воздействие в одномерном случае с осевой симметрией распространяется по предварительно продеформированной несжимаемой упругой среде при помощи двух ударных волн. Одна из таких волн является плоскополяризованной цилиндрической поверхностью разрывов (волна нагрузки); другая – волной круговой поляризации (нейтральной ударной волной). Предложен приближённый метод построения лучевых разложений решений за такими поверхностями разрывов и указан способ определения коэффициентов лучевых рядов согласно красным воздействиям. Показано, что волна нагрузки увеличивает предварительный сдвиг, а волна круговой поляризации изменяет его направленность и всегда следует за волной нагрузки при наличии предварительных деформаций. Последние оказывают существенное влияние на скорости ударных волн: чем они больше, тем дальше с течением времени отстоят друг от друга соответствующие поверхности разрывов. Заметим, что предположения о малости деформаций или интенсивностей разрывов принципиально не делалось, что позволяет использовать полученные решения (25), (27), (28) в качестве приближённых для процессов с большими интенсивностями производимых ударных нагрузок. Однако для целей определения коэффициентов лучевых рядов нами использовались лучевые разложения в предположении малости времён ударного воздействия. Данное обстоятельство необходимо учитывать при интерпретации результатов. Такие лучевые ряды с достаточной степенью точности описывают решение за поверхностями разрывов в прифронтальной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Math. und Phys. 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [2] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязко-пластических средах // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, № 1. С. 145–155.
- [3] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальпаука, 1998. 528 с.
- [4] Бледд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

- [5] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
- [6] Герасименко Е. А., Рагозина В. Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, № 1. С. 100–109.
- [7] Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР. 1991. С. 129–137.
- [8] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах. М.: Мир, 1964. 528 с.
- [9] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. mech. rev. 1995. Vol. 48, № 1. P. 1–39.
- [10] Буренин А. А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный мат. сборник. 1999. Вып. 8. С. 49–72.
- [11] Герасименко Е. А., Завертан А. В. Расчеты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе. М.: Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1, № 3. С. 46–56.
- [12] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagations of finite amplitude shock waves // Proc. 1993 Gnt. Symp. of Nonlinear Theory and its Applications. Hawaii, December 5–10. 1993. Vol. 3. P. 1085–1088.
- [13] Буренин А. А., Зиновьев П. В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 146–155.
- [14] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [15] Седов Л. И. Механика сплошных сред. Том 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
- [16] Буренин А. А., Дудко О. В., Лаптева А. А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 14–23.

G. M. Sevastyanov, V. I. Shtuka, A. A. Burenin

**THE RAY METHOD IN APPROXIMATE SOLVE OF SHOCK LOADING OF
NONCOMPRESSIBLE CYLINDRICAL LAYER PROBLEM**

Institute of Machine Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The paper is devoted to an approximate solution of one-dimensional problem of nonlinear dynamic theory of elasticity about the torsional shock load on the cylindrical layer subjected to preliminary antiplane shear. It is shown that the boundary impact action extends in the environment in the form of the two surfaces of deformation discontinuities. The features of construction of frontline ray asymptotics for each surface ruptures and calculating the coefficients of the ray series according to the conditions of compatibility gaps and boundary conditions are specified.

Keywords: nonlinear elasticity, finite deformations, dynamics, shock waves, ray method.

REFERENCES

- [1] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // *Zeitschr. fur angew. Match. und Plus.* 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [2] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Vervevko N. D. The ray method for solving problems in visco-clastic-plastic media // *Applied Mathematics and Mechanics.* 1973. Vol. 37, № 1. P. 145–155. (in Russian).
- [3] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [4] Blend D. Nonlinear dynamic elasticity. M.: Mir, 1972. 183 p. (in Russian).
- [5] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear waves in elastic media. M.: Moscow High School, 1998. 412 p. (in Russian).
- [6] Gerasimenko E. A., Ragozina V. E. Geometric and kinematic constraints on functions discontinuities on moving surfaces // *Far Eastern Mathematical Journal.* 2004. Vol. 5, № 1. P. 100–109. (in Russian).
- [7] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces breaks // In the collection: *Applied problems of mechanics of deformable media.* Vladivostok: FEB AS USSR, 1991. P. 129–137. (in Russian).
- [8] Tomas T. Plastic flow and fracture in solids. M.: Mir, 1964. 528 p. (in Russian).

Sevastyanov Georgiy Mamievich

e-mail: akela.86@mail.ru, Ph. D., Researcher, Institute of Machine Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Shtuka Victor Igorevich

e-mail: onslice@mail.ru, Post-Graduate Student, Mathematician Engineer, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Burenin Anatoly Aleksandrovich

e-mail: burenin@iacp.dvo.ru, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of Russian Academy of Science, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

[9] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. mech. rev. 1995. Vol. 48, № 1. P. 1–39.

[10] Burenin A. A. On a possibility of constructing approximate solutions transient dynamics problems of elastic media under Impact // Far Eastern mathematical collection. 1999. Vol. 8. P. 49–72. (in Russian).

[11] Gerasimenko E. A., Zavertan A. V. The calculations of the dynamics of an incompressible elastic medium and twisting at impact antiplane. M.: Computational Continuum Mechanics, 2008. Vol. 1, № 3. P. 46–56. (in Russian).

[12] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagations of finite amplitude shock waves // Proc. 1993 Gnt. Symp. of Nonlinear Theory and its Applications. – Hawaii, December 5–10. 1993. Vol. 3. P. 1085–1088.

[13] Burenin A. A., Zinoviev P. V. On the problem of isolation surfaces of discontinuity in numerical methods dynamics of deformable media / A. A. Burenin, P. V. Zinoviev // Mechanical problems. Collection of articles on the 90th anniversary A. Yu. Ishlinskii. M.: Fizmatlit. 2003. P. 146–155. (in Russian).

[14] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).

[15] Sedov L. I. Mechanics of Continuous Media. Volume 1. M.: Nauka, 1970. 492 p. (in Russian).

[16] Burenin A. A., Dudko O. V., Lapteva A. A. By the patterns of distribution change of shape deformations // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2011. Vol. 14, № 4. P. 14–23. (in Russian).