

А. В. Никитин, Б. Г. Миронов

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами анизотропии, сохраняющими значение предела текучести постоянным вдоль параллельных прямых. Разработан алгоритм определения предельного напряженного состояния для произвольного числа слоев. В работе [2] исследовано предельное состояние слоистых круговых цилиндров. Понятие трансляционная анизотропия рассматривалась в работах [3]–[7]. В работе [8] исследовано упругопластическое состояние двухслойной трансляционно-анизотропной трубы. Предельное состояние слоистой трубы при наличии трансляционной анизотропии исследовалось также в [11]. В [10] авторами изучено упругопластическое состояние трубы, предел текучести которой сохраняет постоянное значение вдоль параллельных прямых. Случай, когда предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль концентрических эллипсов, рассмотрен в [12].

Ключевые слова: напряжение, пластичность, анизотропия по Мизесу – Хиллу, труба, слой.

УДК: 539.375

Рассмотрим многослойную толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p (рис. 1).

Обозначим через r_1, r_2 внутренний и внешний радиусы 1-го слоя, через r_2, r_3 – внутренний и внешний радиусы 2-го слоя, через r_n, r_{n+1} – внутренний и внешний радиусы n -го слоя.

Условие предельного состояния для n -го слоя примем в виде [2]

$$A_n (\sigma_{xn} - \sigma_{yn})^2 + 4B_n \tau_{xyn}^2 = 4k_n^2, \quad A_n, B_n = \text{const}, \quad n = 1, 2, \dots, t,$$

$$k_n = k_0 + \delta(c_n x + d_n y), \quad (1)$$

где $\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$ – компоненты напряжения в n -ом слое в декартовой системе координат x, y ; $k_0 = \text{const}$.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Поступила 10.11.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-97029) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

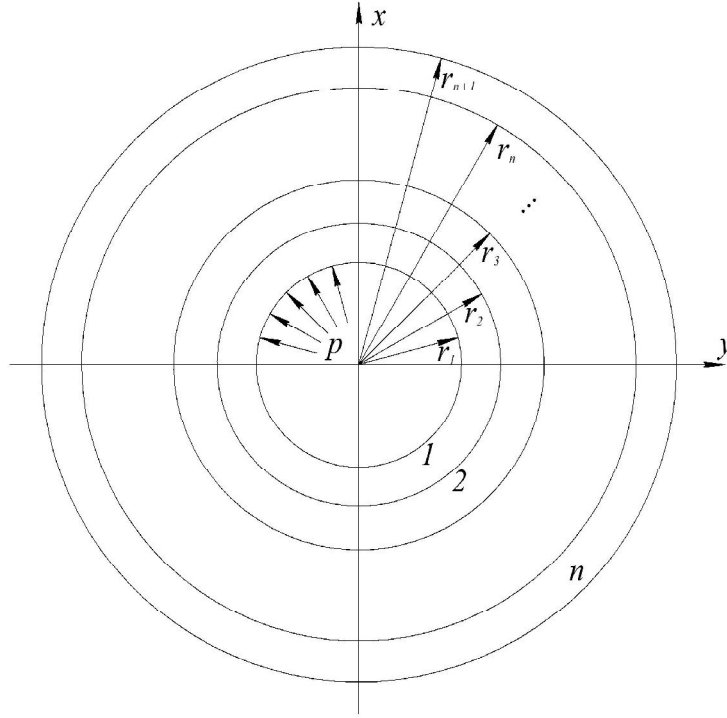


Рис. 1. Многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам: все компоненты напряжения отнесем к величине предела текучести k_0 и обозначим

$$\frac{k_n}{k_0} = \chi_n, \quad \frac{p}{k_0} = q; \quad (3)$$

все величины, имеющие размерность длины отнесем к некоторой характерной величине r_0 и обозначим

$$\frac{r_n}{r_0} = \alpha_n, \quad \frac{r}{r_0} = \rho. \quad (4)$$

Согласно (1)–(4) запишем условие пластичности (1) в виде

$$A_n [(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \cos 2\theta - 2\tau_{\rho\theta n} \sin 2\theta]^2 + B_n [(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \sin 2\theta + 2\tau_{\rho\theta n} \cos 2\theta]^2 = 4\chi_n^2 \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} &(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n})^2 [A_n \cos^2 2\theta + B_n \sin^2 2\theta] + 4\tau_{\rho\theta n}^2 [A_n \sin^2 2\theta + B_n \cos^2 2\theta] - \\ &- 2(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \tau_{\rho\theta n} (A_n - B_n) \sin 4\theta = 4(1 + \delta\rho (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta))^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим, что искомое решение во всех n слоях пластической области зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^{(0)} + \delta\sigma_{ijn}^{(1)}, \quad A_n = 1 + \delta a_n, \quad B_n = 1 + \delta b_n. \quad (7)$$

Положим, что нулевое, исходное напряженное состояние является осесимметричным

$$\tau_{\rho\theta n}^{(0)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Компоненты напряжений в нулевом приближении в первом слое трубы находятся аналогично [1].

Из условия сопряжения решений

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)} = \sigma_{\rho 2}^{(0)} \text{ при } \rho = \alpha_2 \quad (9)$$

имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(0)} &= -q + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} + 2 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\ \sigma_{\theta 2}^{(0)} &= -q + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + 2 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично, используя условие сопряжения компонент напряжений на границе n -го слоя трубы

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \sigma_{\rho n-1}^{(0)p}, \quad \tau_{\rho \theta n}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \tau_{\rho \theta n-1}^{(0)p}, \quad (11)$$

можно найти предельное состояние в n -ом слое в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(0)p} &= -q + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha_n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \\ \sigma_{\theta n}^{(0)p} &= -q + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Линеаризуя соотношения (6), получим

$$\sigma_{\theta n}^{(1)} - \sigma_{\rho n}^{(1)} = 2\rho [c_n \cos \theta + d_n \sin \theta] + \left[\frac{a_n + b_n}{2} + \frac{a_n - b_n}{2} \cos 4\theta \right]. \quad (13)$$

Уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho n}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho \theta n}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho n}^{(1)} - \sigma_{\theta n}^{(1)}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho \theta n}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta n}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho \theta n}^{(1)}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(1)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_{\theta n}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho \theta n}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13), (15) найдем

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \theta^2} = 2\rho^3 (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta) + \rho^2 (G_n + H_n \cos 4\theta), \quad (16)$$

где

$$G_n = \left(\frac{r_n + b_n}{2} \right), \quad H_n = \left(\frac{r_n - b_n}{2} \right). \quad (17)$$

Решение уравнения (16) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi_n^{(1)} = \Phi_n^{(1)}_{\text{одн}} + \Phi_n^{(1)}_{\text{частн}}. \quad (18)$$

Однородное уравнение (16) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (19)$$

Полагая в общем виде

$$\Phi_n^{(1)} = R_1 \cos(m\theta) + R_2 \sin(m\theta) = R_n \cos(m\theta + \theta_0), \quad (20)$$

где

$$\cos(\theta_0) = \frac{R_1}{R_n}, \sin(\theta_0) = \frac{R_2}{R_n}, R_n = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Следуя [1], имеем

$$R_n = C_{00}^{(n)} + C_{01}^{(n)} \text{ при } m = 0, \quad (21)$$

$$R_n = \rho \left(C_{11}^{(n)} + C_{12}^{(n)} \ln \rho \right) \text{ при } m = 1, \quad (22)$$

$$R_n = \rho \left[C_{m1}^{(n)} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + C_{m2}^{(n)} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \text{ при } m \geq 2. \quad (23)$$

Сопоставляя с правой частью (16), имеем сумму R_n при $m = 0, 1, 4$:

$$R_n = \left(C_{00}^{(n)} + C_{01}^{(n)} \right) + \rho \left(C_{11}^{(n)} + C_{12}^{(n)} \ln \rho \right) + \rho \left[C_{m1}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{m2}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right]. \quad (24)$$

Частное решение неоднородного уравнения (16) имеет вид

$$\Phi_n' \text{ частн} = \frac{G_n}{2} (\rho^2 \ln \rho - \rho) + \frac{H_n}{16} \rho^2 \cos 4\theta + \frac{\rho^3}{2} (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta). \quad (25)$$

Решая (15), (18), (20), (24), (25), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(1)} = & C_{00}^{(n)} + \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\ & \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1}^{(n)} \left[(1 - m^2) \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) - (\sqrt{m^2 - 1}) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] + \right. \\ & \left. + C_{m2}^{(n)} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + (1 - m^2) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\ & + \rho (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta) + G_n \ln \rho - \frac{7}{8} H_n \cos 4\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(1)} = & C_{00}^{(n)} + \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\ & \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1}^{(n)} \left[(1 - m^2) \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) - (\sqrt{m^2 - 1}) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] + \right. \\ & \left. + C_{m2}^{(n)} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + (1 - m^2) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\ & + 3\rho (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta) + G_n (1 + \ln \rho) + \frac{1}{8} H_n \cos 4\theta, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho \theta n}^{(1)} = & \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) - \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} (m\sqrt{m^2 - 1}) \times \\ & \times \left[-C_{m1}^{(n)} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + C_{m2}^{(n)} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \sin(m\theta + \theta_0) + \\ & + \rho (c_n \cos \theta - d_n \sin \theta) + \frac{H_n}{4} \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (28)$$

где $C_{00}^{(n)}, C_{m1}^{(n)}, C_{m2}^{(n)} - const$ при $m \geq 1$.

Граничные условия на внутреннем контуре трубы согласно [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(1)p} |_{\rho=\alpha_1} &= 0, \\ \tau_{\rho \theta_1}^{(1)p} |_{\rho=\alpha_1} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (26), (28), (29) имеем

$$C_{00}^{(1)} + \frac{1}{\alpha_1} \left\{ C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \omega_1] + C_{42}^{(1)} [\sqrt{3} \cos \omega_1 - 3 \sin \omega_1] \right\} \cos 4\theta + \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos \theta + \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin \theta = -\alpha_1 (c_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta) - G_1 \ln \alpha_1 + \frac{7}{8} H_1 \cos 4\theta, \quad (30)$$

$$\frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin \theta - \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos \theta + \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_1} \left[-C_{41}^{(1)} \sin \omega_1 + C_{42}^{(1)} \cos \omega_1 \right] \sin 4\theta = \alpha_1 (d_1 \cos \theta - c_1 \sin \theta) - \frac{1}{4} H_1 \sin 4\theta, \quad (31)$$

где $\omega_1 = \sqrt{3} \ln \alpha_1$, в последующем $\omega_n = \sqrt{3} \ln \alpha_n$.

Из (17), (30) получим

$$C_{00}^{(1)} = -G_1 \ln \alpha_1 = -\frac{r_1 + b_1}{2} \ln \alpha_1. \quad (32)$$

Постоянные $C_{41}^{(1)}$, $C_{42}^{(1)}$ найдем из системы уравнений

$$\begin{aligned} C_{41}^{(1)} \cdot M(\alpha_1) + C_{42}^{(1)} \cdot N(\alpha_1) &= \frac{7\alpha_1}{8} H_1, \\ C_{41}^{(1)} (-\sin \omega_1) + C_{42}^{(1)} \cos \omega_1 &= \frac{-\sqrt{3}\alpha_1}{48} H_1, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} M(\alpha_n) &= -3 \cos \omega_n - \sqrt{3} \sin \omega_n, \\ N(\alpha_n) &= \sqrt{3} \cos \omega_n - 3 \sin \omega_n. \end{aligned} \quad (34)$$

Имеет место

$$C_{41}^{(1)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1}, \quad C_{42}^{(1)} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_1}, \quad (35)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \omega_1 & \sqrt{3} \cos \omega_1 - 3 \sin \omega_1 \\ -\sin \omega_1 & \cos \omega_1 \end{vmatrix} = -3. \quad (36)$$

Заметим, что по аналогии с (36) справедливо $\Delta_n = -3$.

$$\Delta_{11} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 (13 \cos \omega_1 + \sqrt{3} \sin \omega_1), \quad \Delta_{21} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 (13 \sin \omega_1 - \sqrt{3} \cos \omega_1). \quad (37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_{41}^{(1)} &= -\frac{\alpha_1}{48} H_1 (13 \cos \omega_1 + \sqrt{3} \sin \omega_1), \\ C_{42}^{(1)} &= -\frac{\alpha_1}{48} H_1 (13 \sin \omega_1 - \sqrt{3} \cos \omega_1). \end{aligned} \quad (38)$$

Далее определим $C_{11}^{(1)}$, $\bar{C}_{11}^{(1)}$. Для этого составим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos \theta &= -c_1 \alpha_1 \cos \theta, \\ \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin \theta &= -d_1 \alpha_1 \sin \theta. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (39) получим

$$\begin{aligned} C_{11}^{(1)} &= -c_1 \alpha_1^2, \\ \bar{C}_{11}^{(1)} &= -d_1 \alpha_1^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Согласно (26), (27), (28), (34), (35), (36), (38), (40), компоненты напряженного состояния $\sigma_{\rho n}^{(1)}$, $\sigma_{\theta n}^{(1)}$, $\tau_{\rho\theta n}^{(1)}$ в первом слое определены, компоненты напряженного состояния $\sigma_{ijn}^{(0)}$ определены согласно (12), суммарное напряженное состояние определяется согласно (7).

Аналогично можно найти напряженное состояния во втором и последующих слоях.

Из условий сопряжения

$$\sigma_{\rho 2}^{(1)} = \sigma_{\rho 1}^{(1)}, \tau_{\rho \theta 2}^{(1)} = \tau_{\rho \theta 1}^{(1)} \text{ при } \rho = \alpha_2. \quad (41)$$

Согласно (26), (27) определим

$$C_{00}^{(2)} + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega_2 - \sqrt{3} \sin \omega_2] + C_{42}^{(2)} [\sqrt{3} \cos \omega_2 - 3 \sin \omega_2] \right\} \cos 4\theta + \\ + \frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos \theta + \frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin \theta = \quad (42)$$

$$= \sigma_{\rho 1}^{(1)}(\alpha_2) - \alpha_2 (c_2 \cos \theta + d_2 \sin \theta) - G_2 \ln \alpha_2 + \frac{7}{8} H_2 \cos 4\theta, \\ \frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin \theta - \frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos \theta - \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_2} \left[-C_{41}^{(2)} \sin \omega_1 + C_{42}^{(2)} \cos \omega_1 \right] \sin 4\theta = \quad (43)$$

$$= \tau_{\rho \theta}^{(1)}(\alpha_2) + \alpha_2 (d_2 \cos \theta - c_2 \sin \theta) - \frac{1}{4} H_2 \sin 4\theta.$$

Из (26), (42) получаем

$$C_{00}^{(2)} = -G_2 \ln \alpha_2 - G_1 \ln \alpha_1. \quad (44)$$

Из (42), (43), (16)–(40) будем иметь

$$\frac{1}{\alpha_2} \left[C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2) \right] = \Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1), \quad (45)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\alpha_2} \left[-C_{41}^{(2)} \sin \omega_2 + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2 \right] = \Sigma_{\rho \theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1).$$

где

$$\Sigma_{\rho 1}(\rho) = \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega] + C_{42}^{(1)} [\sqrt{3} \cos \omega - 3 \sin \omega] \right), \quad (46)$$

$$\Sigma_{\rho \theta 1}(\rho) = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} \left[-C_{41}^{(1)} \sin \omega + C_{42}^{(1)} \cos \omega \right], \quad \omega = \sqrt{3} \ln \rho.$$

Систему уравнений (46) представим в виде

$$C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2) = P_2, \quad (47)$$

$$C_{41}^{(2)} (-\sin \omega_2) + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2 = Q_2,$$

где

$$P_2 = \alpha_2 \left[\Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1) \right], \quad (48)$$

$$Q_2 = \frac{\alpha_2 \sqrt{3}}{12} \left[\Sigma_{\rho \theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1) \right].$$

Из (35), (48) вытекает

$$C_{41}^{(2)} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_2} = -\frac{1}{3} (P_2 \cos \omega - Q_2 \cdot N(\alpha_2)), \quad (49)$$

$$C_{41}^{(2)} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = -\frac{1}{3} (P_2 \sin \omega + Q_2 \cdot M(\alpha_2)),$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 = -3.$$

Справедливо

$$\frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos \theta = \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos \theta - c_2 \alpha_2 \cos \theta, \quad (50)$$

$$\frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin \theta = \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin \theta - d_2 \alpha_2 \sin \theta.$$

Из (50) получаем

$$C_{11}^{(2)} = -c_1 \alpha_1 \alpha_2 - c_2 \alpha_2^2 = -\alpha_2 (c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2), \quad (51)$$

$$\bar{C}_{11}^{(2)} = -d_1 \alpha_1 \alpha_2 - d_2 \alpha_2^2 = -\alpha_2 (d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2).$$

Из (17), (26)–(28), (43)–(51) компоненты напряженного состояния $\sigma_{\rho 2}^{(1)}, \sigma_{\theta 2}^{(1)}, \tau_{\rho \theta 2}^{(1)}$ определены.

С помощью метода математической индукции можно определить компоненты напряжений $\sigma_{\rho n}^{(1)}, \sigma_{\theta n}^{(1)}, \tau_{\rho\theta n}^{(1)}$ при условии, что компоненты $\sigma_{\rho n-1}^{(1)}, \sigma_{\theta n-1}^{(1)}, \tau_{\rho\theta n-1}^{(1)}$ определены.

Аналогично (44) получим

$$C_{00}^{(n)} = -G_n \ln \alpha_n - G_{n-1} \ln \alpha_{n-1} - G_{n-2} \ln \alpha_{n-2} - \dots - G_1 \ln \alpha_1 = - \sum_{i=1}^n G_i \ln \alpha_i. \quad (52)$$

Условие сопряжения решений на границе n -го слоя трубы

$$\sigma_{\rho n}^{(I)} = \sigma_{\rho n-1}^{(I)}, \tau_{\rho n}^{(I)} = \tau_{\rho n-1}^{(I)} \text{ при } \rho = \alpha_n. \quad (53)$$

Из (26), (28), аналогично (49), будем иметь

$$\begin{aligned} C_{41}^{(n)} M(\alpha_n) + C_{42}^{(n)} N(\alpha_n) &= P_{n-1}, \\ C_{41}^{(n)} (-\sin \omega_n) + C_{42}^{(n)} \cos \omega_n &= Q_{n-1}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} P_n &= \alpha_n \left[\sum_{\rho n} (\alpha_n) + \frac{7}{8} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right], \\ Q_n &= \frac{\alpha_n \sqrt{3}}{12} \left[\sum_{\rho\theta n} (\alpha_n) - \frac{1}{4} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right], \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\rho n} (\rho) &= \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(n)} [-3 \cos \omega_n - \sqrt{3} \sin \omega_n] + C_{42}^{(n)} [\sqrt{3} \cos \omega_n - 3 \sin \omega_n] \right), \\ \sum_{\rho\theta n} (\rho) &= \frac{4\sqrt{3}}{\rho} \left[-C_{41}^{(n)} \sin \omega_n + C_{42}^{(n)} \cos \omega_n \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

По аналогии с (49) получим

$$\begin{aligned} C_{41}^{(n)} &= \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{3} (P_{n-1} \cos \omega_{n-1} - Q_{n-1} N(\alpha_n)), \\ C_{42}^{(n)} &= \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{3} (P_{n-1} \sin \omega_{n-1} - Q_{n-1} M(\alpha_n)), \\ \Delta_1 &= \Delta_2 = \dots = \Delta_n = -3, \end{aligned} \quad (57)$$

где P_n, Q_n определены при известных значениях $\sigma_{ijn-1}^{(1)}$.

Аналогично (51)

$$\begin{aligned} C_{11}^{(n)} &= -\alpha_n \left(\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \right), \\ \bar{C}_{11}^{(n)} &= -\alpha_n \left(\sum_{i=1}^n d_i \alpha_i \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Компоненты напряжений $\sigma_{\rho n}^{(1)}, \sigma_{\theta n}^{(1)}, \tau_{\rho\theta n}^{(1)}$ определяются согласно (21)–(58).

Таким образом, из (26)–(50) следует, что свойство анизотропии последовательно оказывают влияние на напряженное состояние последующих слоев: напряженное состояние в “ n -ом” слое будет зависеть от свойств анизотропии всех предыдущих $n-1$ слоев.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] Ивлев, Д. А. О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.
- [3] Ивлев, Д. Д. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (10). – С. 60–62.

[4] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (10). – С. 63–65.

[5] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (10). – С. 66–69.

[6] *Ивлев, Д. Д.* Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (8). – С. 101–106.

[7] *Ивлев, Д. Д.* К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (8). – С. 107–110.

[8] *Кержаев, А. П.* Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (15). – С. 71–81.

[9] *Максимова, Л. А.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. А. Максимова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.

[10] *Никитин, А. В.* Предельное состояние слоистой трансляционно-анизотропной трубы / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16–21 июня 2014 г.): в 2 ч. Ч. 2. – 2014. – С. 101–104.

[11] *Никитин, А. В.* Упругопластическое состояние трансляционно – анизотропной линейно – неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – С. 148–155.

[12] *Никитин, А. В.* Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – С. 137–147.

[13] *Тихонов, С. В.* О двусном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала / С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 161–168.

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ligalas5@mail.ru

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

A. V. Nikitin, B. G. Mironov

LIMIT CONDITION OF A MULTILAYERED ANISOTROPIC THICK-WALLED PIPE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The multilayered thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure is considered. It is supposed that each layer possesses the properties of anisotropy keeping value of a limit of fluidity to constants along parallel straight lines. The algorithm of definition of a limit tension is developed for any number of layers. In work [2] the limit condition of layered circular cylinders is investigated. Concept transmitting anisotropy was considered in works [3]–[7]. In work [8] the elasto-plastic condition of a two-layer transmitting and anisotropic pipe is investigated. The limit condition of a layered pipe with transmitting anisotropy was investigated also in [11]. In [10] authors it is studied elasto-plastic a condition of a pipe which limit of fluidity keeps constant value along parallel straight lines. The case when the limit of fluidity keeps constant value along concentric ellipses, is considered in [12].

Keywords: stress, ductility, translational anisotropy, pipe layer.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Ivlev, D. A.* The limit state of layered circular cylinders of an anisotropic material under internal pressure / D. A. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2 (66). – P. 57–63.
- [3] *Ivlev, D. D.* About dissipative function in the theory of transmitting ideally plastic anisotropy at torsion / D. D. Ivlev, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (10). – P. 60–62.
- [4] *Ivlev, D. D.* About dissipative function in the theory of transmitting ideally plastic anisotropy in case of flat deformation / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (10). – P. 63–65.
- [5] *Ivlev, D. D.* About dissipative function in the theory of transmitting ideally plastic anisotropy at generalization of a condition of plasticity of Mises / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (10). – P. 66–69.
- [6] *Ivlev, D. D.* Questions of the theory of ideally plasticity transmitting anisotropy / D. D. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 1 (8). – P. 101–106.
- [7] *Ivlev, D. D.* To the theory of ideal transmitting plastic anisotropy / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 1 (8). – P. 107–110.
- [8] *Kerzhayev, A. P.* Is elastic a plastic state thick-walled tube under the action of internal pressure at the translational anisotropy / A. P. Kerzhayev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 2 (15). – P. 71–81.
- [9] *Maksimova, L. A.* About an elasto-plastic condition of the non-uniform pipe which is under the influence of internal pressure / L. A. Maksimova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – № 2. – P. 91–95.

[10] *Nikitin, A. V.* Limit condition of a layered transmitting and anisotropic pipe / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Materials VIII of the All-Russian conference on mechanics of a deformable solid body (Cheboksary, on June 16–21, 2014): в 2 р. Part 2. – 2014. – P. 101–104.

[11] *Nikitin, A. V.* Elasto-plastic state translyatsionno - anisotropic linearly – the non-uniform pipe which is under the influence of internal pressure / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – № 4 (80). – P. 148–155.

[12] *Nikitin, A. V.* Influence of nonlinear inhomogeneity of material on an elasto-plastic condition of a thick-walled pipe under the influence of internal pressure at transmitting anisotropy / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – № 4 (80). – P. 137–147.

[13] *Tikhonov, S. V.* About biaxial stretching of the plane from elasto-plastic non-uniform material / S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – № 2. – P. 161–168.

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary