*Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 68–79*

*А. И. Шашкин, И. И. Переяславская*

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

*Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

***Аннотация.*** В статье рассматривается задача о нахождении напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра, находящегося под действием всестороннего осесимметричного давления внешней среды и силы тяжести. Решение проводится в перемещениях, которые представляются быстрыми разложениями, что позволяет в дальнейшем от решения системы дифференциальных уравнений переходить к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений.

***Ключевые слова:*** упругий цилиндр, напряженно-деформированное состояние, учет силы тяжести, граничная функция,быстрые разложения.

*УДК*: 539.371

**Постановка задачи.** Рассматривается упругий цилиндр радиуса $r = a$, лежащий на жестком основании. На внешнем контуре приложена распределенная нагрузка интенсивностью $p$. Вес тела приложен в центре инерции. Решение задачи о нахождении напряженно-деформированного состояния цилиндра может быть выполнено в рамках плоской деформации.

Запишем основные соотношения в цилиндрической системе координат. Используя закон Гука и соотношения Коши, получим уравнения равновесия в форме Ламе:

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{(\lambda+\mu)}{r}\dfrac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} - \dfrac{(\lambda+3\mu)}{r^2}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} + \\ +\dfrac{\mu}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \dfrac{(\lambda+2\mu)}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} - \dfrac{(\lambda+2\mu)}{r^2}U = \gamma\sin\theta, \\ \mu\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \dfrac{\mu}{r}\dfrac{\partial V}{\partial r} - \dfrac{\mu}{r^2}V + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{r}+\lambda\right)\dfrac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \\ +\dfrac{(\lambda+2\mu)}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{(\lambda+\mu)}{r^2}+1\right)\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = \gamma\cos\theta, \end{cases} \tag{1}$$

где $\gamma$ – объемная сила [1], $U(r,\theta), V(r,\theta)$ – компоненты радиального и окружного перемещений.

Центр цилиндра является особой точкой, поэтому, исходя из физических соображений, будем считать, что перемещения и напряжения являются ограниченными функциями [2]:
$|\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, U, V| < \infty$ , $U(r,\theta), V(r,\theta) \in L_2^4(\Omega)$, $\Omega = (0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$.

---

Поступила 19.10.2014

Обозначим границу области определения, равную $2\pi$ через $\theta_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \theta = 0: \quad & \sigma_\theta(r,\theta) = G_1(r),\ \tau_{r\theta}(r,\theta) = G_2(r), \\ \theta = \theta_0: \quad & \sigma_\theta(r,\theta) = G_3(r),\ \tau_{r\theta}(r,\theta) = G_4(r). \end{aligned} \tag{2}$$

Считаем, что $G_i(r)$, $i = 1..4$ удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности. Помимо этого, можно считать, что в центре цилиндра компонента перемещений $V(r,\theta) = 0$,а $U(r,\theta)$ достигает экстремума.

На внешней границе $r = a$ заданы нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_r(r,\theta) = F_1(\theta), \qquad \tau_{r\theta}(r,\theta) = F_2(\theta). \tag{3}$$

Таким образом, приходим к краевой задаче (1) со смешанными граничными условиями (2) и (3).

**Поиск решения с помощью метода быстрых разложений.** Используем разложения по углу $\theta$. Компоненты перемещений представим в следующем виде [3]:

$$U = M_2 + \sum_{m=1}^{N} U_m(r) \sin\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right),\ V = M_3 + v_0(r) + \sum_{m=1}^{N} V_m(r) \cos\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right), \tag{4}$$

где $N$ — число рассматриваемых членов в рядах Фурье, $M_2$ и $M_3$ – граничные функции, которые имеют вид

$$\begin{aligned} M_2 = A_1(r)\left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + A_2(r)\frac{\theta}{\theta_0} + A_3(r)\times \\ \times\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + A_4(r)\left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} M_3 = B_1(r)\left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0}\right) + B_2(r)\frac{\theta^2}{2\theta_0} + B_3(r)\times \\ \times\left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{6}\right) + B_4(r)\left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{12}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1(r) = U(r,0),\ A_2(r) = U(r,\theta_0),\ A_3(r) = U_{\theta\theta}(r,0),\ A_4(r) = U_{\theta\theta}(r,\theta_0), \\ B_1(r) = V(r,0),\ B_2(r) = V(r,\theta_0),\ B_3(r) = V_{\theta\theta}(r,0),\ B_4(r) = V_{\theta\theta}(r,\theta_0). \end{aligned} \tag{6}$$

Данное представление приводит к наиболее удобной вычислительной схеме, т. к. в первом уравнении системы производная от функции $U$ по $\theta$ – вторая, а от $V$ по $\theta$ – первая, во втором уравнении наоборот – от $V$ по $\theta$ – вторая, а от$U$ по $\theta$ – первая. Тогда, при использовании для $U$ синус-разложения и косинус-разложения для $V$ , мы получим старшие производные от этих разложений по синусам в первом уравнении и по косинусам – во втором. Метод быстрых разложений, использование граничных функций, а так же быстрая сходимость рядов Фурье подробно рассмотрены в работах [4], [5], [6], [7].

После подстановки (4) и (5) в уравнения равновесия (1) мы получим следующую систему:

$$
\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)[\tfrac{\partial^2 A_1(r)}{\partial r^2}(1-\tfrac{\theta}{\theta_0})+\tfrac{\partial^2 A_2(r)}{\partial r^2}\tfrac{\theta}{\theta_0}+\tfrac{\partial^2 A_3(r)}{\partial r^2}(\tfrac{\theta^2}{2}-\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{3})+\\
+\tfrac{\partial^2 A_4(r)}{\partial r^2}(\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{6})+\sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial^2 U_m(r)}{\partial r^2}\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\tfrac{(\lambda+\mu)}{r}[\tfrac{\partial B_1(r)}{\partial r}(1-\\
-\tfrac{\theta}{\theta_0})+\tfrac{\partial B_2(r)}{\partial r}\tfrac{\theta}{\theta_0}+\tfrac{\partial B_3(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^2}{2}-\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{3})+\tfrac{\partial B_4(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{6})+\\
+\sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial V_m(r)}{\partial r}\tfrac{m\pi}{\theta_0}\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]-\tfrac{(\lambda+3\mu)}{r^2}[B_1(r)(1-\tfrac{\theta}{\theta_0})+B_2(r)\tfrac{\theta}{\theta_0}+\\
+B_3(r)(\tfrac{\theta^2}{2}-\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{3})+B_4(r)(\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{6})-\sum_{m=1}^{N}V_m(r)\tfrac{m\pi}{\theta_0}\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\\
+\tfrac{\mu}{r^2}[A_3(r)(1-\tfrac{\theta}{\theta_0})+A_4(r)\tfrac{\theta}{\theta_0}-\sum_{m=1}^{N}U_m(r)\Big(\tfrac{m\pi}{\theta_0}\Big)^2\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\tfrac{(\lambda+2\mu)}{r}\times\\
\times[\tfrac{\partial A_1(r)}{\partial r}(1-\tfrac{\theta}{\theta_0})+\tfrac{\partial A_2(r)}{\partial r}\tfrac{\theta}{\theta_0}+\tfrac{\partial A_3(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^2}{2}-\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{3})+\tfrac{\partial A_4(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\\
-\tfrac{\theta\theta_0}{6})+\sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial U_m(r)}{\partial r}\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]-\tfrac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[A_1(r)(1-\tfrac{\theta}{\theta_0})+A_2(r)\tfrac{\theta}{\theta_0}+\\
+A_3(r)(\tfrac{\theta^2}{2}-\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{3})+A_4(r)(\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{6})+\sum_{m=1}^{N}U_m(r)\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]-\\
-\gamma\sin\theta=0,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
\mu[\tfrac{\partial^2 B_1(r)}{\partial r^2}(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0})+\tfrac{\partial^2 B_2(r)}{\partial r^2}\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}+\tfrac{\partial^2 B_3(r)}{\partial r^2}(\tfrac{\theta^3}{6}-\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{6})+\tfrac{\partial^2 B_4(r)}{\partial r^2}\times\\
\times(\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{12})+\tfrac{\partial^2 v_0(r)}{\partial r^2}+\sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial^2 V_m(r)}{\partial r^2}\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\tfrac{\mu}{r}[\tfrac{\partial B_1(r)}{\partial r}(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0})+\\
+\tfrac{\partial B_2(r)}{\partial r}\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}+\tfrac{\partial B_3(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^3}{6}-\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{6})+\tfrac{\partial B_4(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{12})+\tfrac{\partial v_0(r)}{\partial r}+\\
+\sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial V_m(r)}{\partial r}\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]-\tfrac{\mu}{r^2}[B_1(r)(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0})+B_2(r)\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}+B_3(r)(\tfrac{\theta^3}{6}-\\
-\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{6})+B_4(r)(\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{12})+v_0(r)+\sum_{m=1}^{N}V_m(r)\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\\
+\tfrac{1}{r}(\tfrac{1}{r}+\lambda)[-\tfrac{\partial A_1(r)}{\partial r}\tfrac{1}{\theta_0}+\tfrac{\partial A_2(r)}{\partial r}\tfrac{1}{\theta_0}+\tfrac{\partial A_3(r)}{\partial r}(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}-\tfrac{\theta_0}{3})+\tfrac{\partial A_4(r)}{\partial r}\times\\
\times(\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}-\tfrac{\theta_0}{6})+\sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial U_m(r)}{\partial r}\tfrac{m\pi}{\theta_0}\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\tfrac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[-B_1(r)\tfrac{1}{\theta_0}+B_2(r)\tfrac{1}{\theta_0}+\\
+B_3(r)(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}-\tfrac{\theta_0}{3})+B_4(r)(\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}-\tfrac{\theta_0}{6})-\sum_{m=1}^{N}V_m(r)\Big(\tfrac{m\pi}{\theta_0}\Big)^2\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\\
+\tfrac{1}{r}(\tfrac{(\lambda+\mu)}{r^2}+1)[-A_1(r)\tfrac{1}{\theta_0}+A_2(r)\tfrac{1}{\theta_0}+A_3(r)(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}-\tfrac{\theta_0}{3})+A_4(r)(\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}-\tfrac{\theta_0}{6})+\\
+\sum_{m=1}^{N}U_m(r)\left(\tfrac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]-\gamma\cos\theta=0.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

В полученных уравнениях $9+2N$ неизвестных функций:

$$
\left\{\begin{array}{l} A_1(r),\ A_2(r),\ A_3(r),\ A_4(r), U_1(r), ..., U_N(r),\\ B_1(r),\ B_2(r),\ B_3(r),\ B_4(r), V_1(r), ..., V_N(r), v_0(r) \end{array}\right\}. \tag{9}
$$

Эти функции зависят только от переменной $r$ . Применим теперь к уравнениям (7) и (8) операторы быстрых разложений: для первого уравнения будем использовать оператор синус-разложения нулевого порядка, для второго – оператор косинус-разложения первого порядка.

Положим в (7) угол $\theta = 0$:

$$
\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 A_1(r)}{\partial r^2}+\frac{(\lambda+\mu)}{r}\frac{\partial B_1(r)}{\partial r}-\frac{(\lambda+3\mu)}{r^2}B_1(r)+\\
+\frac{\mu}{r^2}A_3(r)+\frac{(\lambda+2\mu)}{r}\frac{\partial A_1(r)}{\partial r}-\frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}A_1(r)=0.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Затем берем $\theta = \theta_0$ :

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 A_2(r)}{\partial r^2} + \frac{(\lambda+\mu)}{r}\frac{\partial B_2(r)}{\partial r} - \frac{(\lambda+3\mu)}{r^2}B_2(r) + \\ + \frac{\mu}{r^2}A_4(r) + \frac{(\lambda+2\mu)}{r}\frac{\partial A_2(r)}{\partial r} - \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}A_2(r) - \gamma\sin\theta_0 = 0. \quad (11)$$

Теперь нам необходимо найти коэффициенты Фурье. Для этого нужно (7) умножить на $\sin\left(p\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)$ ,$p = 1...N$ и проинтегрировать по $\theta \in [0;\theta_0]$:

$$(\lambda+2\mu)[\tfrac{\partial^2 A_1(r)}{\partial r^2}k_1 + \tfrac{\partial^2 A_2(r)}{\partial r^2}k_2 + \tfrac{\partial^2 A_3(r)}{\partial r^2}k_3 + \tfrac{\partial^2 A_4(r)}{\partial r^2}k_4 + \\ + \sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial^2 U_m(r)}{\partial r^2}\tfrac{\theta_0}{\pi}k_5] + \tfrac{(\lambda+\mu)}{r}[\tfrac{\partial B_1(r)}{\partial r}k_1 + \tfrac{\partial B_2(r)}{\partial r}k_2 + \tfrac{\partial B_3(r)}{\partial r}k_3 + \\ + \tfrac{\partial B_4(r)}{\partial r}k_4 - \sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial V_m(r)}{\partial r}mk_5] - \tfrac{(\lambda+3\mu)}{r^2}[B_1(r)k_1 + B_2(r)k_2 + \\ + B_3(r)k_3 + B_4(r)k_4 - \sum_{m=1}^{N}V_m(r)mk_5] + \tfrac{\mu}{r^2}[A_3(r)k_1 + A_4(r)k_2 - \\ - \sum_{m=1}^{N}U_m(r)\left(\tfrac{m^2\pi}{\theta_0}\right)k_5] + \tfrac{(\lambda+2\mu)}{r}[\tfrac{\partial A_1(r)}{\partial r}k_1 + \tfrac{\partial A_2(r)}{\partial r}k_2 + \tfrac{\partial A_3(r)}{\partial r}k_3 + \\ + \tfrac{\partial A_4(r)}{\partial r}k_4 - \sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial U_m(r)}{\partial r}\tfrac{\theta_0}{\pi}k_5] - \tfrac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[A_1(r)k_1 + A_2(r)k_2 + \\ + A_3(r)k_3 + A_4(r)k_4 - \sum_{m=1}^{N}U_m(r)\tfrac{\theta_0}{\pi}k_5] + \gamma k = 0, \quad (12)$$

где величины $k_i, i = 1..5$ представляют собой выражения

$$k_1 = \frac{\theta_0(p\pi - \sin(p\pi))}{(p\pi)^2},$$

$$k_2 = \frac{\theta_0(\sin(p\pi) - p\pi\cos(p\pi))}{(p\pi)^2},$$

$$k_3 = \frac{1}{6}\frac{{\theta_0}^3((p\pi)^2\sin(p\pi) - 6p\pi + 6\sin(p\pi))}{(p\pi)^4},$$

$$k_4 = \frac{1}{3}\frac{{\theta_0}^3((p\pi)^2\sin(p\pi) + 3p\pi\cos(p\pi) - 3\sin(p\pi))}{(p\pi)^4}, \quad (13)$$

$$k_5 = \begin{cases} \dfrac{m\cos(m\pi)\sin(p\pi) - p\sin(m\pi)\cos(p\pi)}{m^2 - p^2}, m \neq p, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos(p\pi)\sin(p\pi) - p\pi}{p}, m = p, \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} \dfrac{\theta_0(p\pi\cos(p\pi)\sin(\theta_0) - \theta_0\sin(p\pi)\cos(\theta_0)}{(p\pi)^2 - {\theta_0}^2}, \theta_0 \neq p\pi, \\ \dfrac{1}{2}\left(\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) - \theta_0\right), \theta_0 = p\pi. \end{cases}$$

Таким образом, в результате применения оператора быстрых синус-разложений нулевого порядка мы получили $N+2$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь применение оператора быстрых косинус-разложений. Положим в (8) $\theta = 0$:

$$\mu\frac{\partial^2 B_1(r)}{\partial r^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial B_1(r)}{\partial r}-\frac{\mu}{r^2}B_1(r)+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}+\lambda\right)\frac{\partial A_3(r)}{\partial r}+ \\ +\frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}B_3(r)+\frac{1}{r}\left(\frac{(\lambda+\mu)}{r^2}+1\right)A_3(r)=0. \tag{14}$$

Затем $\theta=\theta_0$:

$$\mu\frac{\partial^2 B_2(r)}{\partial r^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial B_2(r)}{\partial r}-\frac{\mu}{r^2}B_2(r)+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}+\lambda\right)\frac{\partial A_4(r)}{\partial r}+ \\ +\frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}B_4(r)+\frac{1}{r}\left(\frac{(\lambda+\mu)}{r^2}+1\right)A_4(r)+\gamma\sin\theta_0=0. \tag{15}$$

Коэффициенты Фурье, не входящие в сумму ряда, получим, проинтегрировав (8) по $\theta\in[0;\theta_0]$ :

$$\mu\left[\frac{\partial^2 B_1(r)}{\partial r^2}\frac{\theta_0{}^2}{3}+\frac{\partial^2 B_2(r)}{\partial r^2}\frac{\theta_0{}^2}{6}-\frac{\partial^2 B_3(r)}{\partial r^2}\frac{\theta_0{}^4}{45}-\frac{\partial^2 B_4(r)}{\partial r^2}\frac{7\theta_0{}^4}{360}+\frac{\partial^2 v_0(r)}{\partial r^2}\theta_0\right]+ \\ +\frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial B_1(r)}{\partial r}\frac{\theta_0{}^2}{3}+\frac{\partial B_2(r)}{\partial r}\frac{\theta_0{}^2}{6}-\frac{\partial B_3(r)}{\partial r}\frac{\theta_0{}^4}{45}-\frac{\partial B_4(r)}{\partial r}\frac{7\theta_0{}^4}{360}+\frac{\partial v_0(r)}{\partial r}\theta_0\right]- \\ -\frac{\mu}{r^2}\left[B_1(r)\frac{\theta_0{}^2}{3}+B_2(r)\frac{\theta_0{}^2}{6}-B_3(r)\frac{\theta_0{}^4}{45}-B_4(r)\frac{7\theta_0{}^4}{360}+v_0(r)\theta_0\right]+ \\ +\frac{1}{r}(\frac{1}{r}+\lambda)\left[-\frac{\partial A_1(r)}{\partial r}+\frac{\partial A_2(r)}{\partial r}\right]+\frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[-B_1(r)+B_2(r)]+ \\ +\frac{1}{r}(\frac{(\lambda+\mu)}{r^2}+1)[-A_1(r)+A_2(r)]-\gamma\sin\theta_0=0. \tag{16}$$

Остальные коэффициенты Фурье получим, умножив (8) на $\cos\left(p\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right), p=1..N$ и проинтегрировав по $\theta\in[0;\theta_0]$ :

$$\mu[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_1(r)}{\partial r^2}t_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_2(r)}{\partial r^2}t_2-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 B_3(r)}{\partial r^2}t_3-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 B_4(r)}{\partial r^2}t_4+ \\ +\frac{\partial^2 v_0(r)}{\partial r^2}t_5-\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial^2 V_m(r)}{\partial r^2}\frac{\theta_0}{\pi}t_6]+\frac{\mu}{r}\frac{1}{2}\frac{\partial B_1(r)}{\partial r}t_1+\frac{1}{2}\frac{\partial B_2(r)}{\partial r}t_2- \\ -\frac{1}{24}\frac{\partial B_3(r)}{\partial r}t_3-\frac{1}{24}\frac{\partial B_4(r)}{\partial r}t_4+\frac{\partial v_0(r)}{\partial r}t_5-\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial V_m(r)}{\partial r}\frac{\theta_0}{\pi}t_6- \\ -\frac{\mu}{r^2}[\frac{1}{2}B_1(r)t_1+\frac{1}{2}B_2(r)t_2-\frac{1}{24}B_3(r)t_3-\frac{1}{24}B_4(r)t_4+ \\ +v_0(r)t_5-\sum_{m=1}^{N}V_m(r)t_6]+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}+\lambda\right)[-\frac{\partial A_1(r)}{\partial r}\frac{t_5}{\theta_0}+\frac{\partial A_2(r)}{\partial r}\frac{t_5}{\theta_0}- \\ -\frac{\partial A_3(r)}{\partial r}\frac{k_3(p\pi)}{\theta_0}+\frac{\partial A_4(r)}{\partial r}\frac{k_4(p\pi)}{\theta_0}-\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial U_m(r)}{\partial r}mt_6]+ \\ \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[-B_1(r)\frac{t_5}{\theta_0}+B_2(r)\frac{t_5}{\theta_0}+B_3(r)\frac{k_3(p\pi)}{\theta_0}+B_4(r)\frac{k_4(p\pi)}{\theta_0}+ \\ \sum_{m=1}^{N}V_m(r)\frac{m^2\pi}{\theta_0}t_6]+\frac{1}{r}\left(\frac{(\lambda+\mu)}{r^2}+1\right)[-A_1(r)\frac{t_5}{\theta_0}+A_2(r)\frac{t_5}{\theta_0}+ \\ +A_3(r)\frac{k_3(p\pi)}{\theta_0}+A_4(r)\frac{k_4(p\pi)}{\theta_0}-\sum_{m=1}^{N}U_m(r)mt_6]-\gamma t=0, \tag{17}$$

где величины $t_i, i=1..6$ представляют собой выражения

$$t_1=\frac{\theta_0{}^2((p\pi)^2\sin(p\pi)-2p\pi+2\sin(p\pi))}{(p\pi)^3},$$

$$t_2=\frac{\theta_0{}^2((p\pi)^2\sin(p\pi)+2p\pi\cos(p\pi)-2\sin(p\pi))}{(p\pi)^3},$$

$$t_3=\frac{\theta_0{}^4((p\pi)^4\sin(p\pi)+4(p\pi)^2\sin(p\pi)-24p\pi+24\sin(p\pi))}{(p\pi)^5},$$

$$t_4 = \frac{{\theta_0}^4((p\pi)^4\sin(p\pi) + 8(p\pi)^2\sin(p\pi) + 24p\pi\cos(p\pi) - 24\sin(p\pi))}{(p\pi)^5}, \tag{18}$$

$$t_5 = \frac{\theta_0}{p\pi}\sin(p\pi),$$

$$t_6 = \begin{cases} \dfrac{p\cos(m\pi)\sin(p\pi) - m\sin(m\pi)\cos(p\pi)}{m^2 - p^2}, m \neq p, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos(p\pi)\sin(p\pi) + p\pi}{p}, m = p, \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} \dfrac{\theta_0(p\pi\sin(p\pi)\cos(\theta_0) - \theta_0\cos(p\pi)\sin(\theta_0)}{(p\pi)^2 - {\theta_0}^2}, \theta_0 \neq p\pi, \\ \dfrac{1}{2}\left(\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) + \theta_0\right), \theta_0 = p\pi. \end{cases}$$

Выражения (14)–(17) дают нам еще $N+3$ уравнений.

Таким образом, мы получаем систему (10)–(12), (14)–(17), состоящую из $2N+5$ уравнений с $2N+9$ неизвестными. Замкнем систему, используя разложения для граничных условий в особой точке. Подставим разложения для функций $U$ и $V$ в выражения (2) для напряжений $\sigma_\theta$ и $\tau_{r\theta}$ . Получим еще четыре уравнения, замыкающие систему:

$$\lambda\frac{\partial A_1(r)}{\partial r} + \frac{(\lambda+2\mu)}{r}(B_1(r) + A_1(r)) = G_1(r), \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \mu\left(\frac{\partial v_0(r)}{\partial r} + \sum_{m=1}^{N}\frac{\partial V_m(r)}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(v_0(r) + \sum_{m=1}^{N}V_m(r)\right) + \frac{1}{r}\left[-A_1(r)\frac{1}{\theta_0} + \right.\right. \\ \left.\left. + A_2(r)\frac{1}{\theta_0} - A_3(r)\frac{\theta_0}{3} - A_4(r)\frac{\theta_0}{6} + \sum_{m=1}^{N}U_m(r)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)\right]\right) = G_2(r), \end{gathered} \tag{20}$$

$$\lambda\frac{\partial A_2(r)}{\partial r} + \frac{(\lambda+2\mu)}{r}(B_2(r) + A_2(r)) = G_3(r), \tag{21}$$

$$\begin{gathered} \mu[\tfrac{\partial B_1(r)}{\partial r}\tfrac{\theta_0}{2} + \tfrac{\partial B_2(r)}{\partial r}\tfrac{\theta_0}{2} - \tfrac{\partial B_3(r)}{\partial r}\tfrac{{\theta_0}^3}{24} - \tfrac{\partial B_4(r)}{\partial r}\tfrac{{\theta_0}^3}{24} + \tfrac{\partial v_0(r)}{\partial r} \\ + \sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial V_m(r)}{\partial r}\cos(m\pi) - \tfrac{1}{r}[B_1(r)\tfrac{\theta_0}{2} + B_2(r)\tfrac{\theta_0}{2} - B_3(r)\tfrac{{\theta_0}^3}{24} - \\ -B_4(r)\tfrac{{\theta_0}^3}{24} + v_0(r) + \sum_{m=1}^{N}V_m(r)\cos(m\pi)] + \tfrac{1}{r}[-A_1(r)\tfrac{1}{\theta_0} + \\ +A_2(r)\tfrac{1}{\theta_0} + A_3(r)\tfrac{\theta_0}{6} + A_4(r)\tfrac{\theta_0}{3} + \sum_{m=1}^{N}U_m(r)\left(\tfrac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos(m\pi)]] = G_4(r). \end{gathered} \tag{22}$$

Рассмотрим теперь граничные условия (3) на внешней границе $r = a$ и используем предположения относительно компонент перемещений в центре цилиндра. Применим к ним синус- и косинус-разложения:

$$\begin{gathered} B_1(r)\left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0}\right) + B_2(r)\frac{\theta^2}{2\theta_0} + B_3(r)\left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{6}\right) + \\ +B_4(r)\left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{12}\right) + v_0(r) + \sum_{m=1}^{N}V_m(r)\cos\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right) = 0, \end{gathered} \tag{23}$$

$$
\begin{gathered}
-A_1(r)\frac{1}{\theta_0}+A_2(r)\frac{1}{\theta_0}+A_3(r)\left(\theta-\frac{\theta^2}{2\theta_0}-\frac{\theta_0}{3}\right)+\\
+A_4(r)\left(\frac{\theta^2}{2\theta_0}-\frac{\theta_0}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}U_m(r)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)=0,
\end{gathered}\tag{24}
$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)[\tfrac{\partial A_1(r)}{\partial r}(1-\tfrac{\theta}{\theta_0})+\tfrac{\partial A_2(r)}{\partial r}\tfrac{\theta}{\theta_0}+\tfrac{\partial A_3(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^2}{2}-\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{3})+\\
+\tfrac{\partial A_4(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{6})+\textstyle\sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial U_m(r)}{\partial r}\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\tfrac{\lambda}{r}([B_1(r)(1-\tfrac{\theta}{\theta_0})+\\
+B_2(r)\tfrac{\theta}{\theta_0}+B_3(r)(\tfrac{\theta^2}{2}-\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{3})+B_4(r)(\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{6})-\\
-\textstyle\sum_{m=1}^{N}V_m(r)\tfrac{m\pi}{\theta_0}\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+[A_1(r)(1-\tfrac{\theta}{\theta_0})+A_2(r)\tfrac{\theta}{\theta_0}+A_3(r)(\tfrac{\theta^2}{2}-\\
-\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{3})+A_4(r)(\tfrac{\theta^3}{6\theta_0}-\tfrac{\theta\theta_0}{6})+\textstyle\sum_{m=1}^{N}U_m(r)\sin(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})])=F_1(\theta),
\end{gathered}\tag{25}
$$

$$
\begin{gathered}
\mu([\tfrac{\partial B_1(r)}{\partial r}(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0})+\tfrac{\partial B_2(r)}{\partial r}\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}+\tfrac{\partial B_3(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^3}{6}-\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{6})+\\
+\tfrac{\partial B_4(r)}{\partial r}(\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{12})+\tfrac{\partial v_0(r)}{\partial r}+\textstyle\sum_{m=1}^{N}\tfrac{\partial V_m(r)}{\partial r}\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]-\\
-\tfrac{1}{r}[B_1(r)(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0})+B_2(r)\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}+B_3(r)(\tfrac{\theta^3}{6}-\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{6})+\\
+B_4(r)(\tfrac{\theta^4}{24\theta_0}-\tfrac{\theta^2\theta_0}{12})+v_0(r)+\textstyle\sum_{m=1}^{N}V_m(r)\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})]+\tfrac{1}{r}[-A_1(r)\tfrac{1}{\theta_0}+\\
+A_2(r)\tfrac{1}{\theta_0}+A_3(r)(\theta-\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}-\tfrac{\theta_0}{3})+A_4(r)(\tfrac{\theta^2}{2\theta_0}-\tfrac{\theta_0}{6})+\\
+\textstyle\sum_{m=1}^{N}U_m(r)\left(\tfrac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos(m\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})])=F_2(\theta).
\end{gathered}\tag{26}
$$

К (25) применим оператор быстрых синус-разложений, к (23), (24) и (26) – оператор косинус-разложений. В итоге получим систему из $4N+11$ уравнений:

$$v_0(0)+\sum_{m=1}^{N}V_m(0)=0,\tag{27}$$

$$B_1(0)\frac{\theta_0}{2}+B_2(0)\frac{\theta_0}{2}-B_3(0)\frac{{\theta_0}^3}{24}-B_4(0)\frac{{\theta_0}^3}{24}+v_0(0)+\sum_{m=1}^{N}V_m(0)\cos(m\pi)=0,\tag{28}$$

$$B_1(0)\frac{{\theta_0}^2}{3}+B_2(0)\frac{{\theta_0}^2}{6}-B_3(0)\frac{{\theta_0}^4}{45}-B_4(0)\frac{7{\theta_0}^4}{360}+v_0(0)\theta_0=0,\tag{29}$$

$$\frac{1}{2}t_1B_1(0)+\frac{1}{2}t_2B_2(0)-\frac{1}{24}t_3B_3(0)-\frac{1}{24}t_4B_4(0)+v_0(0)t_5-\frac{\theta_0}{\pi}t_6=0,\tag{30}$$

$$-A_1(0)\frac{1}{\theta_0}+A_2(0)\frac{1}{\theta_0}-A_3(0)\frac{\theta_0}{3}-A_4(0)\frac{\theta_0}{6}+\sum_{m=1}^{N}U_m(0)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)=0,\tag{31}$$

$$-A_1(0)\frac{1}{\theta_0}+A_2(0)\frac{1}{\theta_0}+A_3(0)\frac{\theta_0}{6}+A_4(0)\frac{\theta_0}{3}+\sum_{m=1}^{N}U_m(0)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos(m\pi)=0,\tag{32}$$

$$-A_1(0)+A_2(0)=0,\tag{33}$$

$$-A_1(0)\frac{t_5}{\theta_0}+A_2(0)\frac{t_5}{\theta_0}+A_3(0)\frac{p\pi}{\theta_0}k_3+A_4(0)\frac{p\pi}{\theta_0}k_4-\sum_{m=1}^{N}U_m(0)mt_6=0,\tag{34}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial A_1(a)}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}\left(B_1(a)+A_1(a)\right)=F_1(0), \tag{35}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial A_2(a)}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}\left(B_2(a)+A_2(a)\right)=F_1(\theta_0), \tag{36}$$

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left[\tfrac{\partial A_1(a)}{\partial r}k_1+\tfrac{\partial A_2(a)}{\partial r}k_2+\tfrac{\partial A_3(a)}{\partial r}k_3+\tfrac{\partial A_4(a)}{\partial r}k_4-\sum\limits_{m=1}^{N}\tfrac{\partial U_m(a)}{\partial r}\tfrac{\theta_0}{\pi}k_5\right]+\\ +\tfrac{\lambda}{a}\Big(\left[B_1(a)k_1+B_2(a)k_2+B_3(a)k_3+B_4(a)k_4+\sum\limits_{m=1}^{N}V_m(a)k_5\right]+\\ +\left[A_1(a)k_1+A_2(a)k_2+A_3(a)k_3+A_4(a)k_4-\sum\limits_{m=1}^{N}U_m(a)\tfrac{\theta_0}{\pi}k_5\right]\Big)=\\ =\int\limits_0^{\theta_0}F_1(\theta)\sin(p\pi\tfrac{\theta}{\theta_0})d\theta,\end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered}\mu\Big(\left[\frac{\partial v_0(a)}{\partial r}+\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial V_m(a)}{\partial r}\right]-\frac{1}{a}\left[v_0(a)+\sum_{m=1}^{N}V_m(a)\right]+\frac{1}{a}[-A_1(a)\frac{1}{\theta_0}+\\ +A_2(a)\frac{1}{\theta_0}-A_3(a)\frac{\theta_0}{3}-A_4(a)\frac{\theta_0}{6}+\sum_{m=1}^{N}U_m(a)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)]\Big)=F_2(0),\end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered}\mu\Big([\frac{\partial B_1(a)}{\partial r}\frac{\theta_0}{2}+\frac{\partial B_2(a)}{\partial r}\frac{\theta_0}{2}-\frac{\partial B_3(a)}{\partial r}\frac{\theta_0{}^3}{24}-\frac{\partial B_4(a)}{\partial r}\frac{\theta_0{}^3}{24}+\frac{\partial v_0(a)}{\partial r}+\\ +\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial V_m(a)}{\partial r}\cos(m\pi)]-\frac{1}{a}[B_1(a)\frac{\theta_0}{2}+B_2(a)\frac{\theta_0}{2}-B_3(a)\frac{\theta_0{}^3}{24}-\\ -B_4(a)\frac{\theta_0{}^3}{24}+v_0(a)+\sum_{m=1}^{N}V_m(a)\cos(m\pi)]+\frac{1}{a}[-A_1(a)\frac{1}{\theta_0}+A_2(a)\frac{1}{\theta_0}+\\ +A_3(a)\frac{\theta_0}{6}+A_4(a)\frac{\theta_0}{3}+\sum_{m=1}^{N}U_m(a)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos(m\pi)]\Big)=F_2(\theta_0),\end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered}\mu\Big([\frac{\theta_0{}^2}{3}\frac{\partial B_1(a)}{\partial r}+\frac{\theta_0{}^2}{6}\frac{\partial B_2(a)}{\partial r}-\frac{\theta_0{}^4}{45}\frac{\partial B_3(a)}{\partial r}-\frac{7\theta_0{}^4}{360}\frac{\partial B_4(a)}{\partial r}\\ +\frac{\partial v_0(a)}{\partial r}\theta_0]-\frac{1}{a}[\frac{\theta_0{}^2}{3}B_1(a)+\frac{\theta_0{}^2}{6}B_2(a)-\frac{\theta_0{}^4}{45}B_3(a)-\\ -\frac{7\theta_0{}^4}{360}B_4(a)+v_0(a)\theta_0]+\frac{1}{a}\left[-A_1(a)+A_2(a)\right]\Big)=\int\limits_0^{\theta_0}F_2(\theta)d\theta,\end{gathered} \tag{40}$$

$$\begin{gathered}\mu\Big([\frac{\partial B_1(a)}{\partial r}\frac{t_1}{2}+\frac{\partial B_2(a)}{\partial r}\frac{t_2}{2}-\frac{\partial B_3(a)}{\partial r}\frac{t_3}{24}-\frac{\partial B_4(a)}{\partial r}\frac{t_4}{24}+\frac{\partial v_0(a)}{\partial r}t_5-\\ -\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial V_m(a)}{\partial r}\frac{\theta_0}{\pi}t_6]-\frac{1}{a}[B_1(a)\frac{t_1}{2}+B_2(a)\frac{t_2}{2}-B_3(a)\frac{t_3}{24}-B_4(a)\frac{t_4}{24}+\\ +v_0(a)t_5-\sum_{m=1}^{N}V_m(a)\frac{\theta_0}{\pi}t_6]+\frac{1}{a}[-A_1(a)\frac{t_5}{\theta_0}+A_2(a)\frac{t_5}{\theta_0}+A_3(a)\frac{p\pi k_3}{\theta_0}+\\ +A_4(a)\frac{p\pi k_4}{\theta_0}-\sum_{m=1}^{N}U_m(a)mt_6]\Big)=\int\limits_0^{\theta_0}F_2(\theta)\cos(p\pi)d\theta.\end{gathered} \tag{41}$$

Представим теперь $2N+9$ неизвестных функций (9) в виде быстрых разложений:

$$
\begin{aligned}
A_i(r) &= A_i(0)(1-\frac{r}{a}) + A_i\,(a)\,\frac{r}{a} + \frac{\partial^2 A_i(0)}{\partial r^2}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{3})+\\
&+\frac{\partial^2 A_i(a)}{\partial r^2}(\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{6}) + \sum_{m=1}^{N} A_m^i \sin(\frac{m\pi r}{a}),\ i=1..4,\\
B_i(r) &= B_i(0)(1-\frac{r}{a}) + B_i\,(a)\,\frac{r}{a} + \frac{\partial^2 B_i(0)}{\partial r^2}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{3})+\\
&+\frac{\partial^2 B_i(a)}{\partial r^2}(\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{6}) + \sum_{m=1}^{N} B_m^i \sin(\frac{m\pi r}{a}),\ i=1..4,\\
V_i(r) &= V_i(0)(1-\frac{r}{a}) + V_i\,(a)\,\frac{r}{a} + \frac{\partial^2 V_i(0)}{\partial r^2}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{3})+\\
&+\frac{\partial^2 V_i(a)}{\partial r^2}(\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{6}) + \sum_{m=1}^{N} V_m^i \sin(\frac{m\pi r}{a}),\ i=1..4,\\
U_i(r) &= U_i(0)(1-\frac{r}{a}) + U_i\,(a)\,\frac{r}{a} + \frac{\partial^2 U_i(0)}{\partial r^2}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{3})+\\
&+\frac{\partial^2 U_i(a)}{\partial r^2}(\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{6}) + \sum_{m=1}^{N} U_m^i \sin(\frac{m\pi r}{a}),\ i=1..4,\\
v_0(r) &= v_0(0)(1-\frac{r}{a}) + v_0\,(a)\,\frac{r}{a} + \frac{\partial^2 v_0(0)}{\partial r^2}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{3})+\\
&+\frac{\partial^2 v_0(a)}{\partial r^2}(\frac{r^3}{6a}-\frac{ra}{6}) + \sum_{m=1}^{N} v_m^0 \sin(\frac{m\pi r}{a}),\ i=1..4.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Разложение каждой неизвестной функции содержит четыре неизвестных значения соответствующей функции и ее второй производной в точках $r=0$, $r=a$ и $N$ неизвестных констант, являющихся коэффициентами суммы, где верхний индекс – номер раскладываемой функции, нижний индекс – порядковый номер коэффициента. Например, в разложении $A_1(r)$ константы $A_i(0)=A_1(0), A_i(a)=A_1(a)$ – значения функции в крайних точках области $r\in[0,a]$ ,$\frac{\partial^2 A_i(0)}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 A_1(0)}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 A_i(a)}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 A_1(a)}{\partial r^2}$ – значения вторых производных в этих же точках, $A_1^1, A_2^1, ..., A_N^1$ – коэффициенты ряда Фурье. Подставим эти разложения в систему (10)–(12), (14)–(17), (19)–(22). Применяя к уравнениям системы операторы быстрых разложений по переменной $r$, придем к системе $(2N+9)(4+N)$ алгебраических уравнений с таким же количеством неизвестных констант разложений (42), решив которую, получим единственное решение в перемещениях.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Матвеев, С. В.* Упругопластическое состояние среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести / С. В. Матвеев // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 2 (52). – С. 107–114.

[2] *Шаров, А. В.* О напряжениях в режущем инструменте / А. В. Шаров , А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 20–22 сентября 2010 г. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – С. 413–416.

[3] *Чернышов, А. Д.* Применение метода быстрых разложений при рассмотрении математической модели клиновидного режущего инструмента / А. Д. Чернышов, Н. А. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов

Международной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2013 г. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013.

[4] *Чернышов, А. Д.* Быстрые ряды Фурье / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 20–22 сентября 2010. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – С. 388–393.

[5] *Чернышов, А. Д.* Улучшеные ряды Фурье и граничные функции / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 22–24 июня 2009 г. : в 2 ч. Ч. 2. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2009. – С. 236–238.

[6] *Чернышов, А. Д.* О применении быстрых разложений для решения нелинейных задач механики / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 сентября 2011 г. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – С. 412–416.

[7] *Чернышов, А. Д.* Оператор быстрых разложений и теорема единственности быстрых разложений / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 ноября 2012 г. : в 2 ч. Ч. 1. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – С. 401–405.

*Шашкин Александр Иванович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru

*Переяславская Ирина Игоревна,*

*аспирант кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

e-mail: irika5319@yandex.ru

*A. I. Shashkin, I. I. Pereyaslavskaya*

## APPLICATION OF THE METHOD OF FAST DECOMPOSITIONS FOR FINDING THE STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC CYLINDER UNDER THE ACTION OF FORCE OF GRAVITY

*The Voronezh State University*

***Abstract.*** In this article the problem of finding the stress-strain state of an elastic cylinder under the action of comprehensive axisymmetric pressure and force of gravity is considered.Solution is performed in displacements, which represented by fast decompositions. It allows to transfer from solving of the system of differential equations to solving of the system of algebraic equations regarding to the unknown coefficients of decompositions.

***Keywords:*** elastic cylinder,stress-strain state, action of force of gravity,boundary function, fast decompositions .

## REFERENCES

[1] *Matveev, S. V.* Elastic-plastic state of space of space weakened by a horizontal cylindrical cavity / S. V. Matveev // Vestnik the Samara state university. – Natural-science Line. – 2007. – № 2 (52). – P. 107–114.

[2] *Sharov, A. V.* About the stresses in cutting tool / A. V. Sharov, A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 20–22 September 2010. – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2010 – P. 413–416.

[3] *Chernyshov, A. D.* The application of the method of fast decompositions when considering the mathematical model of wedge-shaped cutting tool / A. D. Chernyshov, N. A. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 12–14 Desember 2013. – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2013.

[4] *Chernyshov, A. D.* Fast Fourier Series / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 20–22 September 2010. – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2010 – P. 388–393.

[5] *Chernyshov, A. D.* Improved Fourier Series / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 22–24 June 2009. : in 2 p. P. 2 – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2009 – P. 236–238.

[6] *Chernyshov, A. D.* On the application of fast decompositions for the solution of nonlinear problems of mechanics / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 26–28 September 2011. – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2011 – P. 412–416.

[7] *Chernyshov, A. D.* The operator of fast decompositions and the theorem of uniqueness fast decompositions / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 26–28 November 2012. : in 2 p. P. 1 – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2012 – P. 401–405.

*Shashkin, Alexander Ivanovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh*

*Pereyaslavskaya, Irina Igorevna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh*