

А. В. Башкатов, В. Г. Теличко, А. А. Трещев

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА И ПОЛИМЕРБЕТОНА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Тулльский государственный университет

Аннотация. Рассматривается построение математической модели деформирования железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды. В статье использована математическая модель модификации гибридного конечного элемента для расчета армированных железобетонных плит. Приводятся инкрементальные уравнения, связывающие приращения напряжений с приращениями деформаций.

Ключевые слова: математическая модель, агрессивная среда, метод конечных элементов, гибридный конечный элемент, изгиб железобетонных армированных плит, полимербетонный защитный слой, приращения напряжений, приращения деформаций.

УДК: 539.3

Одним из самых опасных факторов, воздействующих на железобетонные конструкции различных зданий и сооружений, является агрессивная эксплуатационная среда. В связи с этим актуальна задача по разработке математической модели деформирования железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды (см. рис.1).

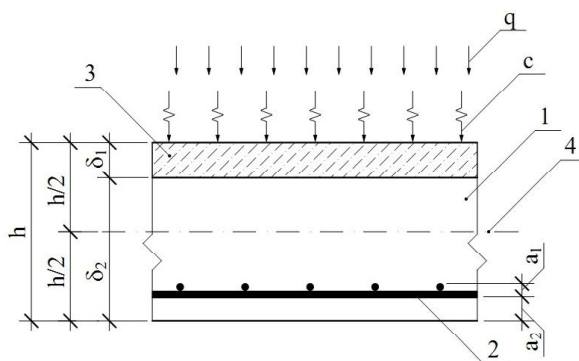


Рис. 1. Схема рассматриваемой плиты

1 – железобетонный слой плиты, 2 – армирование плиты, 3 – полимербетонный слой, 4 – срединная поверхность, q – равномерно распределенная нагрузка, с – агрессивная среда,

Поступила 20.10.2014

δ_1 – толщина полимербетонного слоя, δ_2 – толщина железобетонного слоя, h – полная толщина плиты, a_1 – толщина армированного слоя, a_2 – толщина защитного слоя бетона для арматурной сетки.

Решать подобного рода задачу предлагается используя модификации гибридных КЭ с тремя степенями свободы в узле, разработанные Р. Куком в [1]. Использование данных КЭ позволяет уйти от прогрессирующего возрастания изгибной жесткости, возникающей при использовании изопараметрических КЭ, учитывающих деформации поперечного сдвига [2]. Но непосредственное применение разработанных Р. Куком гибридных конечных элементов к расчету железобетонных пространственных конструкций некорректно. Это обуславливается тем, что они не учитывают продольные усилия и перемещения в срединной плоскости, а также не дают возможности определить вектор обобщенных сил $\{M\}$ в центре КЭ достаточно просто и точно, как того требует задача. В связи с этим предлагается использовать модификацию гибридных КЭ с пятью степенями свободы в узле и матрицей жесткости, полученной непосредственно для произвольного плоского треугольного элемента [3].

Используя матрицу некоторых функций от координат точки элемента $[P]$ и вектор коэффициентов, требующих определения $\{\beta\}$ при построении матрицы жесткости конечного элемента, получаем следующее выражение для вектора обобщенных сил [3]:

$$\{M\} = [P] \{\beta\}. \quad (1)$$

Следовательно, вектор обобщенных деформаций будет иметь вид

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{M\} = [E] \{M\}, \quad (2)$$

где $[E]$ – матрица податливости. Зная, что матрица податливости представляет собой интеграл по толщине плиты, получаем выражение для энергии деформации по объему КЭ как интеграл по его площади:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [E] \{M\} dS. \quad (3)$$

П. Тонгом и Т. Пианом в работах [4], [5] показано, что конечные элементы данного класса основаны на функционале вида

$$\Pi = \sum_n \left(U_n - \int_{V_n} \{\Phi\}^T \{t\} dV + \int_S \{\bar{\Phi}\}^T \{t\} dS \right), \quad (4)$$

где V_n – граница объема элемента; S – часть V_n , подвергнутая действию внешнего вектора сил $\{\bar{\Phi}\}$; n – количество элементов; $\{t\}$ – граничные перемещения, связанные с узловыми перемещениями $\{q\}$ выражением

$$\{t\} = [L] \{q\}. \quad (5)$$

Вектор сил на границе элемента $\{\Phi\}$ определяется из уравнения (4):

$$\{\Phi\} = [R] \{\beta\}, \quad (6)$$

где $[R]$ – матрица $[P]$ для контура V_n элемента, $[L]$ – матрица связи узловых и граничных перемещений.

Подставив выражения (1), (3), (5), (6) в уравнение (4), получаем функционал вида

$$= \sum_n \left(\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [T] \{q\} + \{\Phi_0\}^T \{q\} \right), \quad (7)$$

где

$$[H] = \int_S [P]^T [E] [P] dS; \quad (8)$$

$$[T] = \int_{V_n} [R]^T [L] dS; \quad (9)$$

$$\{\Phi_0\}^T = \int_S \{\bar{\Phi}\} [L] dS. \quad (10)$$

После определения вариаций функционала (7) по параметрам $\{\beta\}$, $\{q\}$ и приравнявая эти вариации к нулю, можно получить выражение вида [1]

$$\sum_n [T]^T [H]^{-1} [T] \{q\} = \sum_n \{\Phi_0\}, \quad (11)$$

из которого выделяется матрица жесткости элемента

$$[K] = [I]^T [H]^{-1} [I]. \quad (12)$$

При определении вариации функционала (7) по неизвестным коэффициентам $\{\beta\}$ устанавливается связь этих коэффициентов с узловыми перемещениями:

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (13)$$

Подставляя зависимости (13) в соотношения (1), получаем следующие равенство:

$$\{M\} = [P] [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (14)$$

Таким образом, после вычисления узловых перемещений вектор обобщенных сил $\{M\}$ определен.

Представим вектор обобщенных сил через неизвестные коэффициенты $\{\beta\}$ в виде

$$\begin{aligned} M_{11} &= \beta_1 + \beta_4 x_1 + \beta_9 x_2; & M_{22} &= \beta_2 + \beta_5 x_2 + \beta_{10} x_1; & M_{12} &= \beta_3 + \beta_{12} x_1 + \beta_{11} x_2; \\ Q_1 &= \beta_4 + \beta_{11}; & Q_2 &= \beta_5 + \beta_{12}; & N_{11} &= \beta_6; & N_{22} &= \beta_7; & N_{12} &= \beta_8. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя уравнение (1), получаем матрицу $[P]$ функций $M_{11} \dots N_{12}$ от координат точки элемента (16):

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $M_{11} \dots N_{12}$ – усилия, возникающие в КЭ (см. рис. 3).

Вектор β при этом имеет вид

$$\{\beta\} = \{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_7 \beta_8 \beta_9 \beta_{10} \beta_{11} \beta_{12}\}^T. \quad (17)$$

Подставляя матрицу $[P]$ в соотношение (8) и учитывая известные выражения для интегралов по площади треугольника, получим выражения для элементов квадратной матрицы двенадцатого порядка $[H]$.

Рассмотрим условия равновесия элементарного треугольника ABC , приведенного на рис. 2, и получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= M_{11} C_{ij} + M_{12} S_{ij}; & \bar{M}_{22} &= -M_{22} S_{ij} - M_{12} C_{ij}; & \bar{N}_{11} &= N_{11} C_{ij} + N_{12} S_{ij}; \\ \bar{N}_{22} &= N_{22} S_{ij} + N_{12} C_{ij}; & \bar{Q} &= Q_1 C_{ij} + Q_2 S_{ij}, & C_{ij} &= \cos \varphi_{ij}; & S_{ij} &= \sin \varphi_{ij}. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом зависимостей (18), определим работу распределенных вдоль стороны $i-j$ (рис. 3) сил и моментов следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= L_{ij} \int_0^1 [(Q_1 C_{ij} + Q_2 S_{ij}) w - (M_{12} C_{ij} + M_{22} S_{ij}) \psi_1 + (M_{12} S_{ij} + M_{11} C_{ij}) \psi_2 + \\ &\quad + (N_{11} C_{ij} + N_{12} S_{ij}) u_1 + (N_{22} S_{ij} + N_{12} C_{ij}) u_2] d\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\xi = l/L_{ij}$ – безразмерная координата, измеряемая вдоль стороны конечного элемента $i-j$.

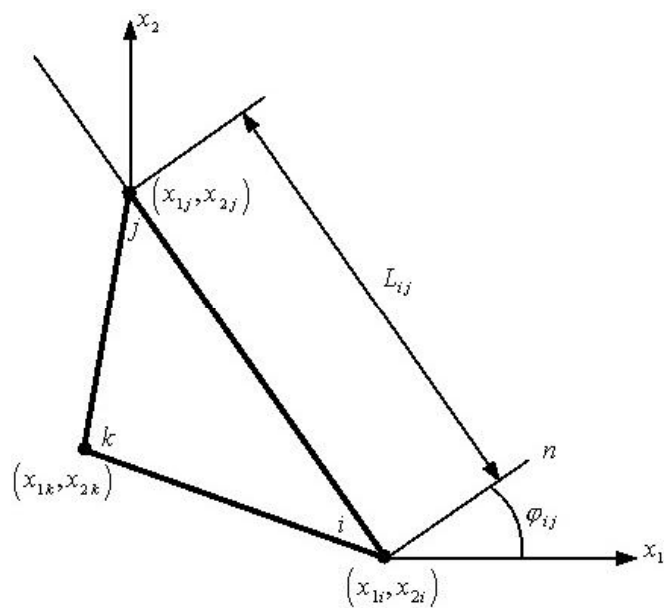


Рис. 2. Схема треугольного конечного элемента в плоскости x_1Ox_2

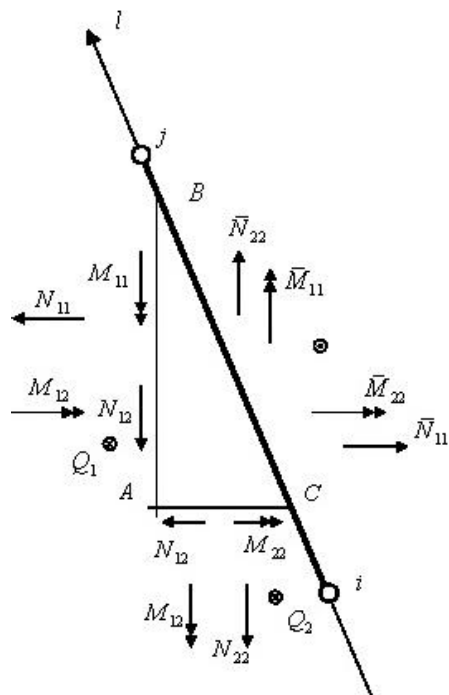


Рис. 3. Схема усилий и перемещений на стороне конечного элемента

Работа усилий и моментов, совершаемая на соответствующих перемещениях вдоль всего контура треугольного КЭ, определяется суммой

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} \quad (20)$$

Если задать вектор перемещений в i -ом узле конечного элемента в следующем виде:

$$\{q_i\} = \{w_i \ \psi_{1i} \ \psi_{2i} \ u_{1i} \ u_{2i}\}^T = \{q_{i1} \ q_{i2} \ q_{i3} \ q_{i4} \ q_{i5}\}^T, \quad (21)$$

то получаем вектор узловых перемещений всего КЭ:

$$\{q\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{15}\}^T. \quad (22)$$

Аппроксимацию граничных перемещений в зависимости от узловых перемещений примем в следующей форме [3]:

$$\begin{aligned} w &= [(1-\xi) \ \xi] \{w_i \ w_j\} + L_{ij}\xi(1-\xi)(\theta_i - \theta_j)/2; \\ \psi_1 &= [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{1i} \ \psi_{1j}\}; \ \psi_2 = [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{2i} \ \psi_{2j}\}; \\ u_1 &= [(1-\xi) \ \xi] \{u_{1i} \ u_{1j}\}; \ u_2 = [(1-\xi) \ \xi] \{u_{2i} \ u_{2j}\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\theta_i = \psi_{1i}c_{ij} + \psi_{2i}S_{ij}$; $\theta_j = \psi_{1j}c_{ij} + \psi_{2j}S_{ij}$; L_{ij} – длина стороны $i-j$.

Представим текущие координаты x_1, x_2 на стороне $i-j$ через координаты узлов в виде

$$x_1 = x_{1i} - L_{ij}\xi S_{ij}; \ x_2 = x_{2i} + L_{ij}\xi c_{ij}. \quad (24)$$

Используя зависимости (15), (19), (23), (24) и подставляя их в уравнение (20), учитывая при этом аппроксимации (22) и выделяя векторы $\{\beta\}^T$, $\{q\}$, получим выражения для элементов матрицы $[T]$ размера 12×15 .

Задачи изгиба железобетонных плит, независимо от геометрической конфигурации, будем рассматривать в условиях активной деформации и простого нагружения. При этом будет использоваться потенциал деформаций (25), предложенный в работе [6], в «рамки» которого укладываются упругопластические свойства бетона как нелинейного материала:

$$\begin{aligned} W_1 &= (A_e + B_e\xi)\sigma^2 + (C_e + D_e\xi + E_e\eta \cos 3\varphi)\tau^2 + \\ &+ [(A_p + B_p\xi)\sigma^2 + (C_p + D_p\xi + E_p\eta \cos 3\varphi)\tau^2]^n, \end{aligned} \quad (25)$$

где A_e, B_e, C_e, D_e, E_e и A_p, B_p, C_p, D_p, E_p – константы потенциала, ξ, η – некоторые гармонические функции, которые можно трактовать как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке, σ и τ – нормальные и касательные напряжения, φ – фаза напряжений; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; $\xi = \frac{\sigma}{S_0}$; $\eta = \frac{\tau}{S_0}$; $\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{2} \det(S_{ij})}{\tau^3}$; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$; σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – симметричный тензор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера.

Деформации ползучести не учитываем. Рассматриваем плиты, размеры которых в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями, что позволяет пренебречь местными напряжениями в зоне контакта арматуры и бетона, а значит – распределить арматуру, представив ее в виде сплошного слоя, обладающего свойствами структурной анизотропии.

В качестве модели для стальной арматуры примем идеальное упругопластическое тело. Предполагаем, что арматура воспринимает только нормальные напряжения в поперечных сечениях, ее коэффициенты Пуассона равны нулю. Обнуление коэффициентов поперечной деформации заметно упрощает зависимости между напряжениями и деформациями, тогда как погрешность с введением этого допущения лежит в пределах точности исходных данных [7].

Напряжения в пределах армированных слоев плиты определим как сумму напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры примем равенство деформаций этих двух сред [3].

Срединную поверхность плиты представим сетью гибридных конечных элементов модификации $H12$ с учетом разбиения по толщине на ряд фиктивных слоев n_C . Жесткостные

характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространим на любые точки фиктивного слоя.

В зависимости от конкретных условий выделим следующие слои: а) бетонные слои; в) армированные (железобетонные слои) без трещин; г) бетонные слои с трещинами; д) армированные (железобетонные) слои. Моделирование данных слоев подробно описано рассмотрено в работах А. А. Трещева и В. Г. Теличко [8]. Дополнительно к данным слоям в задаче рассматривается полимербетонный слой. Этот слой рассматриваем как несжимаемый материал, т.е. его коэффициент Пуассона равен 0,5 [9].

Для построения математической модели полимербетонного слоя за основу принимаем теорию малых упругих деформаций А. А. Ильюшина [9] применительно к механике сплошной среды. При построении инкрементальной модели изгиба необходимо получить уравнения, связывающие приращения напряжений с приращениями деформаций. Для этого требуется построить применительно к вышеуказанной теории дифференциал Гадо, который позволяет получить физические соотношения в инкрементальной форме.

Построением данных соотношений в своей работе [10] занимались В. В. Петров, О. В. Пенина [11], П. В. Селяев [12], сами уравнения имеют вид (26), (27), (28)

$$\Delta\sigma_x = \frac{4}{3}E_k^* \left(\Delta\varepsilon_x + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_y \right) + \frac{4}{3} \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y \right) \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad (26)$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{4}{3}E_k^* \left(\Delta\varepsilon_y + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_x \right) + \frac{4}{3} \left(\varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_x \right) \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad \Delta\tau_{xy} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{xy} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{xy} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta.$$

Однако в рассматриваемой нами модели необходимо учитывать еще два касательных напряжения (27), (28):

$$\Delta\tau_{xz} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{xz} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{xz} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad (27)$$

$$\Delta\tau_{yz} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{yz} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{yz} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta, \quad (28)$$

где $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, $\Delta\tau_{xy}$, $\Delta\tau_{xz}$, $\Delta\tau_{yz}$ – приращения нормальных и касательных напряжений, вызванные приращением внешних воздействий; $\Delta\varepsilon_x$, $\Delta\varepsilon_y$, $\Delta\gamma_{xy}$, $\Delta\gamma_{xz}$, $\Delta\gamma_{yz}$ – приращение линейных и угловых деформаций, E_k^* – переменный касательный модуль с учетом действия агрессивной среды (29), E_c^* – переменный секущий модуль, учитывающий уровень концентрации агрессивной среды (30), $\Delta\delta$ – приращение глубины проникания агрессивной среды.

$$E_k^* = E_k^0 F(B), \quad (29)$$

где $F(B)$ – функция деградации касательного модуля, E_k^0 – касательный модуль без влияния агрессивной эксплуатационной среды.

$$E_c^* = E_c^0 F(B), \quad (30)$$

где $F(B)$ – функция деградации секущего модуля, E_c^0 – секущий модуль материала без влияния агрессивной эксплуатационной среды.

С учетом свойств деградации материала выражения переменных секущего E_c^* и касательного E_k^* модулей примет вид (31) (32) [12]

$$E_c^* = E_c^0 F(B(z')); \quad (31)$$

$$E_k^* = E_k^0 F(B(z')), \quad (32)$$

где z' – координата в направлении толщины пластинки, $F(B(z')) = \exp(-\lambda B(z'))$;

$-\lambda = \frac{F'(B)}{F(B)}$, $F'(B)$ – скорость деградации.

Таким образом, получаем модель деформирования железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Cook, R. D.* Two hybrid elements for analysis of thick thin and sandwich plates / R. D. Cook // *Int. J. num. Meth. Engng.* – 1972. – Vol. 5. – P. 277–288.
- [2] *Секулович, М.* Упругопластические задачи / М. Секулович. – М. : Стройиздат, 1993. – 664 с.
- [3] *Теличко, В. Г.* Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // *Известия вузов. Строительство.* – 2003. – № 5 – С. 17–23.
- [4] *Pian, T. T. H.* Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / T. T. H. Pian // *AIAA Journal.* – 1967. – Vol. 5 – P. 1332–1336.
- [5] *Tong, T.* Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / P. Tong, T. H. Pian // *Int. J. Solids Struct.* – 1969. – P. 463–472.
- [6] *Трещев, А. А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев – Тула : ТулГУ, 2008. – 264 с.
- [7] *Гениев, Г. А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.
- [8] *Теличко, В. Г.* Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций из железобетона / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // *Известия ТулГУ. Сер. Строительные материалы, конструкции и сооружения.* – Тула : ТулГУ, 2005. – Вып. 8. – С. 147–161.
- [9] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [10] *Петров, В. В.* Построение инкрементальных соотношений для физически нелинейного материала с развивающейся неоднородностью / В. В. Петров // *Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред.* – Саратов : Саратов. ун-т, 2005. – С. 138–143.
- [11] *Пенина, О. В.* Определение долговечности и резерва несущей способности нелинейно-упругих пластинок при изгибе в агрессивных средах / О. В. Пенина, В. В. Петров // *Вестник Саратовского государственного технического университета.* – 2008. – Вып. 4. – С. 16–22.
- [12] *Селяев, П. В.* Диаграммы деформирования композиционных материалов при воздействии жидких агрессивных сред / П. В. Селяев // *Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред / Сборник научных трудов.* – Саратов : СГТУ, 2006. – С. 46–52.

Башкатов Александр Валерьевич,
аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула
e-mail: a.bashkatov90@mail.ru

Теличко Виктор Григорьевич,
кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула
e-mail: katranv@yandex.ru

Трещев Александр Анатольевич,
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, Тульский государственный университет, г. Тула
e-mail: taa58@yandex.ru

A. V. Bashkatov, V. G. Telichko, A. A. Treschev

**MODELING OF THE INTENSE DEFORMED STATE DESIGNS REINFORCED
CONCRETE AND POLYMER CONCRETE LAYER DEFORMATION AS
AFFECTED BY CORROSIVE MEDIUM**

Tula State University

Abstract. The arithmetic model construction of distortion of reinforced concrete slab with a polymer-concrete layer exposed to aggressive influences is introduced. Relevance of this object choice as a matter of actual practice is proved. The least contradictory model for specification of the strain-stress state of reinforced concrete constructions is sampled. The most efficient way of completing such tasks is the finite elements method which lacks the drawbacks of the finite differences method. In this article the arithmetic model of hybrid finite element qualification for the armored reinforced concrete slabs design is considered. The problem of reinforced concrete slab with a polymer-concrete layer bending is dealt with in the presence of dynamic deformation and simple loading, which gives opportunity to introduce concrete as a nonlinear material with its elastic-plastic properties which stay within the strain potential limits. The deformation of creep is not taken into account. The incremental equations connecting stress and deformation increments are provided.

Keywords: arithmetic model, aggressive influences, finite elements method, hybrid finite element, reinforced concrete slab, a polymer-concrete layer bending, stress and deformation increments.

REFERENCES

- [1] Cook, R. D. Two hybrid elements for analysis of thick thin and sandwich plates / R. D. Cook // Int. J. num. Meth. Engng. – 1972. – Vol. 5. – P. 277–288.
- [2] Sekulovich, M. Finite Element Method / M. Sekulovich. – M. : Stroyizdat Publ., 1993. – 664 p.
- [3] Telichko, V. G. Hybrid Finite Element for Calculating Spatial Structures with Complicated Properties / V. G. Telichko, A. A. Treschev // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo. – 2003. – № 5. – P. 17–23.
- [4] Pian, T. T. H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / T. T. H. Pian // AIAA Journal. – 1967. – Vol.5 – P.1332–1336.
- [5] Ting, T. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / P. Tong, T.H.H. Pian // Int. J. Solids Struct. – 1969. – P.463–472.
- [6] Treschev, A. A. The Theory of Deformation and Strength of Materials, Sensitive to a Form of Strained Stress. De-fining R elations / A. A. Treschev. – Tula : TulGU, 2008. – 264 p.
- [7] Geniev, G. A. Plasticity Theory of Concrete and Reinforced Concrete / G. A. Geniev, V. N. Kissyuk, G. A. Tyupin. – M. : Stroyizdat, 1974. – 316 p.
- [8] Telichko, V. G. Modelling of the intense deformed state designs reinforced concrete shell structure deformation / V. G. Telichko, A. A. Treschev // Izvestia TulGU. Line: construction materials, constructions and structures. – Tula : TulGU, 2005. – Vol. 8. – P. 147–161.
- [9] Ilyushin, A. A. Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.
- [10] Petrov, A. A. Building Incremental Relations for Physically Non-linear Material with Developing Heterogeneity of Properties / V. V. Petrov // Problems of Structures' Elements Strength under Loading and Working Environments. – Saratov : Saratov University, 2005. – P. 138–143.
- [11] Penina, O. V. Determination of durability and reserve of bearing strength of nonlinearly elastic plates at bend as affected by corrosive medium / O. V. Penina, V. V. Petrov // Vestnik of Saratov state technical university. – 2008. – Vol. 4. – P. 16–22.

[12] *Selyaev, P. V.* Diagrams of composite materials deformation as affected by corrosive liquid medium / P. V. Selyaev // Problems of Structures' Elements Strength under Loading and Working Environments. – Saratov : Saratov University, 2006. – P. 46–52.

Bashkatov Alexander Valerievich

post-graduate student, Tula State University, Tula

Telichko Victor Grigorievich

Ph. D. Sci. Tech., Associate professor, Tula State University, Tula

Treshev Alexander Anatolievich

Dr. Sci. Tech., Professor, Tula State University, Tula