

М. В. Мир-Салим-заде

ЗАКРЫТИЕ ЩЕЛИ, ИСХОДЯЩЕЙ ИЗ КОНТУРА КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЕ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. Рассматривается подкрепленная стрингерами упругая изотропная пластина, имеющая круговое отверстие, из которого исходит одна прямолинейная щель переменной ширины, сравнимой с упругими деформациями. Исследуется случай, когда берега щели вошли в контакт на некотором участке. Определение параметров, характеризующих закрытие щели переменной ширины, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Сингулярное интегральное уравнение с помощью процедуры алгебраизации сведено к конечной нелинейной алгебраической системе, решаемой методом последовательных приближений. Из решения алгебраической системы найдены контактные напряжения и размер контактной зоны щели.

Ключевые слова: стрингерная пластина, круговое отверстие, щель переменной ширины, контактирование берегов щели, контактные напряжения.

УДК: 539.375

Введение. В различных отраслях техники широко применяются тонкие пластины, имеющие отверстия. Подкрепление ребрами жесткости таких пластин позволяет снизить в них уровень концентрации напряжений и затормозить рост имеющихся трещин (щелей). При некотором соотношении физических и геометрических параметров пластины в ней возможно появление зоны сжимающих напряжений, достаточных, чтобы берега щели на некотором участке вошли в контакт. Контактное взаимодействие берегов щели приводит к появлению на данном участке берегов щели контактных напряжений. Такая контактная задача для трещины впервые была решена в работах [1], [2]. Значительное внимание уделялось исследованию разрушения пластин, усиленных регулярной системой стрингеров [3]–[11], при этом рассматривалась трещина (модель Гриффитса, т. е. трещина с невзаимодействующими кромками). В последнее время был опубликован ряд работ, посвященных рассмотрению тел с контактирующими трещинами [12]–[17]. Вопросы частичного контактирования берегов щели переменной ширины к настоящему времени малоизучены.

© Мир-Салим-заде М. В., 2016

Мир-Салим-заде Минавар Вагиф гызы

e-mail: minavar.mirsalimzade@imm.az, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 08.01.2016

Постановка задачи. Рассматривается бесконечная изотропная тонкая пластина, ослабленная круговым отверстием радиуса R и одной прямолинейной щелью переменной ширины вдоль оси абсцисс (рис. 1). Контур кругового отверстия и берега щели свободны от внешних усилий. Принято, что ширина щели сравнима с упругими деформациями. Материал пластины упругий. К пластине приклепаны поперечные ребра жесткости из другого упругого материала в точках $z = \pm(2m + 1)L \pm iny_0$ ($m=0,1,2,\dots$; $n=1,2,\dots$) с постоянным шагом по всей длине стрингера симметрично относительно поверхности пластины. На бесконечности пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$.

Относительно стрингеров принимается гипотеза об одномерном континууме, т. е. считается, что при деформации толщина стрингера неизменяема, а напряженное состояние – одноосное. Стрингеры изгибу не подвергаются и работают лишь на растяжение.

Принимаются следующие допущения: а) в тонкой пластине реализуется плоское напряженное состояние; б) подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, их ослабление за счет постановки точек крепления не учитываются; в) пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления; г) все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами. Действие точки крепления моделируем: в стрингере – действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления; в пластине – действием сосредоточенной силы.

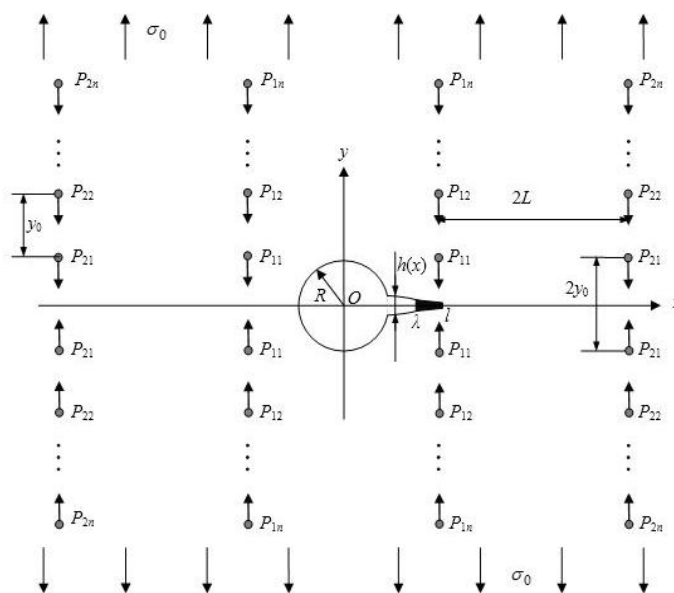


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер со средой.

Поскольку стрингеры уменьшают [1]–[10] деформацию растягиваемой пластины в направлении перпендикулярном щели, в окрестности кончика щели снижается коэффициент интенсивности напряжений. При некотором соотношении физических и геометрических параметров рассматриваемой пластины в ней будут возникать области, в которых берега щели на некотором участке войдут в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов щели. Можно заранее сказать, что зона контакта между берегами щели будет всегда начинаться с концевой точки, находящейся в области сжимающих напряжений. Принимаем, что эта область примыкает к вершине щели, а ее размер заранее неизвестен, но сравним с размером щели.

В концевой зоне, где берега щели вошли в контакт, будут возникать нормальные напряжения $\sigma_y = p(x)$. Величина контактных напряжений заранее неизвестна и подлжит определению в процессе решения задачи механики разрушения.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид:

– на контуре отверстия

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad |z| = R; \quad (1)$$

– на берегах щели

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, R \leq x < \lambda \quad \text{вне участков контакта}, \quad (2)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \lambda \leq x \leq l \quad \text{на участках контакта},$$

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = -h(x). \quad (3)$$

На основании формул Колосова – Мусхелишвили [18] и граничных условий на контуре отверстия и берегах щели задача сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\Phi'(t) + \Psi(t) = \begin{cases} 0 & R \leq x < \lambda \\ p(x) & \lambda \leq x \leq l, \end{cases} \quad (5)$$

где $\tau = Re^{i\theta}$, t – аффикс точек берегов щели.

Метод решения задачи. Решение краевой задачи (4)–(5) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z). \quad (6)$$

Здесь потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ определяют поле напряжений и деформаций в сплошной подкрепленной пластине.

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right],$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] +$$

$$+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[\frac{mL - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right],$$

где $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν — коэффициент Пуассона материала пластины, штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс $m = n = 0$.

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_R^l \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_R^l \left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{(t-z)^2} \right] g(t) dt, \quad (7)$$

где $g(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)]$; μ — модуль сдвига материала пластины.

Неизвестная функция $g(x)$ и потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ должны быть определены из краевых условий (4)–(5). Для их определения представим граничное условие (4) в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)], \quad (8)$$

где $\Phi_*(\tau) = \Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau)$, $\Psi_*(\tau) = \Psi_0(\tau) + \Psi_1(\tau)$.

Для решения краевой задачи (8) (определения потенциалов $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$) воспользуемся решением Н.И. Мусхелишвили [18]. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{1-t^2}{t(1-tz)} + \frac{z-t}{(1-tz)^2} \right] g(t) dt - \\ &- \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{(mL - iny_0)(mL + iny_0) - 1}{(mL - iny_0)[z(mL - iny_0) - 1]^2} - \frac{(mL + iny_0)(mL - iny_0) - 1}{(mL + iny_0)[z(mL + iny_0) - 1]^2} \right\} + \\ &+ \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{1}{z[z(mL - iny_0) - 1]} - \frac{1}{z[z(mL + iny_0) - 1]} \right\}; \\ \Psi_2(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2'(z)}{z^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi z} \int_{L_1} \left[\frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2 z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right] g(t) dt + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)z} \sum'_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{1}{z(mL - iny_0) - 1} - \frac{1}{z(mL + iny_0) - 1} + \frac{1}{z(mL - iny_0)} - \frac{1}{z(mL + iny_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В формулах (9) все линейные размеры отнесены к радиусу кругового отверстия $L_1 = [R, l]$.

Требуя, чтобы функции (6) удовлетворяли краевому условию (5) на берегах щели, получим сингулярное интегральное уравнение относительно $g(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(t, x) g(t) dt = F'(x); \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
K(t, x) &= \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2t} + \frac{1}{2} \left[\frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3-x-2t+2t^2x-x^3t^2}{x^2(1-tx)^2} \right]; \\
F(x) &= f_0(x) + f_1(x) + p_*(x); p_*(x) = \begin{cases} 0 & R \leq x \leq \lambda \\ p(x) & \lambda \leq x \leq l \end{cases} \\
f_0(x) &= -\sigma_0 + \frac{\kappa+2}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-m,n} n y_0 \left[\frac{1}{(x-mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{m,n} n y_0 \left[\frac{1}{(x+mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{m,n} n y_0 \frac{(x-mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x-mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-m,n} n y_0 \frac{(x+mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x+mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\}, \\
f_1(x) &= -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-m,n} n \left\{ \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \\
&\quad + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right. \\
&\quad \left. -4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{m,n} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\kappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \times \\
&\quad \times \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + \right. \\
&\quad \left. + 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3\sigma_0}{2x^4}.
\end{aligned}$$

В полученное сингулярное интегральное уравнение (10) входят неизвестные величины сосредоточенных сил P_{mn} ($m=1,2,\dots; n=1,2,\dots$) и контактные напряжения $p(x)$.

Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы P_{mn} , действующей на каждую точку крепления со стороны m -го стрингера, равна

$$P_{mn} = \frac{E_S F}{2ny_0} \Delta v_{mn} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где E_S — модуль Юнга материала ребра жесткости; F — площадь поперечного сечения стрингера; $2ny_0$ — расстояние между рассматриваемыми точками крепления; Δv_{mn} — взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через a радиус точки крепления (площадки сцепления) и примем [1] естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек $z = mL + i(ny_0 - a)$ и $z = mL - i(ny_0 - a)$ равно взаимному смещению точек крепления Δv_{mn} . Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет эффективно отыскать решение поставленной задачи. С помощью комплексных потенциалов (6) и формул Колосова – Мусхелишвили [18] находим взаимное смещение Δv_{mn} указанных точек:

$$\begin{aligned} \Delta v_{kr} &= \Delta v_{kr}^{(0)} + \Delta v_{kr}^{(1)} + \Delta v_{kr}^{(2)}; \\ \Delta v_{kr}^{(0)} &= \frac{\sigma_0}{4\mu} (1 + \kappa) d_1 + \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)\mu h} \sum'_{m,n} P_{mn} \left\{ \kappa \ln \frac{d_3 + a^2}{d_3 + b^2} + \frac{2d_0 d_1 [2k(k - m)L^2 + ab]}{(d_3 + b^2)(d_3 + a^2)} \right\}; \\ \Delta v_{kr}^{(1)} &= \frac{1 + \kappa}{2\pi\mu} \int_{L_1} \omega(t) g(t) dt - \frac{d_1}{\pi\mu} \int_{L_1} \frac{d_2 g(t)}{A} dt; \\ A &= d_2^2 + d_1^2; \quad \omega(t) = \arctg \frac{d_1}{d_2}; \\ \Delta v_{kr}^{(2)} &= \frac{\sigma_0}{2\mu} \left\{ \frac{(1 + \kappa)d_1}{B_2} + \frac{2d_1 k L}{B_2^2} \left(\frac{kL}{B_2} - kL \right) + \frac{k^2 L^2 - d_1^2}{B_2^2} \left(\frac{d_1}{B_2} - d_1 \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi\mu} \int_{L_1} \left\{ \kappa \left(\varphi_1 - \frac{td_1}{A_1^*} + \frac{d_1}{tA_1^*} \right) + \left(\frac{kL}{B_2} - kL \right) \left[\frac{(1 - t^2)d_1}{A_1^*} - \frac{2td_4 d_1 d_2 + d_1(d_4 - t^2 d_1)}{A_1^{*2}} \right] + \right. \\ &+ d_1 \left(\frac{1}{B_2} - 1 \right) \left[\frac{(1 - t^2)d_4}{tA_1^*} - \frac{(d_4 - t^2 d_1^2)(d_2 + 2td_4 d_1^2)}{A_1^{*2}} \right] - \\ &- \left[\frac{2}{t} \omega - \frac{2 - t^2 + t^3 - t}{t} \arctg \frac{d_1}{kL} + \frac{2td_1}{B_2} + \right. \\ &\left. \left. + (4t^2 - 1)\varphi_1 + \frac{2t^3 d_1 (d_4^2 - t^2 d_1^2) - 2(t^2 + 1 - 2t^3)d_4 t d_1}{A_1^{*2}} \right] \right\} g(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)\mu h} \sum'_{m,n} P_{mn} \Pi, \end{aligned}$$

где $b = (r - n)y_0 - a$; $d_0 = b + a$; $d_1 = ry_0 - a$; $d_2 = t - kL$; $d_3 = (k - m)^2 L^2$; $d_4 = 1 - tkL$;

$$\begin{aligned} \Pi &= \kappa \left\{ \frac{C_4(DkL - D_1 d_1) - C_2^*(D_1 kL - d_1 D)}{(D_1^2 + D^2)B_2} - \frac{C_4(D_3 kL - D_2 d_1) - C_2^*(D_2 kL - d_1 D_3)}{(D_3^2 + D_2^2)B_2} \right\} - \\ &- \kappa(d_5 - 1) \left\{ \frac{D_3 d_6 - 2ny_0 m L D_2}{(D_3^2 + D_2^2)D_4} - \frac{D d_6 - 2ny_0 m L D_1}{(D^2 + D_1^2)D_4} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1 + \kappa}{2} \ln \frac{D^2 + D_1^2}{D_3^2 + D_2^2} + \frac{2ny_0(ny_0 - a)}{d_5 B_2} - \\
& - (d_5 - 1) \left\{ \frac{C_4 [mL(D^2 - D_1^2) + 2ny_0 D D_1] - C_2^* [2mL D_1 D - ny_0(D^2 - D_1^2)]}{(D^2 + D_1^2)^2 d_5} - \right. \\
& \left. - \frac{C_4 [mL(D_3^2 - D_2^2) - 2ny_0 D_2 D_3] - C_2^* [ny_0(D_3^2 - D_2^2) + 2mL D_2 D_3]}{(D_3^2 + D_2^2) d_5} \right\}; \\
& d_5 = m^2 L^2 + n^2 y_0^2; d_6 = m^2 L^2 - n^2 y_0^2; B_2 = k^2 L^2 + d_1^2; \\
& C_4 = kL + \frac{kL}{B_2}; C_2^* = d_1 \left(1 + \frac{d_1}{B_2} \right); D = kmL^2 + ny_0 d_1 - 1; \\
& D_1 = d_1 mL - ny_0 kL; D_2 = d_1 mL + ny_0 kL; D_3 = kmL^2 - ny_0 d_1 - 1; \\
& \varphi_1 = -\arctg \frac{td_1}{d_4}; D_4 = d_6^2 + 4y_0^2 L^2 m^2; A_1^* = d_4^2 + d_1^2 t^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, искомые величины сосредоточенных сил определяются из решения бесконечной системы уравнений (11).

Так как напряжения в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров, ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (10) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Для построения решения сингулярного интегрального уравнения используем метод прямого решения сингулярных уравнений [19], [20]. Переходя к безразмерным переменным, решение представим в виде

$$g(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} g_0(\eta),$$

где $g_0(\eta)$ – ограниченная функция.

Использование квадратурных формул [4] позволяет интегральное уравнение свести к системе $M + 1$ алгебраических уравнений с M неизвестными $g_0(\tau_1), \dots, g_0(\tau_m)$:

$$\sum_{m=1}^M \frac{g^0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[\frac{1}{\tau_m - \eta_r} + K(\tau_m, \eta_r) \right] = \pi F_*(\eta_r) \quad r = 1, 2, \dots, M+1, \quad (12)$$

$$F_*(\eta_r) = \begin{cases} f(\eta_r) & R \leq x < \lambda \\ f(\eta_r) + p(\eta_r) & \lambda \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1}; m = 1, 2, \dots, M; \eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)}; r = 1, 2, \dots, M+1.$$

Так как решение сингулярного интегрального уравнения (10) ищется в классе всюду ограниченных функций, то оно существует при выполнении дополнительного условия (условия разрешимости краевой задачи) [18]. Выполнение дополнительного условия обеспечивает полученная алгебраическая система из $M+1$ уравнений (12), служащая для определения неизвестных $g_0(\tau_1), g_0(\tau_2), \dots, g_0(\tau_m)$ и λ .

В правую часть системы (12) входят неизвестные значения контактных напряжений $p(\eta_r)$ в узловых точках, принадлежащих концевой зоне щели. Условием, служащим

для определения неизвестного контактного напряжения, возникающего на берегах щели в концевой зоне, является граничное условие (3). Запишем его для производной раскрытия смещений берегов щели:

$$g(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)] = -\frac{2\mu}{1+\kappa} h'(x), \quad (13)$$

где t — аффиксы точек концевой зоны трещины.

Требую выполнения условия (13) в узловых точках, содержащихся в концевой зоне (λ, l) , получим недостающие уравнения для определения приближенных значений контактного напряжения $p(\tau_{m_1})$ в узловых точках:

$$g_0(\tau_{m_1}) = -\frac{2\mu}{1+\kappa} h'(\tau_{m_1}) \quad (m_1 = 1, 2, \dots, M_1), \quad (14)$$

где принято, что M_1 — число узловых точек в отрезке (λ, l) .

Алгебраические системы (11), (12), (14) связаны между собой и должны решаться совместно. Решение полученной системы (11), (12), (14) позволяет определить значения искомой функции $g(x)$ в узловых точках, значения контактных напряжений $p(x)$, величины сосредоточенных сил P_{mn} , а также размер концевой зоны щели λ .

Полученная алгебраическая система (11), (12), (14) из-за неизвестного размера концевой зоны щели λ оказалась нелинейной и решалась методом последовательных приближений. Решаем систему (11), (12), (14) при некотором определенном значении параметра λ относительно $N_1 \times N_2 + M + M_1$ неизвестных $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, p_1, p_2, \dots, p_{M_1}$. Эти неизвестные входят в систему (11), (12), (14) линейным образом. Выбранные значения λ и найденные в результате решения линейной алгебраической системы величины $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, p_1, p_2, \dots, p_{M_1}$ подставляются в неиспользованное уравнение системы (12). Взятое значение λ и соответствующие ему значения $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, p_1, p_2, \dots, p_{M_1}$ не будут удовлетворять неиспользованному уравнению системы (12). Поэтому, подбирая значения параметра λ , будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока последнее уравнение системы (12) не будет удовлетворяться с заданной точностью.

Для численной реализации метода последовательных приближений были проведены расчеты. В каждом приближении система уравнений (11), (12), (14) решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка M (до $M=40$). Определялись значения контактных напряжений и параметра λ , характеризующего зону контакта берегов щели в зависимости от геометрических и физических параметров пластины, усиленной стрингерами при $\nu = 0,3$; $a/L = 0,01$; $y_0/L = 0,25$; $E = 7,1 \cdot 10^4$ МПа (сплав В95); $E_S = 11,5 \cdot 10^4$ МПа (композит А1-сталь); $F_1/y_0 h = 1$. Результаты расчетов представлены на рис. 2.

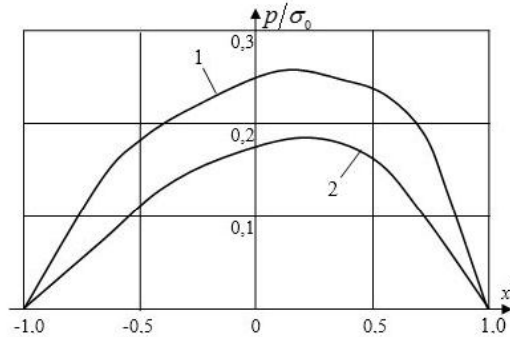


Рис. 2. Зависимость распределения контактных напряжений вдоль контактной зоны щели

Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14. При расчетах были использованы безразмерные координаты $x' = \frac{2x-(l+\lambda)}{l-\lambda}$. Кривая 1 соответствует безразмерной длине щели $l_* = l/L = 0,75$; кривая 2 – $l_* = 0,50$.

Заключение. Анализ модели частичного закрытия щели переменной ширины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров, сводится к параметрическому исследованию бесконечной алгебраической системы (11), (12), (14) при различных геометрических и физических параметрах среды, усиленной стрингерами. Непосредственно из решения этой системы определяется контактные напряжения в концевой зоне, а также размеры зон контакта берегов щели.

Следует отметить, что полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определять характеристики подкрепления среды и напряженное состояние пластины, при которых достигается заданная область контакта берегов щели переменной ширины.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мирсалимов В. М., Алиева Г. М. Контактная задача для пластины с трещиной, усиленной ребрами жесткости // Изв. АН АзССР, серия физ.-техн. и мат. наук. 1985. № 3. С. 53-57.
- [2] Мирсалимов В. М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещины // ФХММ. 1986. № 1. С. 84-88.
- [3] Брок Д. Основы механики разрушения. М.: Высшая школа, 1980. 368 с.
- [4] Партон В. З. Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.
- [5] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [6] Максименко В. Н. Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия // Прикладная механика и техническая физика. 1988. № 2. С. 133-140.
- [7] Savruk M. P., Kravets V. S. Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers // Materials Science. 1994. 30, Issue 1. P. 95-104.
- [8] Savruk M. P., Kravets V. S. Two-dimensional problems of the theory of elasticity for reinforced cracked plates // Materials Science. 1995. 31, Issue 3. P. 350-362.
- [9] Kravets V. S. Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate // Materials Science. 1999. 35, Issue 3. P. 339-348.

- [10] Мир-Салим-заде М. В. Разрушение изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров // *Механика композитных материалов*. 2007. 43, № 1. С.59-72.
- [11] Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // *Математическое моделирование*. 2007. 19, № 3. С. 105–115.
- [12] Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // *Прикл. мех. и техн. физика*. 2010. 51, № 2. С. 148–159.
- [13] Мир-Салим-заде М. В. Разрушение перфорированной стрингерной пластины // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 4. С. 59–62.
- [14] Мирсалимов В. М. Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2009. № 2. С. 78–92.
- [15] Гасанов Ш. Г. Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2012. № 2. С. 58–64.
- [16] Мирсалимов В. М. Частичное закрытие трещиновидной полости в изотропной среде // *Деформация и разрушение материалов*. 2013. № 1. С. 16–20.
- [17] Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // *Прикл. мех. и техн. физика*. 2013. № 6. С. 181–190.
- [18] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [19] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
- [20] Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.

M. V. Mir-Salim-zada

CLOSING OF A SLIT STARTED FROM CONTOUR OF CIRCULAR HOLE IN STRINGER PLATE

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Abstract. A plate with circular hole from that is started rectilinear slit of variable width comparable to elastic deformation is considered. The plate is elastic and supported by stringers. The case of the slit faces contact on a certain part is investigated. Determination of parameters characterizing the closure of variable width slit is reduced to solution of a singular integral equation. The singular integral equation using the algebraization procedure is reduced to finite nonlinear algebraic equations system, solving by method of successive approximations. From the solution of the algebraic system the contact stresses and the size of the slit contact zone are found.

Keywords: elastic plate, stringers, periodic system of slots, contact of slots faces, contact stresses.

REFERENCES

- [1] Mirsalimov V. M., Alieva G. M. Contact problem for ribs reinforced plate with a crack // Transactions of the Academy of Sciences of Azerbaijan SSR, Series of phys., techn. and math. sciences. 1985. № 3. P. 53–57.
- [2] Mirsalimov V. M. Some problems of structural arrest of cracks // Materials Science. 1986. Vol. 22, Issue 1. P. 81–85.
- [3] Broek D. Elementary engineering fracture mechanics. Leyden: Noordhoff international publishing. 1982.
- [4] Parton V. Z., Morozov E. M. Elastic-plastic fracture mechanics. Moscow: Nauka, 1985. (in Russian)
- [5] Cherepanov G. P. Mechanics of brittle fracture. New York: Mc Graw-Hill, 1979.
- [6] Maksimenko V. N. Influence of riveted stiffeners on crack development around a hole // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 1988. Vol. 29, Issue 2. P. 287–293.
- [7] Savruk M. P., Kravets V. S. Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers // Materials Science. 1994. Vol. 30, Issue 1. P. 95–104.
- [8] Savruk M. P., Kravets V. S. Two-dimensional problems of the theory of elasticity for reinforced cracked plates // Materials Science. 1995. Vol. 31, Issue 3. P. 350–362.
- [9] Kravets V. S. Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate // Materials Science. 1999. Vol. 35, Issue 3. P. 339–348.
- [10] Mir-Salim-zada M. V. Fracture of an Isotropic Medium Strengthened with a Regular System of Stringers // Mechanics of composite materials. 2007. Vol. 43, Issue 1. P. 41–50.
- [11] Mir-Salim-zada M. V. Modeling of partial crack closure in isotropic medium reinforced by regular stringers system // Matematicheskoe Modelirovanie. 2007. Vol. 19, № 3. P. 105–115.
- [12] Mir-Salim-zada M. V. Modeling of partial closure of cracks in a perforated isotropic medium reinforced by a regular system of stringers // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2010. Vol. 51, Issue 2. C. 269–279.

Mir-Salim-zada Minavar

e-mail: minavar.mirsalimzade@imm.az, Candidate Sci. Phys. & Math., Ass. Professor, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

-
- [13] Mir-Salim-zada M. V. Fracture of a perforated stringer plate // Mechanics of machines, mechanisms and materials. 2011. № 4. P. 59–62.
- [14] Mirsalimov V. M. Simulation of bridged crack closure in contact pair bushing // Mechanics of Solids. 2009. Vol. 44, Issue 2. C. 232–243.
- [15] Hasanov Sh. H. Cohesive crack with partially contacting faces in section of the road covering // Mechanics of machines, mechanisms and materials, 2012. № 2. P. 58–64.
- [16] Mirsalimov V. M. Partial closing of cracklike cavity in isotropic medium // Deformatsiya i Razrushenie materialov. 2013. № 1. P. 16–20.
- [17] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Simulation of partial closure of a crack-like cavity with cohesion between the faces in an isotropic medium // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. Volume 54, Issue 6. P. 1021–1029.
- [18] Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Amsterdam: Kluwer. 1977.
- [19] Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshyn A. P. The stress distribution around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka, 1976.
- [20] Mirsalimov V. M. Non-one-dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 1987.