

И. А. Семенова

ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ НАБОРОМ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ (НЕЧЕТНО-СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ)

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Изучаются базисные свойства (в частности, разложения Лагранжа) по функциям Фаддя-Папковича, возникающим при решении краевой задачи для полуплоскости, содержащей периодический набор ребер жесткости, воспринимающих только изгибные деформации и не работающих на растяжение-сжатие. Разложениями Лагранжа, в отличие от разложений, которые появляются при решении краевых задач теории упругости в полуполосе, когда неизвестные коэффициенты разложений определяются из разложений двух заданных на торце полуполосы функций в ряды по двум системам функций Фаддя-Папковича, называются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций. В этом смысле ряды Лагранжа играют такую же роль, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлена-Рибьера [1]. Вид функций Фаддя-Папковича зависит от граничных условий на длинных сторонах полуполосы. Примеры разложений Лагранжа, по функциям Фаддя-Папковича, возникающим при решении той или иной краевой задачи, можно найти в статьях [2]–[7]. Есть некоторые общие методы и подходы при изучении базисных свойств систем функций Фаддя-Папковича. Однако в каждом конкретном случае возникают свои, специфические особенности, присущие только данной краевой задаче и соответствующим ей функциям Фаддя-Папковича. Особенностям разложений Лагранжа, возникающим при решении рассматриваемой краевой задачи, посвящена эта статья. Рассматриваются два типа разложений: разложения зависящих от некоторого параметра, целых по этому параметру порождающих [8] функций, т. е функций, порождающих какую-либо систему функций Фаддя-Папковича, когда параметр пробегает множество собственных чисел краевой задачи, и разложения с использованием финитных частей биортогональных функций. В первом случае целая порождающая функция продолжается как целая вне отрезка – торца полуполосы – на всю бесконечную прямую, биортогональные функции в явном виде не записываются, а искомые коэффициенты разложений в ряды Лагранжа определяются прямо из уравнения для определения биортогональных функций. Во втором случае биортогональные функции записываются в явном виде.

© Семенова И. А., 2016
Семенова Ирина Александровна
e-mail: irishka_g_05@mail.ru, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02-644 р_поволжье_a).

Поступила 02.02.2016

Они определены на отрезке – торце полуполосы, – имеют простой вид, но самое важное, что с их помощью можно строить разложения не только аналитических функций, но фактически любых функций, для которых существует интеграл Фурье. Для того чтобы построить разложение Лагранжа некоторой, заданной на отрезке – торце полуполосы – функции, нужно вначале эту функцию каким-либо образом продолжить вне этого отрезка. От того, как сделано это продолжение, будут зависеть коэффициенты разложения в ряды Лагранжа. Таким образом, разложения Лагранжа не единственны. Неединственность разложений Лагранжа, обусловленная комплекснозначностью систем функций Фадля-Папковича, – одно из важнейших свойств рассматриваемых систем функций.

Ключевые слова: полу平面, периодическая задача, ребра жесткости, функции Фадля-Папковича, биортогональные функции, разложения Лагранжа.

УДК: 539.3+ 517.95

Формулировка краевой задачи. Основные положения. Рассмотрим полу平面, составленную из одинаковых полуполос $\{\Pi : x \geq 0, |y| \leq 1\}$, между которыми вставлены ребра жесткости (рис. 1). Все ребра имеют одинаковую изгибную жесткость, которая не меняется по длине. Жесткость на растяжение-сжатие не учитывается. На рис. 1 условно показана внешняя периодическая нагрузка, приложенная к прямолинейной границе полу平面 так, что в каждой полуполосе Π возникает нечетно-симметричная деформация. Нагрузка (сосредоточенные перерезывающие силы и моменты) может быть приложена также к концам ребер жесткости.

Введем обозначения: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра, ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра, I – момент инерции поперечного сечения ребра, t – толщина пластины, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения в пластине.

Условие контакта ребра и пластины можно записать так [9]:

$$C \frac{d^4 V(x, \pm 1)}{dx^4} + \sigma_y(x, \pm 1) = 0, \quad C = \frac{E_1 I}{2Gt}. \quad (1)$$

Здесь $V(x, y) = Gv(x, y)$. Кроме того, в силу симметрии задачи, можно считать, что ребро не деформируется вдоль оси, т. е.

$$U(x, \pm 1) = Gu(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

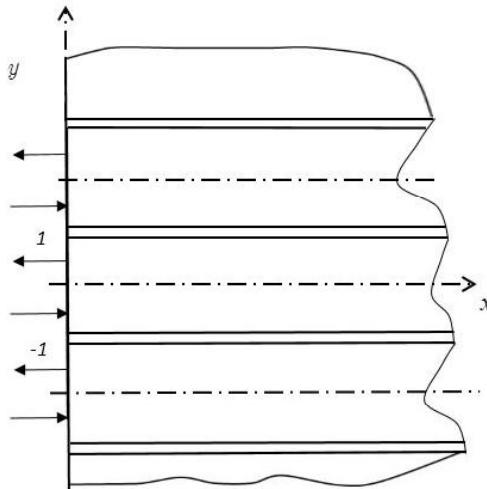


Рис. 1

Удовлетворяя граничным условиям (1), (2) с помощью метода начальных функций [9], получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций $V_0(x)$, $X_0(x)$

$$\begin{cases} (-C\alpha^4 L_{VV}(1) + L_{YV}(1))V_0(x) + (C\alpha^4 L_{VX}(1) + L_{YX}(1))X_0(x) = 0, \\ -L_{UV}(1)V_0(x) + L_{UX}(1)X_0(x) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} L_{UV}(1) &= -L_{YX}(1) = -\frac{1}{2}[(1-\nu)\sin\alpha + (1+\nu)\alpha\cos\alpha], \\ L_{VX}(1) &= -\frac{1+\nu}{4}\sin\alpha, \quad L_{UX}(1) = -\frac{1}{4}\left[\frac{3-\nu}{\alpha}\sin\alpha + (1+\nu)\cos\alpha\right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$L_{VV}(1) = -\frac{1}{2}(1+\nu)\alpha\sin\alpha + \cos\alpha, \quad L_{YV}(1) = -(1+\nu)\alpha(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)$$

— дифференциальные операторы метода начальных функций, определенные при $y = 1$.

Ограничимся в формулах (3) для операторов (4) первыми членами разложений в ряды по степеням α . Тогда получим такую систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -\left(C - \frac{1+\nu}{3}\right)\alpha^4 V_0(x) - \alpha X_0(x) = 0, \\ -\alpha V_0(x) + X_0(x) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Она имеет решение:

$$X_0(x) = C_2, \quad V_0(x) = C_1 + C_2x. \quad (6)$$

По формулам метода начальных функций найдем все перемещения и напряжения, отвечающие начальным функциям (6). Например,

$$U(x, y) = L_{UV}(y)V_0(y) + L_{UX}(y)X_0(y) = -y\alpha(C_1 + C_2x) + yC_2 \equiv 0. \quad (7)$$

Точно так же найдем

$$V(x, y) = C_1 + C_2 x, \quad \sigma_x(x, y) = \sigma_y(x, y) = 0, \quad \tau_{xy}(x, y) = C_1.$$

Введем разрешающую функцию $F(x)$:

$$V_0 = L_{UX}(1)F(x), \quad X_0 = -L_{UV}(1)F(x). \quad (8)$$

Тогда второе уравнение системы (3) превратится в тождество, а из первого получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\{[C\alpha^4 L_{VV}(1) + L_{YV}(1)]L_{UX}(1) - [C\alpha^4 L_{VX}(1) + L_{YX}(1)]L_{UV}(1)\}F(x) = 0. \quad (9)$$

Разыскивая его решение в виде

$$F(x) = e^{\lambda x},$$

придем к трансцендентному характеристическому уравнению

$$L(\lambda) = \frac{C\lambda^3}{4} \left((1+\nu)\lambda + \frac{(3-\nu)}{2} \sin 2\lambda \right) - \sin^2 \lambda = 0. \quad (10)$$

Оно, помимо двух нулевых корней, которым отвечает решение (6), имеет также бесконечное множество комплексно-сопряжённых корней $\{\pm\lambda_k, \pm\overline{\lambda}_k\}_{k=2}^{\infty} = \Lambda$ и два вещественных корня $\pm\lambda_1$. Для них функцию $F(x)$ можно представить в таком виде:

$$F(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} e^{\overline{\lambda}_k x} \quad (\lambda_k \in \Lambda, \lambda_1 < 0, Re\lambda_k < 0). \quad (11)$$

Ниже, для сокращения записи, будем считать корни $\pm\lambda_1$ тоже комплексными, и лишь в окончательных выражениях перейдем к пределу, считая, что мнимая часть этих корней стремится к нулю. Пользуясь формулами (8), найдем начальные функции, отвечающие комплексным корням уравнения (10), а затем, по общим формулам метода начальных функций, – перемещения и напряжения

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \xi(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\ V(x, y) &= C_1 + C_2 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \chi(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_y(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Функции

$$\begin{aligned}
\xi(\lambda_k, y) &= \frac{(1+\nu)}{4} (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\
\chi(\lambda_k, y) &= \left[\frac{(1+\nu)}{4} \cos \lambda_k - \frac{(3+\nu)}{4\lambda_k} \sin \lambda_k \right] \cos \lambda_k y + \frac{(1+\nu)}{4} y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
s_x(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k - \nu \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \quad (13) \\
s_y(\lambda_k, y) &= - \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
t_{xy}(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y,
\end{aligned}$$

входящие в формулы (12), называются функциями Фаддя-Папковича. Они таковы, что граничные условия по продольным сторонам полу полосы удовлетворяются автоматически.

Удовлетворяя с помощью выражений (12) граничным условиям, заданным на торце полу полосы, приходим к задаче определения коэффициентов a_k , \bar{a}_k из разложений по функциям Фаддя-Папковича. Будем считать, что на торце полу полосы заданы нормальное и касательное напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \quad (14)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
\sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y), \\
\tau(y) &= C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y).
\end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты a_k и \bar{a}_k определяются отсюда в явном виде с помощью систем функций $\{X_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{T_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$, биортогональных к функциям Фаддя-Папковича $\{s_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{t_{xy}(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно. А биортогональные функции для этих и других функций Фаддя-Папковича находятся из решения уравнений:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, y) V_k(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s_y(\lambda, y) Y_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad (16) \\
\int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.
\end{aligned}$$

Здесь $\xi(\lambda, y)$, $\chi(\lambda, y)$ и т. д. – порождающие функции. Они получаются из соответствующих функций Фаддя-Папковича (13) заменой λ_k на комплексный параметр λ .

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (16) вытекают соотношения биортогональности типа:

$$\int_T s_x(\lambda_m, y) X_k(y) dy = \begin{cases} M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad (17)$$

$$\int_T t_{xy}(\lambda_m, y) T_k(y) dy = \begin{cases} \lambda_m M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где $M_m = L'(\lambda_m)/2\lambda_m$, а $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$. T – контур интегрирования, лежащий в плоскости $z = x + iy$ (составленный из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$), на который заменяется прямая интегрирования в формулах (16) в случае комплексных значений параметра λ [2], [3]. Понятно, что при всех $\overline{\lambda_m}$ выполняются равенства типа:

$$\int_T s_x(\overline{\lambda_m}, y) X_k(y) dy = \int_T s_x(\lambda_m, y) \overline{X_k(y)} dy = 0, \quad (18)$$

$$\int_T t_{xy}(\overline{\lambda_m}, y) T_k(y) dy = \int_T t_{xy}(\lambda_m, y) \overline{T_k(y)} dy = 0.$$

Полагая в формулах (16) $\lambda \rightarrow 0$ и учитывая, что при малых λ

$$\chi(\lambda, y) \sim 1 + \dots, \quad t_{xy}(\lambda, y) \sim \lambda + \dots, \quad s_y(\lambda, y) \sim -\lambda^2 y + \dots, \quad (19)$$

$$L(\lambda) \sim -\lambda^2 + \dots,$$

получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_k(y) dy = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T_k(y) dy = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y Y_k(y) dy = 0, \quad (20)$$

так, что функции $\{V_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{T_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны к константе, а функции $\{Y_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны к y . Поэтому, чтобы не потерять в разложениях Лагранжа по системам функций $\chi(\lambda_k, y)$, $t_{xy}(\lambda_k, y)$ некоторые константы, а в случае $s_y(\lambda_k, y)$ – линейной функции, нужно ввести биортогональные функции с нулевым индексом $V_0(y)$, $T_0(y)$, $Y_0(y)$, ортогональные к функциям $\chi(\lambda_k, y)$, $t_{xy}(\lambda_k, y)$ и $s_y(\lambda_k, y)$ соответственно. Сделаем это по формулам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, y) V_0(y) dy = -\frac{L(\lambda)}{\lambda^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_0(y) dy = -\frac{L(\lambda)}{\lambda}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y Y_k(y) dy = L(\lambda). \quad (21)$$

Правые части этих равенств выбраны так, что биортогональные функции с нулевым индексом ортогональны к соответствующим функциям Фадля-Папковича. А при $\lambda = 0$ из формул (21) вытекают равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y Y_k(y) dy = 1. \quad (22)$$

Функции $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $Y_k(y)$ и $T_k(y)$ можно представить в виде суммы финитных, обращающихся в нуль вне отрезка $|y| \leq 1$, и не финитных частей, которые ортогональны ко всем функциям $\{\sin m\pi\}_{m=1}^{\infty}$ или $\{\cos m\pi\}_{m=1}^{\infty}$ на бесконечном промежутке [2]. Построим финитные части биортогональных систем функций, пользуясь результатами статьи [7].

Построение финитных частей биортогональных функций. Обозначим через $u_k(y)$ финитную часть функции $U_k(y)$ ($k \geq 1$). Принимая в первой формуле (16) $\lambda = m\pi = q_m$ ($m = 1, 2, \dots$), получим

$$\int_{-1}^1 \xi(q_m, y) u_k(y) dy = \frac{q_m L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (23)$$

Ниже потребуются следующие полезные формулы:

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) \sin(\lambda_k y) dy = -\frac{2q_m(-1)^m \sin \lambda_k}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad (24)$$

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = -\frac{2\lambda_k(-1)^m \sin \lambda_k}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad (25)$$

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) [\delta(y-1) + \delta(y+1)] dy = 2(-1)^m, \quad (26)$$

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] dy = 2(-1)^{m+1} q_m, \quad (27)$$

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] dy = 2(-1)^m q_m^2, \quad (28)$$

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] dy = 2(-1)^{m+1} q_m^3, \quad (29)$$

где δ , δ' и т. д. – дельта-функции и их производные.

Возвращаясь к равенству (23) и имея в виду, что

$$\frac{q_m^5}{q_m^2 - \lambda_k^2} = q_m^3 + \lambda_k^2 q_m + \frac{\lambda_k^4 q_m}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad (30)$$

перепишем его в таком виде:

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) u_k(y) dy = -C (-1)^{m+1} \left(q_m^3 + \lambda_k^2 q_m + \frac{\lambda_k^4 q_m}{q_m^2 - \lambda_k^2} \right). \quad (31)$$

Воспользовавшись теперь формулами (25), (27) и (29), получим

$$u_k(y) = -C \left\{ \frac{\lambda_k^4 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] - \frac{1}{2} [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] \right\}. \quad (32)$$

Построим функцию $v_k(y)$ – финитную часть функции $V_k(y)$. При $\lambda = q_m$ имеем

$$\int_{-1}^1 \chi(q_m, y) v_k(y) dy = \frac{L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

Отсюда получим

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) v_k(y) dy = C (-1)^m \left(q_m^2 + \lambda_k^2 + \frac{\lambda_k^4}{q_m^2 - \lambda_k^2} \right). \quad (33)$$

Используя формулы (24), (26) и (28), приходим к следующему выражению:

$$v_k(y) = -C \left\{ \frac{\lambda_k^3 \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta(y-1) + \delta(y+1)] + \frac{1}{2} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] \right\}. \quad (34)$$

Найдем функцию $v_0(y)$ – финитную часть биортогональной функций с нулевым индексом $V_0(y)$, полагая в соответствующем равенстве (21) $\lambda = q_m$

$$\int_{-1}^1 \chi(q_m, y) v_0(y) dy = -\frac{L(q_m)}{q_m^2}.$$

Отсюда получим

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) v_0(y) dy = C (-1)^m q_m^2.$$

Пользуясь (28), найдем

$$v_0(y) = -\frac{C}{2} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)]. \quad (35)$$

Обозначим $x_k(y)$ – финитная часть функции $X_k(y)$. Принимая в третьей формуле (16) $\lambda = q_m$ ($m = 1, 2, \dots$), приDEM к уравнению

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) x_k(y) dy = \frac{C}{2} \frac{q_m^3 (-1)^m}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

А т. к.

$$\frac{q_m^3}{q_m^2 - \lambda_k^2} = q_m + \frac{\lambda_k^2 q_m}{q_m^2 - \lambda_k^2},$$

то, учитывая (24), (27), получим

$$x_k(y) = -\frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^2 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{1}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] \right\}. \quad (36)$$

Аналогично, полагая в четвертой формуле (16) $\lambda = q_m$, получим выражение для определения функции $y_k(y)$ – финитной части функции $Y_k(y)$:

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) y_k(y) dy = \frac{C}{2} (-1)^{m+1} \frac{q_m^5}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (37)$$

Используя формулы (30), (24), (27) и (29), найдем

$$y_k(y) = \frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] - \frac{1}{2} [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] \right\}. \quad (38)$$

Финитную часть $y_0(y)$ биортогональной функции с нулевым индексом $Y_0(y)$ найдем из третьего равенства (21) при $\lambda = q_m$:

$$\int_{-1}^1 s_y(q_m, y) y_0(y) dy = L(q_m).$$

Учитывая (29), будем иметь

$$y_0(y) = -\frac{C}{4}[\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)]. \quad (39)$$

Принимая в последней формуле (16) $\lambda = q_m$, получим уравнение для определения функции $t_k(y)$ – финитной части функции $T_k(y)$:

$$\int_{-1}^1 t_{xy}(q_m, y) t_k(y) dy = \frac{q_m L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}$$

или

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) t_k(y) dy = \frac{C}{2} (-1)^m \frac{q_m^4}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (40)$$

Учитывая (25), (26) и (28), получим

$$t_k(y) = -\frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta(y-1) + \delta(y+1)] + \frac{1}{2} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] \right\}. \quad (41)$$

Для определения финитной части биортогональной функции с нулевым индексом, в соответствии с (21), получим уравнение

$$\int_{-1}^1 t_{xy}(q_m, y) t_0(y) dy = -\frac{L(q_m)}{q_m}.$$

Откуда, пользуясь (28), найдем

$$t_0(y) = \frac{C}{4} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)]. \quad (42)$$

Итак, финитные части функций, биортогональных к функциям Фаделя-Папковича, имеют вид:

$$u_k(y) = -C \left\{ \frac{\lambda_k^4 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] - \frac{1}{2} [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] \right\},$$

$$v_k(y) = -C \left\{ \frac{\lambda_k^3 \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta(y-1) + \delta(y+1)] + \frac{1}{2} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] \right\},$$

$$x_k(y) = -\frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^2 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{1}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] \right\}. \quad (43)$$

$$y_k(y) = \frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] - \frac{1}{2} [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] \right\},$$

$$t_k(y) = -\frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta(y-1) + \delta(y+1)] + [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] \right\},$$

$$v_0(y) = -\frac{C}{2} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)], \quad y_0(y) = -\frac{C}{4} [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)], \\ t_0(y) = \frac{C}{4} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)].$$

Разложения Лагранжа порождающих функций. Дадим примеры разложений Лагранжа порождающих функций. В основе их построения лежат уравнения для

определения биортогональных систем. Таким путем удается построить разложения Лагранжа не только порождающих функций. Если порождающую функцию разложить в степенной ряд по степеням параметра λ , то благодаря предельным переходам при $\lambda \rightarrow 0$ можно построить разложения целых степенных функций (полиномов) – коэффициентов разложений при различных степенях λ .

Построим разложение Лагранжа заданной на отрезке $[-1, 1]$ порождающей функции $\xi(\lambda, y)$ по системе функций $\{\xi(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$. Продолжим ее на всю вещественную ось в соответствии с формулой, которой она задана, и будем считать, что равенство

$$\xi(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \xi(\lambda_k, y) + \overline{A_k} \xi(\overline{\lambda_k}, y) \quad (44)$$

выполняется на всей оси. Умножим обе части равенства на некоторую биортогональную функцию $U_m(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, имея в виду, что при комплексных значениях параметра λ , т. е. справа, прямую интегрирования нужно заменить контуром T . Тогда, на основании первого равенства (16), а также соотношений биортогональности типа (17), (18) получим

$$\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = A_k M_k \lambda_k.$$

Откуда найдем искомые коэффициенты разложения

$$A_k = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{1}{\lambda_k M_k}. \quad (45)$$

Выделяя слагаемое, отвечающее вещественному корню λ_1 , получим

$$\xi(\lambda, y) = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{\xi(\lambda_1, y)}{\lambda_1 M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\}. \quad (46)$$

Ряд (46) равномерно сходится к раскладываемой функции на всем отрезке $[-1, 1]$.

Построим разложение Лагранжа порождающей функции $\chi(\lambda, y)$ по системе функций Фадля-Папковича $\chi(\lambda_k, y)$

$$\chi(\lambda, y) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi(\lambda_k, y) + \overline{A_k} \chi(\overline{\lambda_k}, y). \quad (47)$$

Учитывая, что функции $V_k(y)$, в силу первого равенства (20), ортогональны к константе, точно так же, как и выше, найдем

$$A_k = \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2) M_k}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (48)$$

Умножим обе части равенства (47) на функцию $V_0(y)$ и проинтегрируем по бесконечному промежутку. Учитывая, что функция $V_0(y)$ ортогональна к функциям Фадля-Папковича $\chi(\lambda_k, y)$, на основании первых равенств (21), (22) найдем

$$A_0 = -\frac{L(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Ряд Лагранжа

$$\chi(\lambda, y) = -\frac{L(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{\chi(\lambda_1, y)}{M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right\}. \quad (49)$$

сходится равномерно к своей функции на всем отрезке $[-1, 1]$.

Точно так же можно получить следующие разложения:

$$s_x(\lambda, y) = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{s_x(\lambda_1, y)}{M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right\}. \quad (50)$$

$$s_y(\lambda, y) = yL(\lambda) + \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{s_y(\lambda_1, y)}{\lambda_1^2 M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right\}. \quad (51)$$

$$t_{xy}(\lambda, y) = -\frac{L(\lambda)}{\lambda} + \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{t_{xy}(\lambda_1, y)}{\lambda_1 M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\}. \quad (52)$$

Ряды (50)–(52) равномерно сходятся при $[-1, 1]$.

Разложения Лагранжа на основе финитных биортогональных функций.

Приведем примеры разложений Лагранжа по функциям Фадля-Папковича, когда коэффициенты разложений находятся с помощью финитных биортогональных функций (43).

Пример 1. Пусть раскладываемая функция $\sin \pi y$. Представим ее рядом Лагранжа

$$\sin \pi y = \frac{u_1}{\lambda_1 M_1} \xi(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{u_k}{\lambda_k M_k} \xi(\lambda_k, y) + \frac{\bar{u}_k}{\bar{\lambda}_k M_k} \xi(\bar{\lambda}_k, y) \right\}, \quad |y| \leq 1.$$

Числа

$$u_k = \int_{-1}^1 \sin(\pi y) u_k(y) dy = -\frac{C\pi^5}{\lambda_k^2 - \pi^2}.$$

Пример 2. Функцию $V(y) = \cos \pi y$ разложим в ряд Лагранжа

$$V(y) = v_0 + \frac{v_1}{M_1} \chi(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{v_k}{M_k} \chi(\lambda_k, y) + \frac{\bar{v}_k}{\bar{M}_k} \chi(\bar{\lambda}_k, y) \right\}. \quad (53)$$

Пользуясь формулами (43), найдем

$$v_k = \int_{-1}^1 \cos(\pi y) v_k(y) dy = \frac{\pi^4 C}{\lambda_k^2 - \pi^2}, \quad v_0 = \int_{-1}^1 \cos(\pi y) v_0(y) dy = \pi^2 C. \quad (54)$$

Ряд равномерно сходится на всем отрезке.

Пример 3. Если $V(y) = y^2 - 1/3$, то

$$v_k = -2C \lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, v_0 = 2C.$$

Пример 4. Разложение Лагранжа функции $\sin \pi y$ по системе функций $s_x(\lambda_k, y)$

$$\sin(\pi y) = \frac{x_1}{M_1} s_x(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{x_k}{M_k} s_x(\lambda_k, y) \right\},$$

$$x_k = \frac{-C}{2} \left(\frac{\pi \lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \pi^2} - \cos \pi \right). \quad (55)$$

Пример 5. Разложение Лагранжа функции $\sin \pi y$ по системе функций $s_y(\lambda_k, y)$

$$\begin{aligned} \sin(\pi y) &= y \frac{C\pi^3}{2} + \frac{y_1}{\lambda_1^2 M_1} s_y(\lambda_1, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{y_k}{\lambda_k^2 M_k} s_y(\lambda_k, y) \right\}, \\ y_k &= -\frac{C\pi^5}{2(\lambda_k^2 - \pi^2)}. \end{aligned} \quad (56)$$

Пример 6. Разложение Лагранжа по системе функций $t_{xy}(\lambda_k, y)$

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}y^4 - \frac{10}{3}y^2 + 1 &= \frac{t_1}{\lambda_1 M_1} t_{xy}(\lambda_1, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_k}{\lambda_k M_k} t_{xy}(\lambda_k, y) \right\}, \\ t_k &= \frac{20C}{9\lambda_k^2} (\lambda_k^3 \cot \lambda_k + 3\lambda_k \cot \lambda_k - 3). \end{aligned} \quad (57)$$

Ряды (55), (56), (57) равномерно сходятся к своим функциям на всем отрезке $[-1, 1]$.

Пример решения краевой задачи. Приведем пример решения краевой задачи. Пусть на торце полуопосы заданы нормальные напряжения $\sigma_x(0, y) = \sigma(y) = y^5 - \frac{10}{7}y^3 + \frac{3}{7}y$, а касательные $\tau(y) = 0$. Воспользуемся общими формулами для перемещений и напряжений, полученными в статье [5]:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{\xi(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 (1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \sigma_k \overline{\lambda_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ V(x, y) &= \frac{\chi(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 (-1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \sigma_k \frac{Im(\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{s_x(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 (1 - \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \sigma_k \frac{Im(-\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= -\frac{s_y(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 (1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{s_y(\lambda_k, y)}{M_k \lambda_k^2} \sigma_k \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{Im(-\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{t_{xy}(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} x + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \sigma_k \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{Im(-e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \end{aligned} \quad (58)$$

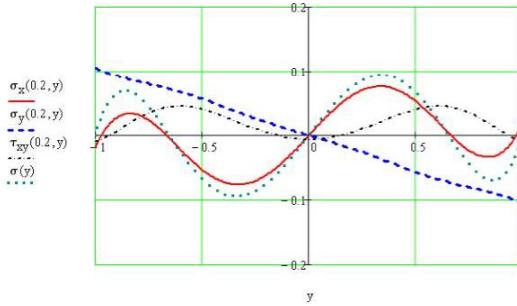


Рис. 2

Подставляя сюда числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy = -C \left\{ \frac{8 [\lambda_k^4 + 10\lambda_k^3 \operatorname{ctg} \lambda_k - 45\lambda_k^2 - 105\lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_k + 45]}{14\lambda_k^4} + \frac{1}{6} \right\},$$

получим решение задачи. На рис. 2 показан характер распределения касательных и нормальных напряжений в сечении полуполосы $x = 0.2$, а также график раскладываемой функции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
- [2] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.
- [3] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.
- [4] Меньшова, И. В., Семенова И. А., Храмова, Н. В. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полуполосе. Обратно-симметричная задача // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2 (20). С. 119–130.
- [5] Себряков Г. Г., Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Семенова И. А. Нечетно-симметричная краевая задача теории упругости для полуполосы. Точное решение // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462, № 6. С. 662–665.
- [6] Семенова И. А. Примеры аналитических решений обратно симметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 215–224.
- [7] Меньшова И. В., Семенова И. А. Биортогональные системы функций и разложение Лагранжа по функциям Фадля-Папковича в задаче изгиба полуполосы с продольными ребрами жесткости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21, № 24. С. 579–598.

- [8] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971. 518 с.
- [9] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М. : Стройиздат, 1975. 224 с.

I. A. Semenova

HALF-PLANE WITH PERIODIC ARRAY OF STIFFENERS (IS INVERSELY SYMMETRIC DEFORMATION)

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. We study the basic properties (in particular, the Lagrangian decomposition) Feature-Fadl Papkovich arising when solving boundary value problem for the half-plane containing a periodic set of ribs, which receive only the flexural deformation and the tensile compression. Lagrangian decomposition, in contrast to the expansions, which appear in the solution of boundary value problems of elasticity theory in the half, when the unknown expansion coefficients are determined from the expansions of two given at the end of the half-strip functions in series of two systems of functions Fadl-Papkovich, called the expansion of only one function for whatever or a system of functions. In this sense, the Lagrange series play the same role as trigonometric series play in decisions Filon-Ribiere [1]. Fadl-type functions Papkovich depends on the boundary conditions on the long sides of the half-strip. Examples Lagrange expansions, Function-Fadl Papkovich arising in the solution of a boundary value problem can be found in the papers [2-7]. There are some common methods and approaches in the study of basic properties of systems functions Fadl-Papkovich. However, in each case having its own specific characteristics that are unique to a given boundary value problem and its corresponding functions Fadl-Papkovich. Lagrange features expansions arising when solving the boundary value problem, the subject of this article. Two types of decomposition. Decomposition (depending on a certain parameter, the whole of this parameter) generators [8] functions, ie functions generating any system of functions Fadl-Papkovich when the parameter runs through the set of eigenvalues ??of the boundary value problem and decomposition using finite parts of biorthogonal functions. In the first case, the whole generating function continues as a whole is a segment - end of the half-strip in the whole infinite straight line, biorthogonal functions not explicitly written out, and the desired expansion coefficients of the Lagrange series are determined directly from the equation for determining the bi-orthogonal functions. In the second case biorthogonal functions are written out explicitly. They are defined in the segment - the half-strip end, have a simple form, but most importantly, they can be used to build not only the expansion of analytic functions, but actually, all functions for which there is a Fourier integral. In order to construct a Lagrangian decomposition, defined on the interval - end of the half-strip - function, you must first this function in any way out of this segment to continue. The way this is done will depend on the continuation of the expansion coefficients in the Lagrange series. Thus, the Lagrange decomposition is not unique. Nonuniqueness Lagrange expansions caused by complex-systems functions Fadl-Papkovich - one of the most important properties of these systems functions.

Keywords: bending strip; ribs; the Fadle-Papkovich functions; biorthogonal functions.

REFERENCES

- [1] Timoshenko S. P., Goodier J. Elasticity Theory. M.: Nauka, 1975. 576 p.
- [2] Kovalenko, M. D., Shulyakovskaya T. D. Decomposition on Fadly - Papkovich's functions in a strip. Theory bases // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. 2011. № 5. P. 78–98.
- [3] Kovalenko, M. D., Menshova I. V., Shulyakovskaya T. D. Decomposition on functions Fadly - Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. 2013. № 5. P. 136–158.
- [4] Menshova I. V., Semenova I. A., Khramova N. V. Decompose in funktsiyam Fadlan - Papkovicha in polupolos. Backsimmetrichnoy problems // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 2 (20). P. 119–130.
- [5] Sebryakov G. G., Kovalenko M. D., Menshova I. V., Semenova I. A. An Odd-Symmetric Boundary Value Problem of Elasticity Theory for a Semi-Strip: Exact Solution // Doklady Physics. 2015. Vol. 60. № 6. P. 274–277.
- [6] Semenova I. A. Examples of analytical solutions is inversely symmetric boundary-value problem of elasticity theory in polopolo // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 4 (22). P. 215–224.
- [7] Menshov I. V., Semenov I. A. Orthogonal systems of functions and decomposition of Lagrange Function Fadl-Papkovich problem in a half-strip bending with longitudinal stiffeners // Mechanics of Composite Materials and Structures. - 2015 Vol. 21. - No 24. - Pp. 579-598.
- [8] Ibragimov I. I. Methods of interpolation functions and some of their applications. M.: Nauka, 1971. 518 p.
- [9] Vlasov V. V. Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics. M.: Stroyizdat, 1975. 224 p.