Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1 (27). С. 141–149

В. Н. Орлов[1,2], *Н. В. Кудряшова*[2]

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

[1] *Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Ялта, Россия*

[2] *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка с полиномиальной правой частью третьей степени. Доказана теорема существования решения этого уравнения в области аналитичности, а также получено аналитическое приближенное решение в случае точных начальных условий.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажорант, область аналитичности, аналитическое приближенное решение.

УДК: 517.928.4

Результаты исследования и их обсуждение. Впервые появление нелинейного дифференциального уравнения связано с именами Риккати (конец 16 века), Абеля (1825 год), Пенлеве (1889 год). Как отмечается в работах [1]–[8], нелинейные дифференциальные уравнения указанных авторов имеют широкое применение в различных областях науки и техники. Большой вклад в разрешимость в квадратурах этой категории дифференциальных уравнений внесли известные ученые Белоруссии Н. П. Еругин, Н. А. Лукашевич, А. И. Яблонский, А. А. Самодуров, А. В. Чичурин. Тем не менее проблема решения данной категории дифференциальных уравнений далека от завершения, причиной тому являются подвижные особые точки, являющиеся препятствием к разрешимости в квадратурах данной категории дифференциальных

Орлов Виктор Николаевич
e-mail: orlowvn@rambler.ru, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Математика, теория и методика обучения математике», Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Ялта, Россия; доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Кудряшова Наталья Валерьевна
e-mail: natakudry94@mail.ru, студентка 5 курса физико-математического факультета, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.12.2015

уравнений [1]–[8]. С 1981 года появились работы одного из соавторов [1]–[8], посвященные математическому обоснованию аналитического приближенного метода решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. Как свидетельствуют публикации [9]–[12], этот метод успешно можно применять к данной категории нелинейных дифференциальных уравнений. Основой аналитического приближенного метода является новая версия метода мажорант в доказательстве теорем существования решения нелинейных дифференциальных уравнений.

В данной работе используется метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, предложенный в работах [1]–[8]. Идея метода доказательства теорем существования, предложенная в этих работах, основана на применении метода мажорант не к правой части дифференциальных уравнений, как это представлено в классической литературе, а к самому решению нелинейного дифференциального уравнения. Такой подход позволяет определить область действия теоремы, построить само приближенное решение дифференциального уравнения и получить оценки этого решения.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y^{'''} = a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y + a_4(x),$$

где $a_\text{i}(x),\ i = 1, 2, 3, 4$ – аналитические функции в рассматриваемой области. С помощью некоторой замены переменной

$$y = u(x)w(x) + v(x)$$

приводится к нормальному виду

$$y^{'''} = y^3 + r(x)$$

при условиях

$$\begin{cases} u(x) = C; \\ v(x) = -\frac{C^2 a_2(x)}{3}; \\ a_1(x) = \frac{1}{C^2}; \\ a_3(x) = \frac{C^2}{3} a_2^2(x); \\ r(x) = -\frac{C^4 a_2(x)}{27} - \frac{C^2}{3} a_2^{'''}(x) + a_4(x). \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$y^{'''} = y^3 + r(x), \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; \\ y^{'}(x_0) = y_1; \\ y^{''}(x_0) = y_2. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть*

1. $r(x) \in C^\infty$ *в области*

$$|x - x_0| < \rho_1,$$

где $0 < \rho_1 = const$;

1. $\exists M_1 : \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \leq M_1$, *где* $M_1 = const$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда решение задачи Коши (1)–(2) *является аналитической функцией*

$$y(x) = \sum_0^\infty C_n (x - x_0)^n \tag{3}$$

в области

$$|x - x_0| < \rho_2,$$

где $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{(M+1)^2}\right\}$, $M = \max\left\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup\limits_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. В силу условия теоремы имеем

$$r(x) = \sum_0^\infty A_n (x - x_0)^n. \tag{4}$$

Подставим (3) и (4) в (1):

$$\sum_3^\infty C_n \, n\,(n-1)\,(n-2)(x - x_0)^{n-3} = \sum_0^\infty (C_n^{**} + A_n)\,(x - x_0)^n, \tag{5}$$

где $C_n^{**} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^*$, $C_n^* = \sum_0^n C_i C_{n-i}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Равенство (5) обратится в тождество при условиях:

$$n(n-1)(n-2)C_n = C_{n-3}^{**} + A_{n-3}, \tag{6}$$

которые позволяют однозначно определить все коэффициенты C_n, начиная с $n \geq 3$:

$$C_3 = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}(C_0^3 + A_0),$$

$$C_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}(3C_0^2 C_1 + A_1),$$

$$C_5 = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3}(3C_0 C_1^2 + 3C_0^2 C_2 + A_2),$$

$$C_6 = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4}(3C_0^2 C_3 + 6C_0 C_1 C_2 + C_1^3 + A_3).$$

Таким образом, получаем формальное представление решения уравнения (5) в виде (3). В силу однозначности определения коэффициентов C_n из (6) следует единственность полученного формального решения.

Исходя из структуры коэффициентов $C_3 - C_6$, методом математической индукции докажем справедливость оценок:

$$|C_{3n}| \leq \frac{1}{3n(3n-1)(3n-2)}(M+1)^{2n+1}, \tag{7}$$

$$|C_{3n+1}| \leq \frac{1}{(3n+1)\,3n\,(3n-1)}(M+1)^{2n+1}, \tag{8}$$

$$|C_{3n+2}| \leq \frac{1}{(3n+2)(3n+1)\,3n}(M+1)^{2n+1}, \tag{9}$$

где

$$M = \max\left\{|y_0|,\ |y_1|,\ |y_2|,\ \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\}, n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Докажем оценку (7). Из (6) с учетом (7)–(9) имеем

$$|C_{3n+3}| = \left|\frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}(C_{3n}^{**} + A_{3n})\right| =$$

$$\left|\frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}(\sum_{i=1}^{3n} C_i C^*_{3n-i} + A_{3n})\right| =$$

$$= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}(\left|\sum_{i=1}^{3n} C_i \sum_{j=1}^{3n-i} C_j C_{3n-i-j}\right| + |A_{3n}|) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\left(\sum_{i=3}^{3n}\frac{(M+1)^{i+1}}{i(i-1)(i-2)}\times\right.$$

$$\times\sum_{j=3}^{3n-i}\frac{(M+1)^{j+1}}{j(j-1)(j-2)}\cdot\frac{(M+1)^{2n-i-j-2}}{(3n-i-j)(3n-i-j-1)(3n-i-j-2)} + M =$$

$$= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\times\sum_{i=3}^{3n}\frac{(M+1)^{i+1}}{i(i-1)(i-2)}(M+1)^{2n-i-1}\cdot$$

$$\left.\cdot\sum_{j=3}^{3n-i}\frac{1}{j(j-1)(j-2)}\frac{1}{(3n-i-j)(3n-i-j-1)(3n-i-j-2)} + M\right).$$

Далее

$$|C_{3n+3}| \leq \frac{(M+1)^{2n}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}((3n-3) + \frac{M}{(M+1)^{2n}}).$$

Окончательно

$$|C_{3n+3}| \leq \frac{(M+1)^{2n+3}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}.$$

Аналогичным образом подтверждаются оценки (8) - (9).

Покажем сходимость ряда (3) в области $|x-x_0| < \rho_2$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_0^\infty v_n(x-x_0)^n = \sum_0^\infty v_{3\text{k}}(x-x_0)^{3k} + \sum_0^\infty v_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1} + \sum_0^\infty v_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2},$$

который в силу (7)-(9) является мажорирующим для ряда (3).

Имеем:

$$\sum_0^\infty v_n(x-x_0)^n = \sum_0^\infty \frac{1}{3\text{k}(3k-1)(3k-2)}(M+1)^{2k+1}(x-x_0)^{3k} +$$

$$+\sum_0^\infty \frac{1}{3\text{k}(3k+1)(3k-1)}(M+1)^{2k+1}(x-x_0)^{3k+1} +$$

$$+\sum_0^\infty \frac{1}{3\text{k}(3k+2)(3k+1)}(M+1)^{2k+1}(x-x_0)^{3k+2}.$$

На основании признака Даламбера для первого ряда, находящегося в правой части последнего ряда, имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(M+1)^{2\text{k}+3}(x-x_0)^{k+1}3k(3k-1)(3n-2)}{3k(3k-1)(3k+1)(M+1)^{2k+1}(x-x_0)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|(M+1)^2(x-x_0)\frac{3k-2}{3k+1}\right| =$$

$$\lim_{k\to\infty}(M+1)^2\,|x-x_0|<1.$$

Аналогично показываем для остальных двух рядов.

Следовательно, мажорантный ряд сходится в области $|x-x_0|<\frac{1}{(M+1)^2}$.

Положим $\rho_2=min\left\{\rho_1,\ \frac{1}{(M+1)^2}\right\}$, тогда получаем сходимость ряда (3) в области $|x-x_0|<\rho_2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения*

$$y_N(x)=\sum_0^N C_n(x-x_0)^n, \tag{10}$$

задачи (1)-(2) *в области*

$$|x-x_0|<\rho_3$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x)=|y(x)-y_N(x)|\le\Delta, \tag{11}$$

где

$$\Delta\le\frac{(M+1)^{\frac{2N+5}{3}}\cdot|x-x_0|^{N+1}}{3n\left(1-(M+1)^2\,|x-x_0|^3\right)}\left(\frac{1}{(3n-1)(3n-2)}+\frac{|x-x_0|}{(3n-1)(3n+1)}+\frac{|x-x_0|^2}{(3n+1)(3n+2)}\right) \tag{12}$$

в случае $N+1=3n$,

$$\Delta\le\frac{(M+1)^{\frac{2N+3}{3}}\cdot|x-x_0|^{N+1}}{(3n+1)\left(1-(M+1)^2\,|x-x_0|^3\right)}\left(\frac{1}{3n(3n-1)}+\frac{|x-x_0|}{3n(3n+2)}+\frac{(M+1)^2\,|x-x_0|^2}{(3n+2)(3n+3)}\right) \tag{13}$$

в случае $N+1=3n+1$,

$$\Delta\le\frac{(M+1)^{\frac{2N+1}{3}}\cdot|x-x_0|^{N+1}}{(3n+2)\left(1-(M+1)^2\,|x-x_0|^3\right)}\left(\frac{1}{3n(3n+1)}+\frac{(M+1)^2\,|x-x_0|}{(3n+1)(3n+3)}+\frac{(M+1)^2\,|x-x_0|^2}{(3n+3)(3n+4)}\right) \tag{14}$$

в случае $N+1=3n+2$,

при этом $\rho_3=\min\left\{\rho_2,\ \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^2}}\right\}$, ρ_2 *из теоремы 1,* $M=\max\left\{|y_0|,\ |y_1|,\ |y_2|,\ \sup\limits_n\frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\}$, $n=0,\,1,\,2,\ \ldots$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $N+1=3n$. Имеем:

$$|y(x)-y_N(x)|=\left|\sum_0^\infty C_n(x-x_0)^n-\sum_0^N C_n(x-x_0)^n\right|=\left|\sum_{N+1}^\infty C_n(x-x_0)^n\right|=$$

$$=\left|C_{N+1}(x-x_0)^{N+1}+C_{N+2}(x-x_0)^{N+2}+\ \ldots\ +C_{N+k}(x-x_0)^{N+k}+\ldots\ \right|=$$

$$=\left|C_{3n}(x-x_0)^{3n}+C_{3n+1}(x-x_0)^{3n+1}+C_{3n+2}(x-x_0)^{3n+2}+\ \ldots\right.$$

$$\left.+C_{3n+k-1}(x-x_0)^{3n+k-1}+\ldots\ \right|\le$$

$$\leq |C_{3n}|\cdot|x-x_0|^{3n}+|C_{3n+1}|\cdot|x-x_0|^{3n+1}+|C_{3n+2}|\cdot|x-x_0|^{3n+2}+\quad\ldots$$

$$+|C_{3n+k-1}|\cdot|x-x_0|^{3n+k-1}+\ldots\leq$$

$$\leq\frac{(M+1)^{2n+1}\cdot|x-x_0|^{3n}}{3n(3n-1)(3n-2)}+\frac{(M+1)^{2n+1}\cdot|x-x_0|^{3n+1}}{3n(3n-1)(3n+1)}+\frac{(M+1)^{2n+1}\cdot|x-x_0|^{3n+2}}{3n(3n+1)(3n+2)}+$$

$$+\frac{(M+1)^{2n+3}\cdot|x-x_0|^{3n+3}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}+\frac{(M+1)^{2n+3}\cdot|x-x_0|^{3n+4}}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)}+\frac{(M+1)^{2n+3}\cdot|x-x_0|^{3n+5}}{(3n+5)(3n+4)(3n+3)}+$$

$$+\frac{(M+1)^{2n+5}\cdot|x-x_0|^{3n+6}}{(3n+6)(3n+5)(3n+4)}+\frac{(M+1)^{2n+5}\cdot|x-x_0|^{3n+7}}{(3n+7)(3n+6)(3n+5)}+\frac{(M+1)^{2n+5}\cdot|x-x_0|^{3n+8}}{(3n+8)(3n+7)(3n+6)}+\quad\ldots\quad\leq$$

$$\leq\frac{1}{1-(M+1)^2|x-x_0|^3}\left(\frac{(M+1)^{2n+1}\cdot|x-x_0|^{3n}}{3n(3n-1)(3n-2)}+\frac{(M+1)^{2n+1}\cdot|x-x_0|^{3n+1}}{3n(3n-1)(3n+1)}+\right.$$
$$\left.\frac{(M+1)^{2n+1}\cdot|x-x_0|^{3n+2}}{3n(3n+1)(3n+2)}\right)=$$

$$=\frac{(M+1)^{2n+1}\cdot|x-x_0|^{3n}}{3n\left(1-(M+1)^2|x-x_0|^3\right)}\left(\frac{1}{(3n-1)(3n-2)}+\frac{|x-x_0|}{(3n-1)(3n+1)}+\frac{|x-x_0|^2}{(3n+1)(3n+2)}\right)=$$

$$=\frac{(M+1)^{\frac{2N+5}{3}}\cdot|x-x_0|^{N+1}}{3n\left(1-(M+1)^2|x-x_0|^3\right)}\left(\frac{1}{(3n-1)(3n-2)}+\frac{|x-x_0|}{(3n-1)(3n+1)}+\frac{|x-x_0|^2}{(3n+1)(3n+2)}\right)$$

Следовательно, получили оценку погрешности (12). Оценка справедлива в области

$$|x-x_0|<\frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^2}}.$$

Для вариантов $N+1=3n+1$, $N+1=3n+2$ получаем (13) и (14) соответственно. Теорема доказана.

Пример. Найдем приближенное решение задачи Коши (1)-(2) в случае $r(x)=0$ для начальных данных $y(1)=\sqrt{2}, y'(1)=\sqrt{2}/5, y''(1)=1$.

Выберем значение аргумента $x=1,1$. Используя формулу (10), при $N=3$ вычислим приближенное решение. Расчеты приведены в таблице 1.

Таблица 1

x	y	y_3	Δy	Δy_3	Δ_1
1,1	1,44400	1,45297	0,00897	0,03	0,01

где y – значение точного решения, y_3 – приближенное решение задачи Коши (1)–(2), Δy – абсолютная погрешность, Δy_3 – априорная погрешность, полученная по теореме 2, Δ_1 – апостериорная погрешность, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности. Для $\varepsilon=0,01$ получаем $N=4$. Так как добавка в структуре приближенного решения для $N=4$ не превышает требуемой точности. Следовательно, приближенное решение y_3 имеет погрешность $\varepsilon=0,01$.

Вывод. В работе получено решение двух задач из общего набора, необходимого для аналитического приближенного метода решения нелинейного дифференциального уравнения. Приведённый расчет эксперимента иллюстрирует эффективную возможность оптимизировать априорную погрешность с помощью апостериорной погрешности в отсутствие точного решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.

[2] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Риккати // Науч.-техн. ведомости СПбПУ. 2008. № 4. С. 102–108.

[3] Орлов В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник МАИ. 2008. Т. 15, № 5. С. 128–135.

[4] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 10. С. 1829–1832.

[5] Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.

[6] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2009. № 4 (35). 2009. С. 23–32.

[7] Редкозубов С. А., Орлов В. Н. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля // Известия института инженерной физики. 2009. № 4 (14). С. 12–14.

[8] Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 399–405.

[9] Орлов В. Н., Пчелова А. З. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 (14). С. 113–132.

[10] Пчелова А. З. О точных критериях существования подвижных особых точек решений одного дифференциального уравнения в комплексной области // Современные проблемы математики, механики и информатики: материалы Международной научной конференции. Тула: Тульский гос. ун-т, 2013. С. 107–110.

[11] Орлов В. Н., Гузь М. П. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения // Междунар. научно-практич. конф. “Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий”, 12–15 августа, 2013 г. Чебоксары. С. 36–46.

[12] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Междунар. научно-практич. конф. “Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий”. 2013. С. 47–52.

V. N. Orlov[1,2], *N.V. Kudryashova*[2]

THE EXISTENCE THEOREM FOR SOLVING A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH POLYNOMIAL RIGHT-HAND SIDE OF THE THIRD DEGREE IN THE FIELD OF ANALYTIC

Vernadsky Crimean Federal center, Yalta, Russia

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The article considers the nonlinear differential equation of the third order with polynomial right-hand side of the third degree. We proved the theorem of existence of the solution of this equation in the field of analyticity, and also received the analytical approximate decision in case of exact entry conditions.

Keywords: non-linear differential equation, Cauchy problem, method majorants, field of analytic.

REFERENCES

[1] Orlov V. N. The method of approximate solution of the first, second Painlevй differential equations and the Abel. M.: Moscow State Pedagogical University, 2013. 174 p.

[2] Orlov V. N. The method of approximate solution of the first, second differential Riccati equations // Scientific and technical vedomosti of the St. Petersburg. Petersburg. 2008. № 4. P. 102–108.

[3] Orlov V. N. A method for the approximate solution of differential equations of the matrix Riccati // Vestnik MAI. 2008. Vol. 15. № 5. P. 128–135.

[4] Orlov V. N., Lukashevich N. A. The study of the approximate solutions of the second Painlevй equation // Differ. equation. 1989. Vol. 25, № 10. P. 1829–1832.

[5] Orlov V. N. The approximate solution of the first Painlevй equation // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. 2008. № 2. P. 42–46.

[6] Orlov V. N. The study of the approximate solution of differential equations of Abel in the neighborhood of a singular point of mobile // Vestnik of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences. 2009. № 4 (35). P. 23–32.

[7] Redkozubov S. A., Orlov V. N. Exact criteria for the existence of a singular point of mobile differential equation Abel // Proceedings of the Institute of Engineering Physics. 2009. № 4 (14). P. 12–14.

[8] Orlov V. N. Precise boundaries for the approximate solution of differential equations of Abel in the vicinity of the approximate value of the mobility of a singular point in the

Orlov Victor Nikolayevich
`e-mail:` orlowvn@rambler.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department "Mathematics, theory and methods of teaching mathematics", Vernadsky Crimean Federal center, Yalta, Russia; Doctor of Physics and Mathematics, Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.
Kudryashova Natalia Valerievna
`e-mail:` natakudry94@mail.ru, Student of physics and mathematics, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

complex domain // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. 2010. № 2 (8). P. 399–405.

[9] Orlov V. N., Pchelova A. Z. The construction of the approximate solution of nonlinear differential equations in the field of analyticity // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. 2012. № 4 (14).

[10] Pchelova A. Z. On the exact criteria for the existence of movable singular points of solutions of differential equations in the complex domain // Modern problems of mathematics, mechanics and Informatics : proceedings of the International conference. Tula: Tula State University, 2013. P. 107–110.

[11] Orlov V. N., Guz M. P. Study of the effect of perturbations of the movable singular point on the approximate solution of the Cauchy problem of a nonlinear differential equations // Intern. scientific-practical. Conf. "Fundamental and applied problems of deformable solid mechanics, mathematical modeling and information technologies". Cheboksary. 2013. P. 36–46.

[12] Orlov V. N., Leontieva T. Y. the construction of the approximate solution of nonlinear differential equations in the field of analysis // Intern. scientific-practical. Conf. "Fundamental and applied problems of deformable solid mechanics, mathematical modeling and information technologies". 2013. P. 47–52.