Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1 (27). С. 150–156

Б. В. Михайлов[1], *С. Б. Михайлов*[2]

К ОБОСНОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ МЕТОДОМ СИЛ

[1] *Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия*

[2] *ООО «МЕГА-ОЙЛ», г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Рассмотрена причина повышенной погрешности расчета методом сил некоторых элементов конструкции в механике. Предложен метод использования уточняющих коэффициентов при решении задач механики на определение линейных и угловых перемещений методом сил.

Ключевые слова: линейные и угловые перемещения, прогиб в точке, модуль упругости, момент инерции, метод сил, изгибающий момент, уточненный коэффициент.

УДК: 531.8

Актуальность исследуемой проблемы. При определении линейных и угловых перемещений некоторых элементов конструкции методом сил погрешность расчетов превышает 5 %. Поэтому выявление причин погрешности некоторых элементов конструкции методом сил является актуальной задачей.

Материал и методика исследований. При решении задач механики на определение перемещений в некоторых случаях нельзя применять метод сил, т. к. при этом необходимо, чтобы касательные, проведенные через вершину параболических эпюр, были параллельны оси балки [1]. Основным способом устранения указанного недостатка метода сил является использование уточненных коэффициентов при определении площади эпюр изгибающего момента.

Результаты исследований и их обсуждение. При решении задач механики, в частности сопротивления материалов на определение линейных и угловых перемещений методом сил возникают некоторые трудности в виде ошибок расчетов, превышающих 5 %.

Рассмотрим пример. Определить прогиб в точке $\boldsymbol{K}$ для балки (рис. 1), у которой модуль упругости $\boldsymbol{E}$ и момент инерции относительно оси X I_X заданы.

Михайлов Борис Васильевич, кандидат технических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.
Михайлов Сергей Борисович, инженер, ООО «МЕГА-ОЙЛ», г. Чебоксары, Россия.

Поступила 02.02.2016

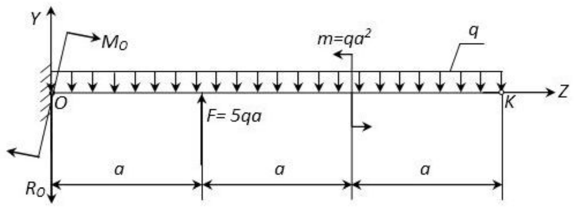

Рис. 1. Расчетная схема балки

Для решения данной задачи в начале применим метод начальных параметров.

Определим реакции в точке защемления:

$$\sum Y = 0; \qquad -R_O - q \cdot 3a + F = 0,$$

тогда:

$$R_O = 5 \cdot qa - 3 \cdot qa = 2 \cdot qa.$$

$$\sum m_{\text{O}} = 0; \qquad F \cdot a + m - q \cdot 3a \cdot \frac{3}{2}a - M_O = 0,$$

тогда:

$$M_O = 5 \cdot qa \cdot a + qa^2 - \frac{9}{2}qa^2 = \frac{3}{2}qa^2.$$

Определим прогиб в точке K методом начальных параметров [1]:

$$EI_x \cdot y_k = EI_x \cdot y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot z_k + \frac{M_o(z_k - 0)^2}{2} - \frac{m(z_k - 2a)^2}{2} - \frac{R_o(z_k - 0)^3}{6} +$$

$$+\frac{F(z_k - a)^3}{6} - \frac{g(z_k - 0)^4}{24} = 0 + 0 + \frac{\frac{3}{2}qa^2(3a - 0)^2}{2} - \frac{qa^2(3a - 2a)^2}{2} -$$

$$-\frac{2qa(3a - 0)^3}{6} + \frac{5qa(3a - a)^3}{6} - \frac{q(3a - 0)^4}{24} = \frac{13}{24}\ qa^4,$$

тогда:

$$y_k = \frac{13 \cdot qa^4}{24 \cdot EI_x} = 0,54\frac{qa^4}{EI_x}. \tag{1}$$

Знак «+» перед $\text{у}_\text{к}$ означает, что прогиб направлен вверх.

Решим эту же задачу методом сил [2]. Построим эпюры изгибающих моментов от действия внешних сил и от действия единичной силы, приложенной в точке K.

Составим функциональную зависимость изгибающего момента от координаты z на всех участках, построим грузовую и единичную эпюры (рис. 2).

Определим прогиб в точке $\boldsymbol{K}$ методом сил. Для этого перемножим площади грузовой эпюры на ординаты единичной эпюры [1].

$$EI_x \cdot y_k = \Bigg[-\frac{1}{3}\frac{qa^2}{2}a\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}\frac{qa^2}{2}0,41a\left(a + \frac{3}{8}0,41a\right) - \frac{1}{3}qa^2 \cdot 0,59a\left(2a - \frac{1}{4}0,59a\right) -$$

$$-\frac{1}{3}qa^2 \cdot 0,35a\left(2a + \frac{1}{4}0,35a\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{3qa^2}{2} \cdot 0,65a\left(3a - \frac{3}{8}0,65a\right)\Bigg] = \frac{29,16}{24}qa^4,$$

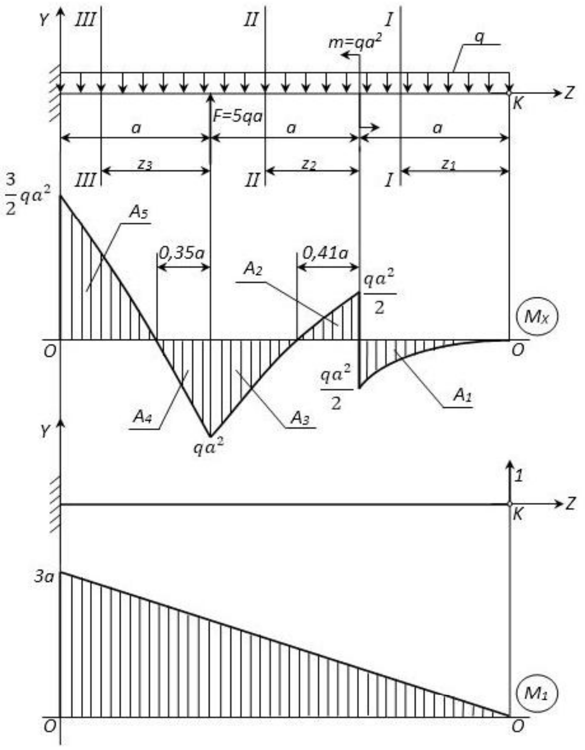

Рис. 2. Расчетная схема, грузовая и единичная эпюры

тогда:

$$y_k = \frac{29,16 \cdot qa^4}{24 \cdot EI_x} = 1,22\frac{qa^4}{EI_x}. \quad (2)$$

Положение усугубляется тем, что на вид данное решение методом сил вполне правдоподобно. Но погрешность расчета методом сил выражения (2) по сравнению с выражением (1) превышает 5 %, в нашем случае 126 %, что недопустимо.

Одной из причин данной ошибки на наш взгляд является то, что площади эпюр $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$, и A_5(рис. 2) определены неточно. Независимо от формы параболы, ширины и высоты эпюры используются одни и те же коэффициенты. Если парабола выпуклостью вниз, то коэффициент $\mathrm{K} = \frac{1}{3}$. Если парабола выпуклостью вверх, то коэффициент $\mathrm{K} = \frac{2}{3}$.

Так, например, площадь сечения эпюры, ограниченная параболой выпуклостью вниз и осями $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ (рис. 3а), определяется в зависимости от ширины ($\boldsymbol{l}$), высоты ($\boldsymbol{h}$) по следующей формуле [1]:

$$\mathrm{A}_{\text{эп}} = \frac{1}{3}h \cdot l. \quad (3)$$

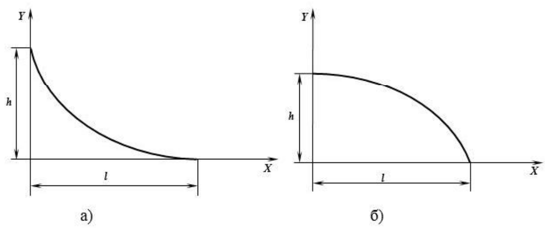

Рис. 3. Формы эпюр

а – эпюра, ограниченная параболой выпуклостью вниз и осями $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б – эпюра, ограниченная параболой выпуклостью верх и осями $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$.

Формула для определения площади эпюры, ограниченная параболой выпуклостью верх и осями $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ (рис. 3б) имеет следующий вид [1]:

$$\mathrm{A}_{\text{эп}} = \frac{2}{3} h \cdot l. \tag{4}$$

Коэффициенты в формулах (3) и (4) независимо от величины действительных чисел и переменных уравнения параболы берутся $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. На самом деле данные коэффициенты зависят от действительных чисел и переменных уравнения параболы.

Для примера рассмотрим несколько уравнений параболы и уравнение прямой, выраженное формулой $\boldsymbol{y=x}$. В начале построим прямую, выраженную формулой $\boldsymbol{y=x}$ (рис. 4).

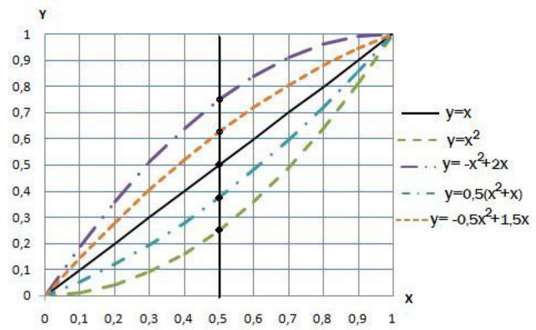

Рис. 4. Прямая и параболы, заданные разными уравнениями

Далее построим параболу, заданную уравнением $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ в интервале от 0 до 1. Затем построим вторую параболу, заданную уравнением $\mathrm{y} = -\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$ в том же интервале. Площадь сечения, ограниченная линиями $\boldsymbol{y=0}$, $\boldsymbol{x=1}$ и параболой, заданной уравнением $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$(рис. 4) определяется формулой:

$$\mathrm{A}_{I} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1. \tag{5}$$

Площадь треугольника, ограниченная линиями $\boldsymbol{y=0}$, $\boldsymbol{x=1}$ и $\boldsymbol{y=x}$ (рис. 4) определяется формулой:

$$\mathrm{A}_{II} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1. \tag{6}$$

Площадь сечения, ограниченная линиями $\boldsymbol{y{=}0}$, $\boldsymbol{x{=}1}$ и параболой, заданной уравнением $\mathrm{y} = -\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$(рис. 4), определяется формулой:

$$\mathrm{A}_{III} = \frac{2}{3} \cdot 11. \tag{7}$$

Построим еще две параболы с другими действительными числами и переменными. Эти параболы будут находиться между линиями уравнений $\mathrm{y} = -\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$, $\boldsymbol{y{=}x}$ и $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ в интервале от 0 до 1.

Построим параболы, заданные уравнениями $\mathrm{y} = -0,5\mathrm{x}^2 + 1,5\mathrm{x}$и $\mathrm{y} = 0,5(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x})$, в том же интервале.

Тогда площадь сечения, ограниченная линиями $\boldsymbol{y{=}0}$, $\boldsymbol{x{=}1}$ и параболой, заданной уравнением $\mathrm{y} = 0,5(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x})$(рис. 4), определяется формулой:

$$\mathrm{A}_{IV} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1. \tag{8}$$

Площадь сечения, ограниченная линиями $\boldsymbol{y{=}0}$, $\boldsymbol{x{=}1}$ и параболой, заданной уравнением $\mathrm{y} = -0,5\mathrm{x}^2 + 1,5\mathrm{x}$ (рис. 4), определяется формулой:

$$\mathrm{A}_{V} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1. \tag{9}$$

Анализируя формулы (5), (8) и (7), (9), можно сделать вывод о том, что площади сечений A_I и A_{IV} равны, также равны площади A_{III} и A_V. На самом деле из рисунка видно, что это не так. Значит, коэффициенты $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ в формулах (8) и (9) должны иметь другие значения.

Для определения этих уточненных коэффициентов мы предлагаем использовать уравнение зависимости коэффициента ($\boldsymbol{K}$) от ординаты параболы, находящейся на линии при $\boldsymbol{x{=}0{,}5}$. Так как коэффициенты $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$ находятся на одной прямой, значит, будущее уравнение – это уравнение прямой. Ордината уравнения $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ при $\boldsymbol{x{=}0{,}5}$ равна $\frac{1}{4}$, т. е. $y_1 = \frac{1}{4} = 0,25$. А ордината уравнения $\mathrm{y} = -\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$ при $\boldsymbol{x{=}0{,}5}$ равна $\frac{3}{4}$, т. е. $y_2 = \frac{3}{4} = 0,75$. Для них коэффициенты соответственно равны $K_1 = \frac{1}{3}$ и $K_2 = \frac{2}{3}$.

Используя формулу уравнения прямой [3], проходящей через две точки, получим следующее уравнение для определения уточненных коэффициентов при других значениях ординат:

$$K = \frac{4}{6}y + \frac{1}{6}. \tag{10}$$

Для проверки возьмем уравнение $\boldsymbol{y{=}x}$ и определим коэффициент данного уравнения исходя из уравнения (10). Ордината уравнения $\boldsymbol{y{=}x}$ при $\boldsymbol{x{=}0{,}5}$ равна $\frac{1}{2}$, т. е. $y = \frac{1}{2}$. Тогда

$$K = \frac{4}{6}y + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Что соответствует коэффициенту в выражении (6). Значит, наши предположения верны.

Решим задачу методом сил с учетом сказанного выше. Определим уточненные коэффициенты площадей эпюр A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 (рис. 2). Для этого воспользуемся формулой (10). У эпюры площадью A_1 определим ординату y_1. Для этого ординату изгибающего момента в середине эпюры ***1*** делим на максимальное значение ординаты эпюры ***1***. Т. е. $y_1 = \frac{\frac{1}{8}qa^2}{\frac{1}{2}qa^2} = \frac{1}{4}$. Тогда коэффициент площади эпюры ***1*** определим следующим образом:

$$K_1 = \frac{4}{6}y_1 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Аналогично определим другие коэффициенты для эпюр площадью A_2, A_3, A_4 и A_5.

Для эпюры площадью A_2 $y_2 = \frac{0{,}27qa^2}{\frac{1}{2}qa^2} = 0,54$. Тогда:

$$K_2 = \frac{4}{6}y_2 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot 0,54 + \frac{1}{6} = 0,53.$$

Для эпюры площадью A_3 $y_3 = \frac{0{,}45 \cdot qa^2}{qa^2} = 0,45$. Тогда:

$$K_3 = \frac{4}{6}y_3 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot 0,45 + \frac{1}{6} = 0,47.$$

Для эпюры площадью A_4 $y_4 = \frac{0{,}49 \cdot qa^2}{qa^2} = 0,49$. Тогда:

$$K_4 = \frac{4}{6}y_4 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot 0,49 + \frac{1}{6} = 0,49.$$

Для эпюры площадью A_5 $y_5 = \frac{0{,}797 \cdot qa^2}{\frac{3}{2}qa^2} = 0,53$. Тогда:

$$K_5 = \frac{4}{6}y_5 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot 0,53 + \frac{1}{6} = 0,52.$$

Определим прогиб в точке ***K*** методом сил с учетом уточненных коэффициентов.

$$EI_x \cdot y_k = \left[-K_1\frac{qa^2}{2}a\frac{3}{4}a + K_2\frac{qa^2}{2}0,41a\left(a + \frac{3}{8}0,41a\right) - K_3 \cdot qa^2 \cdot 0,59a\left(2a - \frac{1}{4}0,59a\right) - \right.$$
$$\left. -K_4 \cdot qa^2 \cdot 0,35a\left(2a + \frac{1}{4}0,35a\right) + K_5\frac{3qa^2}{2} \cdot 0,65a\left(3a - \frac{3}{8}0,65a\right)\right] =$$
$$= \left[-\frac{1}{3}\frac{qa^2}{2}a\frac{3}{4}a + 0,53\frac{qa^2}{2}0,41a\left(a + \frac{3}{8}0,41a\right) - 0,47 \cdot qa^2 \cdot 0,59a\left(2a - \frac{1}{4}0,59a\right) - \right.$$
$$\left. -0,49 \cdot qa^2 \cdot 0,35a\left(2a + \frac{1}{4}0,35a\right) + 0,52\frac{3qa^2}{2} \cdot 0,65a\left(3a - \frac{3}{8}0,65a\right)\right] = 0,53 \cdot qa^4.$$

тогда:

$$y_k = \frac{0,53 \cdot qa^4}{EI_x} = 0,53\frac{qa^4}{EI_x}. \quad (11)$$

Погрешность расчета, с учетом уточненных коэффициентов выражения (11) по сравнению с выражением (1) не превышает 5 %, в нашем случае 1,85 %, что вполне допустимо.

Резюме. Приведенные выше расчеты позволяют сделать вывод, что при решении задач механики, в частности сопротивления материалов методом сил, необходимо использовать уточненные коэффициенты для разных значений ординат, которые находятся с помощью уравнения (10).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Межецкий Г. Д., Загребин Г. Г., Решетник Н. Н., Слепов А. А. Сопротивление материалов: учебник. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^0», 2008. 416 с.

[2] Степин П. А. Сопротивление материалов: учебник. 12-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2012. 320 с.

[3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. 1970. 720 с.

B. V. Mikhailov[1], *S. B. Mikhailov*[2]

TO REASONS FOR SOME COEFFICIENTS IN CASE OF CALCULATION OF ELEMENTS OF CONSTRUCTION BY METHOD OF FORCES

[1] *Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia*

[2] *OOO «MEGA-OIL», Cheboksary, Russia*

Abstract. Considered the reason for high error in the calculations of the method forces some structural mechanics. Pre is a false method of using refinement coefficients in the solution of problems of mechanics on the determination of linear and angular displacements by the method of forces.

Keywords: the linear and angular relocation, a sag in a point, the elastic modulus, an inertia moment, a method of forces bending the moment, the specified coefficient.

REFERENCES

[1] Mezheckij G. D., Zagrebin G. G., Reshetnik N. N., Slepov A. A. Soprotivlenie materialov: uchebnik. M.: Izdatel'sko-torgovaja korporacija «Dashkov i K^0», 2008. 416 p. (in Russian)

[2] Stepin P. A. Soprotivlenie materialov: uchebnik. 12-e izd., ster. SPb.: Izdatel'stvo «Lan'», 2012. 320 p. (in Russian)

[3] Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov. 1970. 720 p. (in Russian)

Mikhailov Boris Vasilevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Mikhailov Sergey Borisovich, Engineer, OOO «MEGA-OIL», Cheboksary, Russia.