Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 15–23

Л. А. Максимова[1,2], *А. В. Юденков*[3], *Л. П. Римская*[3]

ОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕРМАНА СО СДВИГОМ В ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

[1] *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

[2] *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия*

[3] *Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, г. Смоленск, Россия*

Аннотация. В работе изучается система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом и комплексным сопряжением, являющаяся обобщением математической модели основных задач теории упругости Д. И. Шермана. Актуальность исследований связана с тем, что интегральные уравнения позволяют провести общий анализ напряжённого состояния упругого тела без непосредственного решения системы. Это, в свою очередь, способствует оптимальному использованию численных методов.

В статье дается точная постановка задачи, доказывается нетеровость исследуемой системы, подсчитывается её индекс. На основе полученных результатов разработан общий алгоритм сведения систем сингулярных интегральных уравнений к равносильным системам уравнений Фредгольма второго рода. В качестве следствия исследована обобщённая задача типа Карлемана для бианалитических функций.

При доказательстве основных результатов использовалась теория краевых задач для аналитических и бианалитических функций, сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и общие свойства нетеровых операторов.

Максимова Людмила Анатольевна
`e-mail:` maximova_ng@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия; Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.
Юденков Алексей Витальевич
`e-mail:` mail@imim.ru, д.ф.-.м.н, профессор, Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, Россия.
Римская Лилия Павловна
`e-mail:` autor@imim.ru, к.ф.-м.н., Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, Россия.

Поступила 28.01.2016

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 15-41-02453 р_поволжье_а).

Ключевые слова: теория упругости, сингулярное уравнение, краевая задача.

УДК: 539.374

Введение. Уже традиционно для моделирования основных задач плоской теории упругости применяются краевые задачи для бианалитических функций и их обобщений [1], [5], [9].

Пусть D — область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная гладким контуром L.

Бианалитической функцией в области D (конечной или бесконечной) назовем функцию вида

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z). \tag{1}$$

Здесь $\varphi_k(z)$(k=1, 2) – аналитические функции в области D или аналитические компоненты, $\bar{z} = x - iy$.

Можно показать, что бианалитическая функция является решением дифференциального уравнения в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} = 0. \tag{2}$$

В работах [2], [4], [5] показано, что основные характеристики напряженного состояния упругого тела могут быть выражены через комплексный потенциал, представляющий собой бианалитическую функцию (1). Математическую модель первой задачи плоской теории упругости можно представить в виде векторной краевой задачи

$$\begin{aligned} \varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t) &= -\overline{[\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)]} + g_1(t), \\ \varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t) &= \overline{[\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)]} + g_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где φ0,1(t) — аналитические компоненты бианалитической функции $F(z)$ в некоторой области D комплексного переменного z, g1,2(τ) – заданные функции, t – точка на контуре L.

При работе с анизотропными средами в соответствующих краевых задачах возникает функция сдвига α(t).

Представим неизвестные аналитические функции через следующие интегралы типа Коши:

$$\begin{aligned} \varphi_0'(z) &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_L \tfrac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau - z}, \\ \varphi_1'(z) &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1(\tau)d\tau}{\tau - z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Считая, что функция ω1(τ) имеет на контуре L производную класса Гельдера, получим

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0'(t)=\tfrac{1}{2}\omega_0(t)+\tfrac{1}{2\pi i}\int_L \tfrac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-t},\\
&\varphi_1^{(k)}(t)=\tfrac{1}{2}\omega_1^{(k)}(t)+\tfrac{1}{2\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1^{(k)}(\tau)d\tau}{\tau-t},\quad k=0,1,\\
&\overline{\varphi_0'(t)}=\tfrac{1}{2}\overline{\omega_0(t)}-\tfrac{1}{2\pi i}\int_L \tfrac{\overline{\omega_1(\tau)\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t},\\
&\overline{\varphi_1^{(k)}(t)}=\tfrac{1}{2}\overline{\omega_1(t)}-\tfrac{1}{2\pi i}\int_L \tfrac{\overline{\omega_1^{(k)}(\tau)}\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Используя полученные соотношения, приведем задачу (3) к следующему виду:

$$
\begin{gathered}
\omega_0(t)+\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-t}+\overline{\omega_0(t)}-\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\overline{\omega_0(\tau)\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}+\omega_1(t)+\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1(\tau)d\tau}{\tau-t}+\\
+\bar t\omega_1'(t)+\tfrac{\bar t}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1'(\tau)d\tau}{\tau-t}+\overline{\omega_1(t)}-\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\overline{\omega_1(\tau)\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}+t\overline{\omega_1'(t)}-\\
-\tfrac{t}{\pi i}\int_L \tfrac{\overline{\omega_1'(\tau)\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}=2g_1(t),\\
\omega_0(t)+\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-t}-\overline{\omega_0(t)}+\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\overline{\omega_0(\tau)\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}-\omega_1(t)-\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1(\tau)d\tau}{\tau-t}+\\
+\bar t\omega_1'(t)+\tfrac{\bar t}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1'(\tau)d\tau}{\tau-t}-\overline{\omega_1(t)}+\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\overline{\omega_1(\tau)\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}-t\overline{\omega_1'(t)}+\\
+\tfrac{t}{\pi i}\int_L \tfrac{\overline{\omega_1'(\tau)\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}=2g_2(t).
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Система сингулярных уравнений (6) содержит помимо искомых неизвестных функций их производные и сопряженные значения. Известно [5], что систему (6) можно привести к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&\omega_0(t)+\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-t}-\tfrac{1}{2\pi i}\int_L \left[\tfrac{\partial}{\partial\tau}\ln\tfrac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}\right]\omega_0(\tau)d\tau+\\
&+\tfrac{1}{2\pi i}\int_L \left[\tfrac{\partial}{\partial t}\ln\tfrac{\bar t-\bar\tau}{\tau-t}\right]\overline{\omega_0(\tau)}d\tau=f(t).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Уравнение (7) и равносильная ей система (6) были исследованы Д. И. Шерманом. С этого времени появилось значительное число работ, в которых изучались аналогичные уравнения и их приложения к решению задача теории упругости [4], [6], [7], [8]. В данной работе представлена система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными граничными значениями неизвестных функций.

Постановка задачи. Пусть D — односвязная область плоскости комплексного переменного z, L – граница области, причем $L\in C_\mu^{(3)}$. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений, обобщающих систему уравнений Шермана.

$$
\begin{aligned}
&(K_1\omega_1\omega_2)(t) \equiv a_1(t)\overline{[\omega_1(t)+\bar{t}\omega_2'(t)+\omega_2(t)]}+b_1(t)\{\omega_1[\alpha(t)]+\\
&+\overline{\alpha(t)}\omega_2'(t)+\omega_2[\alpha(t)]\}+c_1(t)\overline{\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1(\tau)+\bar{t}\omega_2'(\tau)+\omega_2(\tau)}{\tau-t}d\tau}+\\
&+\tfrac{d_1(t)}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1(\tau)+\overline{\alpha(t)}\omega_2'(\tau)+\omega_2(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau+\int_L K_{11}(t,\tau)\omega_1(\tau)d\tau+\overline{\int_L K_{12}(t,\tau)\omega_1(\tau)d\tau}+\\
&+\int_L K_{11}^*(t,\tau)\omega_2(\tau)d\tau+\overline{\int_L K_{12}^*(t,\tau)\omega_2(\tau)d\tau}=g_1(t),\\
&(K_2\omega_1\omega_2)(t) \equiv a_2(t)\overline{[\omega_1(t)+\bar{t}\omega_2'(t)-\omega_2(t)]}+b_2(t)\{\omega_1[\alpha(t)]+\\
&+\overline{\alpha(t)}\omega_2'[\alpha(t)]-\omega_2[\alpha(t)]\}+c_2(t)\overline{\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1(\tau)+\bar{t}\omega_2'(\tau)-\omega_2(\tau)}{\tau-t}d\tau}+\\
&+\tfrac{d_2(t)}{\pi i}\int_L \tfrac{\omega_1(\tau)+\overline{\alpha(t)}\omega_2'(\tau)-\omega_2(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau+\int_L K_{21}(t,\tau)\omega_1(\tau)d\tau+\overline{\int_L K_{22}(t,\tau)\omega_1(\tau)d\tau}+\\
&+\int_L K_{21}^*(t,\tau)\omega_2(\tau)d\tau+\overline{\int_L K_{22}^*(t,\tau)\omega_2(\tau)d\tau}=g_2(t),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $ak(t)$, $bk(t)$, $ck(t)$, $dk(t)$ $(k = 1, 2)$ – заданные на L функции класса H(2n – k – 1)(L); f k(t) – известные на L функции; g k(t) $\in$ H(2n – 1)(L); α(t) – прямой или обратный сдвиг Карлемана ($\alpha[\alpha$(t)] $\equiv$ t), α'(t) $\neq$ 0, α(t) $\in$ H(2n – 1)(L); K^*_{kl}(t, τ), K_{kl} $\in$ H(1)(L $\times$ L)(l=1,2) – заданные ядра Фредгольма .

Характеристическая часть системы (8) равносильна обобщенной краевой задаче типа Карлемана для бианалитических функций вида

$$
\begin{aligned}
&a_1^*(t)\frac{\partial\overline{F^+(t)}}{\partial x}+b_1^*(t)\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x}+c_1^*(t)\frac{\partial\overline{F^-(t)}}{\partial x}+b_1^*(t)\frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x}=g_1(t),\\
&a_2^*(t)\frac{\partial\overline{F^+(t)}}{\partial y}+b_2^*(t)\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y}+c_1^*(t)\frac{\partial\overline{F^-(t)}}{\partial y}+b_2^*(t)\frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y}=ig_2(t),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где
$F^{\pm}(z) = \varphi_0^{\pm}(z) + \bar{z}\varphi_1^{\pm}(z)$;
$a_k^*(t)$ = ak(t) + ck(t);
$b_k^*(t)$ = bk(t) + dk(t);
$c_k^*(t)$ = ck(t) – ak(t);
$d_k^*(t)$ = dk(t) – bk(t) (k = 1, 2).

В частном случае, когда α(t) = t, $c_k^*(t)$=$d_k^*(t)$$\equiv$ 0, $a_1^*(t)$=$b_1^*(t)$= 1, $a_2^*(t)$=$-b_2^*(t)$= 1, система (9) представляет собой первую основную задачу теории упругости изотропного тела для конечной области.

Если $b_k^*(t)$=$b_k^*(t)$$\equiv$ 0, $d_k^*(t)$= 1, $c_1^*(t)$= – 1, $c_2^*(t)$ = 1, то первая основная задача ставится для бесконечной плоскости с отверстием. При этих же условиях система (8) перейдёт в систему уравнений Шермана.

Задачей исследования является установление необходимых и достаточных условий нетеровости системы (8).

Напомним, что система сингулярных интегральных уравнений является нетеровой, если ее индекс (разность между числом линейно независимых решений неоднородной системы и числом условий разрешимости однородной системы) конечное число. Установление нетеровости позволяет определить условия для равносильной регуляризации (сведению сингулярных уравнений к уравнениям Фредгольма второго рода).

Основной результат. Краевая задача (9) по своей постановке схожа с краевой многоэлементной задачей типа Карлемана для аналитического вектора [3], но ее исследование существенно затрудняется наличием неаналитической компоненты $\bar{t}$. Это в полной мере можно сказать и о системе (8), обобщающей задачу (9). Для проведения равносильной регуляризации системы (8) необходимо убрать из ядер интегралов типа Коши компоненту $\bar{t}$. Для этого выполним предварительно следующие преобразования:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega_2'(\tau)d\tau}{\tau-t} = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\omega_2'(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{\pi i}\int_L (\bar{t}-\bar{\tau})\frac{\omega_2'(\tau)d\tau}{\tau-t} = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\omega_2'(\tau)d\tau}{\tau-t} + \\ + \frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\bar{t}-\bar{\tau}}{\tau-t}\right)\right]\omega_2(\tau)d\tau,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega_2'(\tau)d\tau}{\tau-t} = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\omega_2'(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega_2'(\tau)(\overline{\alpha(t)}-\bar{\tau})d\tau}{\tau-\alpha(t)} = \\ = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\omega_2'(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\overline{\alpha(t)}-\bar{\tau}}{\tau-\alpha(t)}\right)\right]\omega_2(\tau)d\tau.\end{gathered} \tag{11}$$

Заметим, что правые части выражений (10) и (11) представляют собой сумму, состоящую из обычного интеграла типа Коши с ядром, принадлежащим классу Гельдера, и интеграла с ядром, имеющим слабую особенность (ядро Фредгольма).

Преобразуем систему (8) к следующему виду:

$$\begin{gathered}a_1(t)\overline{[\omega_1(t)+\bar{t}\omega_2'(t)+\omega_2(t)]} + b_1(t)\{\omega_1[\alpha(t)] + \overline{\alpha(t)}\omega_2'[\alpha(t)] + \omega_2[\alpha(t)]\} + \\ + c_1(t)\overline{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\tau)+\bar{\tau}\omega_2'(\tau)+\omega_2(\tau)}{\tau-t}d\tau} + \frac{d_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\tau)+\bar{\tau}\omega_2'(\tau)+\omega_2(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau + \\ + c_1(t)\overline{\frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\bar{t}-\bar{\tau}}{\tau-t}\right)\right]\omega_2(\tau)d\tau} + \frac{d_1(t)}{\pi i}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\overline{\alpha(t)}-\bar{\tau}}{\tau-\alpha(t)}\right)\right]\omega_2(\tau)d\tau + \\ + \int_L K_{11}(t,\tau)\omega_1(\tau)d\tau + \int_L K_{12}(t,\tau)\omega_2(\tau) + \overline{\int_L K_{11}^*(t,\tau)\omega_1(\tau)d\tau} + \\ + \overline{\int_L K_{12}^*(t,\tau)\omega_2(\tau)d\tau} = g_1(t), \\ a_2(t)\overline{[\omega_1(t)+\bar{t}\omega_2'(t)-\omega_2(t)]} + b_2(t)\{\omega_1[\alpha(t)] + \overline{\alpha(t)}\omega_2'[\alpha(t)] + \omega_2[\alpha(t)]\} + \\ + c_2(t)\overline{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\tau)+\bar{\tau}\omega_2'(\tau)-\omega_2(\tau)}{\tau-t}d\tau} + \frac{d_2(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\tau)+\bar{\tau}\omega_2'(\tau)+\omega_2(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau + \\ + c_2(t)\overline{\frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\bar{t}-\bar{\tau}}{\tau-t}\right)\right]\omega_2(\tau)d\tau} + \frac{d_2(t)}{\pi i}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\overline{\alpha(t)}-\bar{\tau}}{\tau-\alpha(t)}\right)\right]\omega_2(\tau)d\tau + \\ + \int_L K_{21}(t,\tau)\omega_1(\tau)d\tau + \int_L K_{22}(t,\tau)\omega_2(\tau) + \overline{\int_L K_{21}^*(t,\tau)\omega_1(\tau)d\tau} + \\ + \overline{\int_L K_{22}^*(t,\tau)\omega_2(\tau)d\tau} = g_2(t).\end{gathered} \tag{12}$$

Введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} W_1(t) &= \omega_1(t) + \bar{t}\omega_2'(t) + \omega_2(t), \\ W_2(t) &= \omega_1(t) + \bar{t}\omega_2'(t) - \omega_2(t). \end{aligned} \tag{13}$$

С учетом обозначений (13) характеристическая часть системы (12) примет вид

$$\begin{aligned} a_1(t)\overline{W_1(t)} + b_1(t)W_1[\alpha(t)] + c_1(t)\overline{\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{W_1(\tau)d\tau}{\tau - t}} + \tfrac{d_1(t)}{\pi i}\int_L \tfrac{W_1(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} = f_1(t), \\ a_2(t)\overline{W_2(t)} + b_2(t)W_2[\alpha(t)] + c_2(t)\overline{\tfrac{1}{\pi i}\int_L \tfrac{W_2(\tau)d\tau}{\tau - t}} + \tfrac{d_2(t)}{\pi i}\int_L \tfrac{W_2(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} = f_2(t). \end{aligned} \tag{14}$$

Система (14) представляет собой систему из двух характеристических независимых сингулярных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными значениями неизвестной функции.

Достаточно полное исследование таких уравнений проведено в работе [3].

Относительно системы (14) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Система сингулярных интегральных уравнений (12) нетерова тогда и только тогда, когда:

$$\text{а)}\ \begin{aligned} &\Theta_k(t) = [a_k(t) + c_k(t)] \cdot \overline{\{c_k[\alpha(t)] - a_k[\alpha(t)]\}} - \overline{\{b_k[\alpha(t)] + d_k[\alpha(t)]\}}\times \\ &\times[d_k(t) - b_k(t)] \neq 0, \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \tag{15}$$

в случае прямого сдвига α(t)

$$\text{б)}\ \begin{aligned} &\Theta_{1,k}(t) = [a_k(t) + c_k(t)] \cdot \overline{\{a_k[\alpha(t)] + c_k[\alpha(t)]\}} - \overline{\{b_k[\alpha(t)] - d_k[\alpha(t)]\}}\times \\ &\times[b_k(t) + d_k(t)] \neq 0, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\Theta_{2,k}(t) = [c_k(t) - a_k(t)] \cdot \overline{\{c_k[\alpha(t)] - a_k[\alpha(t)]\}} - \overline{\{d_k[\alpha(t)] - b_k[\alpha(t)]\}}\times \\ &\times[d_k(t) - b_k(t)] \neq 0, \end{aligned}$$

в случае обратного сдвига α(t).

Индекс системы в случае прямого сдвига рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{\pi}\{\arg\Theta_1(t)\} + \frac{1}{\pi}\{\arg\Theta_2(t)\},$$

в случае обратного –

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{\Theta_{11}(t)}{\Theta_{12}(t)}\right\} + \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{\Theta_{21}(t)}{\Theta_{22}(t)}\right\}.$$

В силу постановки задачи необходимые и достаточные условия нетеровости системы (8) будут также и необходимыми и достаточными условиями нетеровости краевой задачи (9).

Условия (15) и (16) являются необходимыми и достаточными, чтобы была возможна равносильная регуляризация Карлемана – Векуа [3], [4].

Аналогичными методами можно исследовать более общую краевую задачу для полианалитических функций произвольного порядка. Требуется определить исчезающую на бесконечности кусочно полианалитическую функцию F$\pm$(z) порядка n, которая непрерывно продолжается на контур L вместе со своими производными по ∂z и $\partial\bar{z}$ до порядка (n – 1) включительно, по следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} & a_k(t)\frac{\partial^{n-1}\overline{F^+(t)}}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} + b_k(t)\frac{\partial^{n-1}F^+[\alpha(t)]}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} + c_k(t)\frac{\partial^{n-1}\overline{F^-(t)}}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} + \\ & + d_k(t)\frac{\partial^{n-1}F^-[\alpha(t)]}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} = f_k(t), \qquad t \in L, \end{aligned} \tag{17}$$

где ak(t), bk(t), ck(t), dk(t) (k = 1, ..., n) – заданные на L функции класса H(2n – k – 1)(L); fk(t) – известные на L функции, fk(t) $\in$ H(n – 1)(L); α(t) – прямой сдвиг Карлемана второй кратности ($\alpha[\alpha$(t)] $\equiv$ t), $\alpha\prime$(t) $\neq$ 0, α(t) $\in$ H(2n – 1)(L). Так же можно исследовать и систему сингулярных интегральных уравнений, характеристическая часть которых равносильна краевой задачи (17).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Володченков А. М., Юденков А. В. Моделирование основных задач плоской теории упругости однородных анизотропных тел краевыми задачами со сдвигом // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Вып. 3. С. 482–483.

[2] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

[3] Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.

[4] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

[5] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

[6] Римская Л. П. Системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана в теории склеивания упругих поверхностей // Вестник Брянского государственного университета. 2014. № 4. С. 31–34.

[7] Скородулина Е. Ю., Володченков А. М., Юденков А. В. Системы сингулярных интегральных уравнений в плоской теории упругости в пространстве LP. Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13 № 3. С. 546–547.

[8] Юденков А. В., Римская Л. П. Метод регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений для бианалитических функций // Universum: технические науки. 2015. № 6 (18). С. 5.

[9] Юденков А. В. Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. Смоленск: Смядынь, 2002. 268 с.

L. A. Maximova, A. V. Yudenkov, L. P. Rimskaja

THE THEORY OF STOCHASTIC POTENTIAL IN THE PLANE THEORY OF ELASTICITY

Chuvash State University, Cheboksary, Russia

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Smolensk State Agricultural Academy, Smolensk, Russia

Abstract. The paper develops a stochastic theory-building in connection with its application to the solution of basic problems of the theory of elasticity. Particular attention is paid to the Dirichlet problem for N analytic functions. The relevance of the research topic is related to the fact that the theory of stochastic boundary value problems in the class of N analytic functions being formed.

In the work is given an exact mathematical formulation of stochastic Dirichlet problem for N is an analytic function. It develops the necessary mathematical apparatus. A theorem on the existence and uniqueness of solutions. Get a general algorithm for solving stochastic Dirichlet problem for a fairly wide class of regions and contours, its stability is investigated. We give an example of the first major decisions of the elasticity problem with the use of stochastic Dirichlet problem for the n-analytic functions.

In the study we used the theory of boundary value problems for analytic functions and bianalytic, X-boundary properties of analytic functions, properties of stochastic differential systems.

Keywords: analytic function, complex potential, Dirichlet problem.

REFERENCES

[1] Volodchenkov A. M., Judenkov A. V. Modelirovanie osnovnyh zadach ploskoj teorii uprugosti odnorodnyh anizotropnyh tel kraevymi zadachami so sdvigom // Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. 2006. Vyp. 3. S. 482–483. (in Russian).

[2] Gahov F. D. Kraevye zadachi. M.: Nauka, 1977. 640 s. (in Russian).

[3] Litvinchuk G. S. Kraevye zadachi i singuljarnye uravnenija so sdvigom. M.: Nauka, 1977. 448 s. (in Russian).

[4] Mushelishvili N. I. Singuljarnye integral'nye uravnenija. M.: Nauka, 1968. 511 s. (in Russian).

[5] Mushelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 707 s. (in Russian).

[6] Rimskaja L. P. Sistemy singuljarnyh integral'nyh uravnenij so sdvigom Karlemana v teorii skleivanija uprugih poverhnostej // Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta. 2014. № 4. S. 31–34. (in Russian).

Maximova Lyudmila Anatolievna
`e-mail:` maximova_ng@mail.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chuvash State University, Cheboksary, Russia; I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.
Yudenkov Alexey Vitalevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Smolensk State Agricultural Academy, Smolensk, Russia.

[7] Skorodulina E. Ju., Volodchenkov A. M., Judenkov A. V. Sistemy singuljarnyh integral'nyh uravnenij v ploskoj teorii uprugosti v prostranstve LP. Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. 2006. T. 13 № 3. S. 546–547. (in Russian).

[8] Judenkov A. V., Rimskaja L. P. Metod reguljarizacii sistem singuljarnyh integral'nyh uravnenij dlja bianaliticheskih funkcij. Universum: tehnicheskie nauki. 2015. № 6 (18). S. 5.(in Russian).

[9] Judenkov A. V. Kraevye zadachi so sdvigom dlja polianaliticheskih funkcij i ih prilozhenija k voprosam staticheskoj teorii uprugosti. Smolensk: Smjadyn', 2002. 268 s. (in Russian).