

В. М. Мирсалимов

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БЕРЕГОВ ЩЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ С КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

*Азербайджанский технический университет, Институт математики и механики НАН
Азербайджана, г. Баку, Азербайджан*

Аннотация. Рассматривается плоская задача о сжатии объемными силами однородной плоскости с щелью переменной ширины, сравнимом с упругими деформациями. Берега щели находятся под действием внутреннего давления. Считается, что щель имеет концевые зоны в состоянии пластического течения материала. Исследуется случай возникновения нескольких участков контакта берегов щели. При этом считается, что на некоторой части площадки контакта возникает сцепление берегов, на остальной части возможно проскальзывание. Задача о равновесии щели с частично контактирующими берегами под действием объемных и поверхностных нагрузок сводится к задаче линейного сопряжения аналитических функций. Определены контактные напряжения, размеры участков контакта, зон сцепления и концевых зон.

Ключевые слова: изотропная среда, щель переменной ширины, концевые зоны щели, контакт берегов щели, сцепление берегов щели, проскальзывание берегов щели, объемные силы.

УДК: 539.375

Введение. Как известно, учет контакта берегов трещины значительно усложняет решение задачи механики разрушения. Это связано с увеличением числа неизвестных параметров задачи, таких как контактные напряжения, границы контакта и т. д. В то же время задачи с учетом контакта берегов трещины представляют значительный интерес при исследовании разрушения композиционных материалов, горных пород и др.

Частичное контактирование берегов щели переменной ширины в настоящее время малоизучено и практически не исследован учет переменной ширины щели при контакте берегов. В последнее время опубликован ряд работ, посвященных исследованию тел с трещинами с учетом сил сцепления между берегами и возможности их контакта [1]–[12].

В настоящей работе дается общая постановка задачи, в которой учитывается переменность ширины щели, трение и сцепление ее берегов при действии объемных сил. Получено решение этой проблемы для щели со связями между берегами в концевых

© Мирсалимов В. М., 2016

Мирсалимов Вагиф Мирзахмедович

e-mail: mir-vagif@mail.ru, д. ф.-м. н., профессор, Азербайджанский технический университет, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 28.01.2016

зонах. Контактные напряжения определяются в квадратурах, что удобно для практического применения в расчетах.

Постановка задачи. Рассматривается однородная изотропная среда, ослабленная прямолинейной щелью переменной ширины $h(x)$, поверхность которой находится под давлением газа $p(x)$. Принято, что щель имеет концевые зоны в состоянии пластического течения материала. В материалах при наличии вблизи трещины зон с нарушенной структурой в процессе разрушения вовлекается достаточно большая часть трещины. В этом случае область процесса разрушения рассматривается как некоторый слой (концевая зона), примыкающий к трещине и содержащий материал с частично нарушенными связями. Используется модель Леонова–Панасюка–Дагдейла, согласно которой пластическая область сосредоточена в некоторой узкой области на продолжении трещины. Пусть в среде, занимающей плоскость xOy , имеется щель длиной $2\ell = b - a$ (рис. 1).

Считается, что на частицы среды действуют объемные силы $F = X + iY$, где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ – заданные функции. При $x, y \rightarrow \infty$ компоненты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений стремятся к нулю. В процессе деформации берега щели вступают в контакт на участках (α_k, β_k) . Считается, что каждая площадка контакта состоит из участка сцепления берегов (c_k, d_k) и двух участков (α_k, c_k) и (d_k, β_k) на которых возможно проскальзывание. Обозначим: L_1 – совокупность участков сцепления; L_2 – совокупность участков проскальзывания; L_3 – совокупность участков на которых действует давление $p(x)$; L_4 – совокупность концевых участков пластических деформаций $(a_1, a) \cup (b, b_1)$.

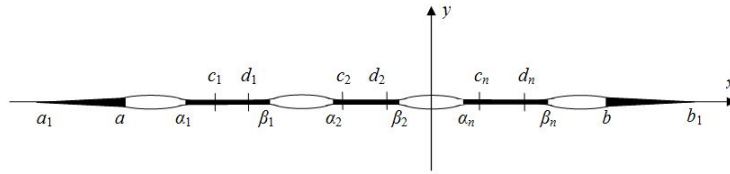


Рис. 1. Расчетная схема контактной задачи

Граничные условия на берегах щели с концевыми зонами для рассматриваемой задачи с исчезающими на бесконечности напряжениями имеют вид

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p_y - ip_{xy} \quad \text{на } L_1; \tag{1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = (1 - if(x))p_y \quad \text{на } L_2;$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = -p(x) \quad \text{на } L_3;$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \sigma_s - i\tau_s \quad \text{на } L_4;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) = -h'(x) \quad \text{на } L_1 + L_2; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) = 0 \quad \text{на } L_1.$$

Здесь принято, что на участках проскальзывания имеют место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Амонтона–Кулона); $f(x)$ – коэффициент трения; σ_s и τ_s соответственно – пределы текучести материала на растяжение и сдвиг; $(u^+ - u^-)$ – касательная, $(v^+ - v^-)$ – нормальная составляющая раскрытия берегов щели; $p_y(x)$ и $p_{xy}(x)$ соответственно, нормальные и касательная контактные напряжения.

Модель контакта с трением и сцеплением впервые была рассмотрена Л. А. Галиным [13], [14].

Размеры контактных зон заранее неизвестны и подлежат определению.

Метод решения. Напряженное состояние в плоскости с щелью представили в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1, \quad (3)$$

где $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ – любое частное решение уравнений плоской теории упругости для плоскости без щели при наличии объемных сил; $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ – решение уравнений плоской теории упругости для плоскости с щелью при отсутствии объемных сил.

Для напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ имеем соотношения

$$\sigma_x^0 + \sigma_y^0 = -\frac{2}{1+\kappa} \operatorname{Re} \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad z = x + iy; \quad (4)$$

$$\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 = \frac{1}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \bar{Q} - \bar{F}_1),$$

в которые входят две функции $Q(z, \bar{z})$ и $F_1(z, \bar{z})$, представляющие собой частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial \bar{z}} = F(z, \bar{z}), \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = \overline{F(z, \bar{z})}. \quad (5)$$

Здесь κ – постоянная Мусхелишвили.

С учетом формул (3) граничные условия (1) запишем в виде

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_1; \quad (6)$$

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = (1 - if) p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_2;$$

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_3;$$

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = \sigma_s - i\tau_s - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_4.$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ и вектора перемещений u_1, v_1 выразим через две кусочно-аналитические функции комплексного переменного $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ [15]:

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \quad (7)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + iv_1) = \kappa \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)};$$

где μ – модуль сдвига материала.

Следуя Н. И. Мусхелишвили [15], на основании граничных условий (6) приходим к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 2f_0(t); \quad (8)$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0,$$

где

$$f_0(t) = \begin{cases} p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_1 \\ (1 - if)p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_2 \\ -p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_3 \\ \sigma_s - i\tau_s - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_4 \end{cases} .$$

Так как напряжения в среде ограничены, то решение краевой задачи (8) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Искомое решение задачи (8) запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{\sqrt{(z - a_1)(z - b_1)}}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_0(t)dt}{\sqrt{(t - a_1)(t - b_1)(t - z)}}. \quad (9)$$

При $z \rightarrow \infty$ $X(z) = \sqrt{(z - a_1)(z - b_1)} = z + O(\frac{1}{z})$. Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу щели. Для определения a_1 и b_1 имеем два соотношения:

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_0(t)dt}{X^+(t)} = 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} \frac{tf_0(t)dt}{X^+(t)} = 0. \quad (10)$$

В соотношения (9) и (10) входят неизвестные контактные напряжения $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$. Перейдем к построению интегральных уравнений для определения неизвестных функций $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$. Условиями, их определяющими, являются соотношения (2).

Используя второе соотношение в (7) и граничные значения функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ на отрезке $y = 0$, $a_1 \leq x \leq b_1$, получим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) \right]. \quad (11)$$

Используя формулы Сохоцкого–Племеля [15] и учитывая формулу (9), находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{iX^+(x)}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_0(t)dt}{X^+(t)(t - x)}. \quad (12)$$

Учитывая соотношения (2), (11) и (12), после некоторых преобразований получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$

$$-\frac{X_1^+(x)}{\pi} \left[\int_{L_1+L_2} \frac{p_y(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0 dt}{X_1^+(t)(t - x)} - \int_{L_3} \frac{p(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} + \right. \quad (13)$$

$$\left. + \int_{L_4} \frac{\sigma_s dt}{X_1^+(t)(t - x)} \right] = -\frac{2\mu}{1 + \kappa} h'(x);$$

$$\int_{L_1} \frac{p_{xy}(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} + \int_{L_2} \frac{fp_y(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau_{xy}^0(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} + \int_{L_4} \frac{\tau_s dt}{X_1^+(t)(t - x)} = 0, \quad (14)$$

где $X_1^+(t) = \sqrt{(t - a_1)(b_1 - t)}$.

Решение интегрального уравнения (13) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [16]. Интегральное уравнение (13) представим в виде

$$\int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\tau)d\tau}{\tau-t} = f_*(t),$$

где $p_y^*(t) = \frac{p_y(t)}{X_1^+(t)}$,

$$f_*(t) = \frac{2\mu h'(t)}{(1+\kappa)X_1^+(t)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0 d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} + \int_{L_3} \frac{p(\tau)d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} - \int_{L_4} \frac{\sigma_s d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)}.$$

Введем кусочно-аналитическую функцию $F_*(z)$, заданную интегралом Коши, плотность которого является искомым решением интегрального уравнения

$$F_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

Аналитическая функция $F_*(z)$ представляет собой решение задачи линейного сопряжения граничных значений

$$F_*^+(\tau) + F_*^-(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}. \quad (15)$$

Решение краевой задачи (15) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F_*(z) = \frac{X_2(z)}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-z)},$$

где $X_2^+(\tau) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(\tau-\alpha_k)(\tau-\beta_k)}$; $X_2(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z-\alpha_k)(z-\beta_k)}$; $f_*^1(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}$.

С использованием формул Сохоцкого–Племеля получаем решение интегрального уравнения (13):

$$\begin{aligned} p_y^*(t) &= F_*^+(t) - F_*^-(t), \\ F_*^+(t) &= X_2^+(t) \left(\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} \right), \\ F_*^-(t) &= X_2^-(t) \left(-\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $X_2^-(t)/X_2^+(t) = -1$, имеем

$$p_y^*(t) = \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)},$$

из которого следует

$$p_y(t) = X_1^+(t) \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)}. \quad (16)$$

Для определения параметров α_k и β_k имеем уравнения

$$p_y(t) = \int_{L_1+L_2} \frac{t^{k-1} f_*(\tau) d\tau}{X_2^+(t)} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Недостающие n уравнений для определения координат концов участков контакта берегов щели получим из условий

$$v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = -h(\alpha_k) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Имеем $v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = \frac{1}{4\pi i \gamma} \int_{\alpha_1}^x G(t) dt$, где $\gamma = \frac{\mu}{\pi(1+\kappa)}$, $G(t) = [\Phi + \bar{\Phi}]^+ - [\Phi + \bar{\Phi}]^-$.

Используя предыдущие формулы, находим искомые уравнения:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} G(t) dt = -4\pi i \gamma h(\alpha_1) \quad (18)$$

$$\int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} G(t) dt = -4\pi i \gamma [h(\alpha_{k+1}) - h(\beta_k)] \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аналогично, решая сингулярное интегральное уравнение (14), получим

$$p_{xy}(x) = \frac{X_1^+(x) X_3^+(x)}{\pi^2} \int_{L_1} \frac{f_{xy}(\tau) d\tau}{X_3^+(\tau)(\tau-x)}, \quad (19)$$

где $X_3^+(x) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(x-c_k)(x-d_k)}$,

$$f_{xy}(x) = - \int_{L_2} \frac{f p_y(t) dt}{X_1^+(t)(t-x)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau_{xy}^0(t) dt}{X_1^+(t)(t-x)} - \int_{L_4} \frac{\tau_s dt}{X_1^+(t)(t-x)}.$$

Для определения неизвестных c_k и d_k имеем

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1} f_{xy}(t) dt}{X_3^+(t)(t-x)} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

Недостающие m уравнений для нахождения координат концов участков контакта получим из условий

$$u^+(c_k) - u^-(c_k) = \int_{a_1}^{c_k} \frac{\partial}{\partial t} (u^+ - u^-) dt = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Имеем

$$\int_{a_1}^{c_1} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma h(c_1), \quad (21)$$

$$\int_{d_k}^{c_{k+1}} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma [h(c_{k+1}) - h(d_k)], \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Для определения участков сцепления имеем полную систему уравнений.

Для определения напряжений и смещений, а также размеров контактных зон и концевых зон пластических деформаций необходимо задать законы изменения объемной силы. Для упрощения вычислений функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ разлагались в ряды Тейлора в начале системы координат, причем ограничивались несколькими первыми членами разложения. С помощью интегрирования уравнений (5) находим

$$Q(z, \bar{z}) = \int_z dz \int_{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z},$$

$$F_1(z, \bar{z}) = \int_z dz \int_{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} d\bar{z}.$$

По найденным функциям $Q(z, \bar{z})$ и $F_1(z, \bar{z})$ согласно (4) находим функции σ_y^0, τ_{xy}^0 .

Необходимые интегралы, содержащие функции $X_1^+(t), X_2^+(t)$ и $X_3^+(t)$, вычислялись приемом, предложенным Н. И. Мухелишвили [15, §110].

Для определения предельного состояния среды под действием объемных сил в качестве критерия разрушения использовался критерий критического раскрытия щели [17].

$$|(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)| = \delta_c,$$

где δ_c – трещиностойкость материала.

На основании полученного решения находим при $x = a$ (у основания левой концевой зоны)

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \left| \int_{a_1}^a [\Phi^+ - \Phi^-] dx \right| = \delta_c, \quad (22)$$

при $x = b$ (у основания правой концевой зоны)

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \left| \int_b^{b_1} [\Phi^+ - \Phi^-] dx \right| = \delta_c.$$

Для вычисления интеграла в левой части (22) проводим замену переменных для перехода к отрезку интегрирования $[-1,1]$, затем используем квадратурную формулу Чебышева. Полученные уравнения дают возможность при заданных характеристиках материала найти критическое напряженное состояние, при котором происходит рост щели.

Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений $p_y(x)$ и $p_{xy}(x)$ от размеров щели. При вычислениях контактных напряжений и размеров концевых и контактных зон полагалось, что на берегах щели действует постоянное давление. Результаты расчета абсолютных величин контактных напряжений p_y/F_0 вдоль контактной зоны при различных значениях относительного размера щели $\ell_* = (b - -a)/R$ (R – характерный линейный размер среды) приведены на рис. 2. При расчетах использованы безразмерные координаты x' :

$$x = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} x'.$$

Ширина щели принимались в виде параболического закона.

Наибольшие значения контактных напряжений имеют место в средней части контактной зоны, где берега щели смыкаются. При увеличении размера концевой зоны пластических деформаций контактные напряжения уменьшаются. Характер изменения касательных напряжений $p_{xy}(x)$ вдоль контактной зоны подобен изменению нормальных контактных напряжений $p_y(x)$, но абсолютные значения касательных напряжений существенно меньше.

На рис. 3 приведены графики зависимости размеров зоны пластических деформаций $(b_1 - b)/(b - a)$ от безразмерного силового фактора объемных сил F_0/σ_s при различных значениях длины щели $l_* = 0,02; 0,05; 0,10$. В расчетах принято $\nu = 0,3$ (коэффициент Пуассона), $M = 30$ (число чебышевских узлов разбиения интервала интегрирования).

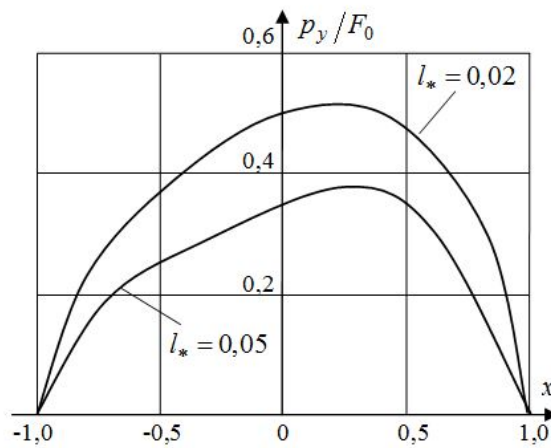


Рис. 2. Зависимость контактных напряжений вдоль контактной зоны при различных значениях относительного размера щели

Предложена эффективная схема расчета частично закрытой внешними силами щели под действием внутреннего давления. Анализ модели частичного закрытия щели переменной ширины с концевыми пластическими зонами в изотропной среде при наличии объемных сил сводится к параметрическому исследованию системы сингулярных интегральных уравнений при различных геометрических и физических параметрах среды. Непосредственно из решения полученных уравнений определяются контактные напряжения $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$, а также размеры контактных и концевых зон пластических деформаций. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определить параметры объемных сил и напряженное состояние изотропной среды, при которых достигается заданная область контакта берегов щели.

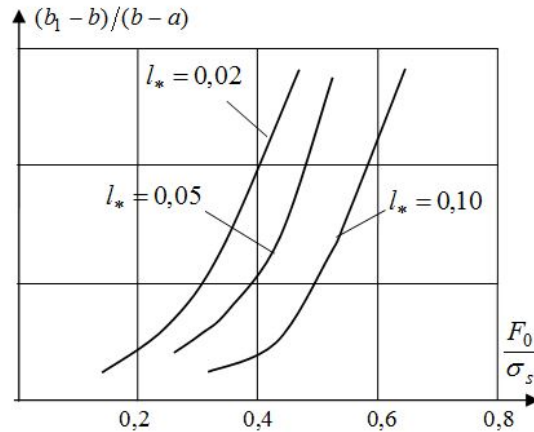


Рис. 3. Зависимость контактных напряжений вдоль от безразмерного силового фактора объемных сил при различных значениях длины щели

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мирсалимов В. М. Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 78–92.
- [2] Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Прикл. мех. и техн. физика. 2010. Т. 51. № 2. С. 148–159.
- [3] Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Разрушение горящего твердого топлива, ослабленного трещиновидной полостью // Прикл. мех. и техн. физика. 2011. Т. 52. № 1. С. 173–184.
- [4] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Effect of damages on crack-visible of the cavity opening displacement on burning solid fuel // Int. J. Damage Mechanics. 2012. № 21. P. 373–389.
- [5] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Interaction of prefracture zones and crack visible cavity in a burning solid with mixed boundary conditions // Acta Mech. 2012. № 223. P. 627–643.
- [6] Гасанов Ш. Г. Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // Механика машин, механизмов и материалов. 2012. № 2(16). С. 58–64.
- [7] Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // Прикл. мех. и техн. физика. 2013. Т. 54. № 6. С. 181–190.
- [8] Mirsalimov V. M., Zolghannein E. Cracks with interfacial bonds in the hub of a friction pair // Meccanica. 2012. 47. P. 1591–1600.
- [9] Prechtek M., Leiva Randa P., Janisch R., et al. Simulation of fracture in heterogeneous elastic materials with cohesive zone models // Int. of J. Fracture. 2011. 168. P. 15–29.
- [10] Kovtunenko V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // ZAMM. 2005. № 85. P. 242–251.

[11] Belhouari M., Amiri A., Mehidi A., et al. Elastic–plastic analysis of interaction between an interface and crack in bi-materials // *Int. J. Damage Mech.* 2014. № 23. P. 299–326.

[12] Fan H., Sun Y. M., Xiao Z. M. Contact zone in an interfacial Zener–Stroh crack // *Mechanics of Materials*. 1998. 30. P. 151–159.

[13] Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // *ПММ*. 1945. Т. 9. № 5. С. 413–424.

[14] Горячева И. Г., Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // *ПММ*. 2012. № 76. Вып. 5. С. 695–709.

[15] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

[16] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

[17] Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1991. 416 с.

V. M. Mirsalimov

CONTACT PROBLEM FOR INTERACTION OF FACES OF VARIABLE WIDTH SLOT WITH PLASTIC DEFORMATION END ZONES

Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Abstract. A plane problem on compression of homogeneous plane with a slot of variable width is considered. The compression of the plane is carried out by body forces. The variable width of the slot is comparable with elastic deformations. Slot faces are under internal pressure. It is assumed that the slot has end zones in a state of plastic flow of the material. Case of occurrence of several sections of the slot faces contact is investigated. It is assumed that in some part of the contact section a stick of the slot faces occurs and in the remaining part a slippage of the slot faces is possible. Equilibrium problem for the slot with partially contacting bonds under the influence of body and surface loads is reduced to a problem of linear conjugation of analytic functions. Contact stresses, sizes of the contact, stick and end zones are found.

Keywords: isotropic medium, slot of variable width, end zones of slot, contact of slot faces, stick of slot faces, slipping of slot faces, body forces.

REFERENCES

[1] Mirsalimov V. M. Simulation of bridged crack closure in a contact pair bushing // *Mechanics of Solids*. 2009. № 4. Issue 2. P. 232–243. (in Russian).

[2] Mir-Salim-zada M. V. Modeling of partial closure of cracks in a perforated isotropic medium reinforced by a regular system of stringers // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2010. № 51. Issue 2. P. 269–279. (in Russian).

Mirsalimov Vagif

e-mail: mir-vagif@mail.ru, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

- [3] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Fracture of a burning solid propellant attenuated by a crack type cavity // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2011. № 52. Issue 1. P. 141–150. (in Russian).
- [4] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Effect of damages on crack-visible of the cavity opening displacement on burning solid fuel // *Int. J. Damage Mechanics*. 2012. № 21. P. 373–389. (in Russian).
- [5] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Interaction of prefracture zones and crack visible cavity in a burning solid with mixed boundary conditions // *Acta Mech*. 2012. № 223. P. 627–643. (in Russian).
- [6] Hasanov Sh. H. Cohesive crack with partially contacting faces in section of the road covering // *Mechanics of machines, mechanisms and Materials*. 2012. № 2 (16). P. 58–64. (in Russian).
- [7] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Simulation of partial closure of a crack-like cavity with cohesion between the faces in an isotropic medium // *J of Applied Mechanics and Technical physics*. 2013. № 54. 1021–1029. (in Russian).
- [8] Mirsalimov V. M., Zolghannein E. Cracks with interfacial bonds in the hub of a friction pair // *Meccanica*. 2012. № 47. P. 1591–1600. (in Russian).
- [9] Prechtek M., Leiva Randa P., Janisch R., et al. Simulation of fracture in heterogeneous elastic materials with cohesive zone models // *Int. of J. Fracture*. 2011. № 168. P. 15–29. (in Russian).
- [10] Kovtunenکو V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // *ZAMM*. 2005. № 85. P. 242–251.
- [11] Belhouari M., Amiri A., Mehidi A., et al. Elastic–plastic analysis of interaction between an interface and crack in bi-materials // *Int. J. Damage Mech*. 2014. № 23. P. 299–326.
- [12] Fan H., Sun Y. M., Xiao Z. M. Contact zone in an interfacial Zener–Stroh crack // *Mechanics of Materials*. 1998. № 30. P. 151–159.
- [13] Galin L. A. Indentation of stamp in presence of friction and cohesion // *J. of Applied Mathematics and Mechanics*. 1945. Vol. 9. № 5. P. 413–424. (in Russian).
- [14] Goryacheva I. G., Malanchuk N. I., Martynyak R.M. Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip // *J. of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 7. Issue. 5. P. 621–630. (in Russian).
- [15] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Amsterdam: Kluwer, 1977. (in Russian).
- [16] Gakhov F. D. Boundary value problems. M.: Nauka. (in Russian).
- [17] Panasyuk V. V. Mechanics of quasibrittle fracture of material. Kiev: Naukova Dumka, 1991. (in Russian).