

А. В. Никитин, А. В. Балашникова, С. В. Тихонов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается неоднородная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что она сохраняет значение предела текучести постоянным вдоль концентрических окружностей. Определено напряженное состояние для трубы. Трансляционная анизотропия впервые введена в работах [2]–[6]. Предельное состояние слоистой трубы при наличии трансляционной анизотропии исследовалось в [7], [10]. Упруго-пластическое состояние неоднородной трубы рассмотрено в работах [8], [9].

Ключевые слова: пластичность, неоднородность, труба, анизотропия, давление.

УДК: 539.375

Рассмотрим толстостенную трубу с радиусами α, β ; $\alpha < \beta$ (рис. 1). Условие пластичности примем в виде [5]:

$$A \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_{xy}^2, \quad k_1, k_2, k_3 = const, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты напряжения в декартовой системе координат, $k_{xy} = k_{xy}(x, y)$.

При $A = B = 1$ и $k_{xy} = const$ имеет место трансляционная анизотропия, при $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_{xy} = const$ — анизотропия Мизеса – Хилла.

© Никитин А. В., Балашникова А. В., Тихонов С. В., 2016

Никитин Андрей Витальевич

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Балашникова Анжелика Вениаминовна

e-mail: info3006@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 16-31-00511 мол_а, 15-41-02453 р_поволжье_а).

Поступила 21.03.2016

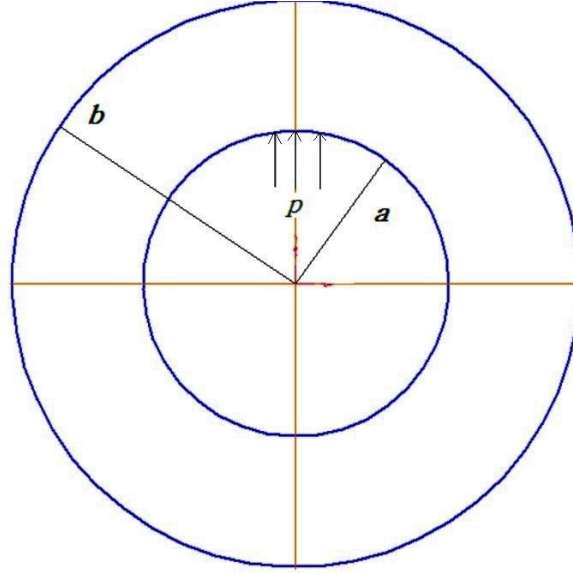


Рис. 1

Положим,

$$\delta = \frac{A - B}{2}, \quad k_1 = k^0 + \delta k'_1, \quad k_2 = k^0 + \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3,$$

$$k_{xy} = k_0 + \delta c(x^2 + y^2), \quad k_0, c - const, \quad (2)$$

где δ — малый безразмерный параметр.

Тогда

$$A = t + \delta, \quad B = t - \delta, \quad t = \frac{A + B}{2}. \quad (3)$$

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k_0 .

Обозначим

$$\frac{k_{xy}}{k_0} = \chi, \quad \frac{p}{k_0} = q. \quad (4)$$

Все величины, имеющие размерность длины, отнесем к некоторой характерной величине r_0 и обозначим:

$$\frac{a}{r_0} = \alpha, \quad \frac{r}{r_0} = \rho. \quad (5)$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (7)$$

Из (1), (2), (6), (7) имеем условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 [A \cos^2 2\theta + B \sin^2 2\theta] + 4\tau_{\rho\theta}^2 [A \sin^2 2\theta + B \cos^2 2\theta] + \\ & + A(k_1 - k_2)^2 + 4Bk_3^2 + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)\tau_{\rho\theta}(A - B)\sin 4\theta - \\ & - 4\tau_{\rho\theta}[\sin 2\theta(k_1 - k_2) + 2k_3 \cos 2\theta] - 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)(\cos 2\theta(k_1 - k_2) - 2k_3 \cos 2\theta) = \\ & = 4(1 + \delta\rho^2 c (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решение будем искать в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}. \quad (10)$$

Предположим, что нулевое, исходное напряженное состояние трубы является осесимметричным, т. е.

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (11)$$

Компоненты напряжений в нулевом приближении определены в [1].

В первом приближении (8) преобразуется к виду:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_\rho^{(1)} = 2\rho^2 c - 1 + (k'_2 - k'_1) \cos 2\theta + 2k'_3 \sin 2\theta, \quad (12)$$

а (9) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Удовлетворим (13), полагая

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12), (14) найдем

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \theta^2} = 2c\rho^4 - \rho^2 + \rho^2 \cos 2\theta (k'_2 - k'_1) + 2\rho^2 k'_3 \sin 2\theta. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi^{(1)} = \Phi_{odn}^{(1)} + \Phi_{chastn}^{(1)}. \quad (16)$$

Однородное уравнение (15) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{odn}^{(1)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{odn}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_{odn}^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (17)$$

Положим,

$$\Phi_{odn}^{(1)} = R_1 \cos(m\theta) + R_2 \sin(m\theta) = R \cos(m\theta + \theta_0), \quad (18)$$

где

$$R_i = R_i(\rho), \quad \cos(\theta_0) = \frac{R_1}{R}, \quad \sin(\theta_0) = \frac{R_2}{R}, \quad R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Согласно [1] имеем при $m = 0$:

$$R = C_{00}, \quad \text{где } C_{00} - const, \quad (19)$$

при $m = 1$:

$$R = \rho(C_{11} + C_{12} \ln \rho), \quad \text{где } C_{11}, C_{12} - const, \quad (20)$$

при $m \geq 2$:

$$R = \rho \left[C_{m1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + C_{m2} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right], \quad (21)$$

где $C_{m1}, C_{m2} - const$.

Согласно (15) при $m = 0, 2$

$$R = C_{00} + \rho \left[C_{m1} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{m2} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right]. \quad (22)$$

Частное решение неоднородного уравнения (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{chastn}^{(1)} = & -\frac{1}{2} \left(\rho^2 \ln \rho - \frac{\rho^2}{2} \right) + \frac{c\rho^4}{4} + \\ & + \rho^2 \left(\frac{k'_2 - k'_1}{4} \right) \cos 2\theta + \frac{k'_3}{2} \rho^2 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (14), (16), (21), (22) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)} = & C_{00} + \\ & + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1} \left[(1 - m^2) \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) - (\sqrt{m^2 - 1}) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ C_{m2} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) + (1 - m^2) \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] \cos (m\theta + \theta_0) + \\
 &\quad + c\rho^2 - \ln \rho + \left(\frac{k'_1 - k'_2}{2} \right) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta,
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 &\sigma_\theta^{(1)} = C_{00} + \\
 &+ \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1} \left[(1 - m^2) \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) - \left(\sqrt{m^2 - 1} \right) \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] + \right. \\
 &+ C_{m2} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) + (1 - m^2) \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] \left. \right\} \cos (m\theta + \theta_0) + \\
 &\quad + 3c\rho^2 - (1 + \ln \rho) + \left(\frac{k'_2 - k'_1}{2} \right) \cos 2\theta + k'_3 \sin 2\theta,
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 &\tau_{\rho\theta}^{(1)} = \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left(m\sqrt{m^2 - 1} \right) \times \\
 &\times \left[-C_{m1} \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) + C_{m2} \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] \sin (m\theta + \theta_0) + \\
 &\quad + \frac{(k'_2 - k'_1)}{2} \sin 2\theta - k'_3 \cos 2\theta,
 \end{aligned} \tag{26}$$

где C_{00} , C_{m1} , $C_{m2} - const$ при $m \geq 1$. Граничные условия на внутреннем контуре трубы согласно [1]

$$\begin{aligned}
 &\sigma_\rho^{(1)p} |_{\rho=\alpha} = 0, \\
 &\tau_{\rho\theta}^{(1)p} |_{\rho=\alpha} = 0.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Из (23), (25), (26) имеем

$$\begin{aligned}
 &C_{00} + \frac{1}{\alpha} C_{21} \left[-3 \cos (\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \alpha) \right] + \\
 &+ C_{22} \left[\sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \sin (\sqrt{3} \ln \alpha) \right] \cos 2\theta = \\
 &= -c\alpha^2 + \ln \alpha - \left(\frac{k'_1 - k'_2}{2} \right) \cos 2\theta + k'_3 \sin 2\theta,
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{2\sqrt{3}}{\alpha} \left[-C_{21} \sin (\sqrt{3} \ln \alpha) + C_{22} \cos (\sqrt{3} \ln \alpha) \right] \sin 2\theta = \\
 &= -\frac{(k'_2 - k'_1)}{2} \sin 2\theta + k'_3 \cos 2\theta.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Из (27), (28) вытекает:

$$\begin{aligned}
 &C_{21} = \frac{\sqrt{3}}{12} \alpha \left(\sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \alpha) - \sin (\sqrt{3} \ln \alpha) \right) (k_1 - k_2), \\
 &C_{22} = \frac{\sqrt{3}}{12} \alpha \left(\sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos (\sqrt{3} \ln \alpha) \right) (k_1 - k_2), \\
 &C_{00} = \ln \alpha - c\alpha^2.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Подставив (29) в (23)–(25), получим:

$$\sigma_{\rho}^{(1)} = -\ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) + c(\rho^2 - \alpha^2) - \alpha \cos 2\theta \left(\frac{k'_1 - k'_2}{2\rho}\right) \\ \left(-\rho + \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right)\right) - \\ - k'_3 \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\theta}^{(1)} = -\ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) - 1 + c(3\rho^2 - \alpha^2) - \alpha \cos 2\theta \left(\frac{k'_1 - k'_2}{2\rho}\right) \\ \left(\rho + \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right)\right) + \\ + k'_3 \sin 2\theta$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(1)} = -\sin 2\theta \left(\frac{k'_1 - k'_2}{2\rho}\right) \left(\rho - \alpha \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) + \alpha \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right)\right) - k'_3 \cos 2\theta.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 63–65.
- [3] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Тихонов С. В. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 66–69.
- [4] Ивлев Д. Д. Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). С. 101–106.
- [5] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). С. 107–110.
- [6] Максимова Л. А. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 91–95.
- [7] Никитин А. В., Тихонов С. В. Предельное состояние слоистой трансляционно-анизотропной трубы // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. 2014. № 2 (16). С. 101–104.
- [8] Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). С. 148–155.

[9] Никитин А. В., Тихонов С. В. Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). С. 137–147.

[10] Никитин А. В., Миронов Б. Г. Пределное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 58–67.

[11] Тихонов С. В. О двусном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 161–168.

A. V. Nikitin, A. V. Balashnikova, S. V. Tikhonov

ABOUT THE DEFINITION OF THE LIMIT STATE OF THE INHOMOGENEOUS PIPES UNDER THE ACTION OF INTERNAL PRESSURE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The nonhomogeneous thick-walled tube under internal pressure. It is assumed that it retains the yield strength value is constant along parallel lines. Defined stress condition for the pipe. Translational anisotropy introduced in [2]–[6]. Limit state of laminated tubes in the presence of the translational anisotropy was studied in [7], [10]. The elastoplastic state of the inhomogeneous pipe is considered in [8], [9].

Keywords: plasticity, heterogeneity, pipe, anisotropy, pressure.

REFERENCES

[1] Ivlev D. D., Ershov L. V. perturbation Method in the theory of elastic-plastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).

[2] Ivlev D. D., Maksimov L. A., Mironov B. G. On the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in the case of plane deformation // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 1(11). P. 63–65. (in Russian).

[3] Ivlev D. D., Maksimov L. A., Tikhonov S. V. About the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in the generalization of the conditions Mises plasticity // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 1 (11). P. 66–69. (in Russian).

Nikitin Andrey Vitalevich, Candidate of physico-mathematical Sciences, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Balashnikova Angelika Veniaminovna, Candidate of physico-mathematical Sciences, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich, Candidate of physico-mathematical Sciences, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

- [4] Ivlev D. D. theory idealisations translational anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2011. № 1 (9). P. 101–106. (in Russian).
- [5] Ivlev D. D., Maksimov L. A., Mironov B. G. The theory of ideal translational plastic anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2011. № 1 (9). P. 107–110. (in Russian).
- [6] Maksimova L. A. On the elastoplastic state of the inhomogeneous pipe under internal pressure // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2007. № 2. P. 91–95. (in Russian).
- [7] Nikitin A. V., Tikhonov S. V. Limiting condition layered translational anisotropic pipe // proceedings of VIII all-Russian conference on mechanics of deformable solids. 2014. № 2 (16). P. 101–104. (in Russian).
- [8] Nikitin A. V., Tikhonov S. V. Elastoplastic state of PA - linearly anisotropic inhomogeneous pipe under internal pressure // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2013. № 4 (80). P. 148–155. (in Russian).
- [9] Nikitin A. V., Tikhonov S. V. The influence of nonlinear inhomogeneity of the material on the elastoplastic state of thick-walled pipes under the influence of internal pressure in translational anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2013. № 4 (80). P. 137–147. (in Russian).
- [10] Nikitin A. V. Limiting condition multilayer anisotropic thick-walled pipes / A. V. Nikitin, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 4 (22). P. 58–67. (in Russian).
- [11] Tikhonov S. V. On the biaxial stretching of the plane of heterogeneous elastic-plastic material // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2007. № 2. P. 161–168. (in Russian).