Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 111–122

А. Д. Москалик, В. П. Радченко

ОЦЕНКА КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОЙ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

Аннотация. Рассматривается толстостенная труба с эллиптически возмущенным внешним контуром под действием внутреннего давления в условиях установившейся ползучести. Построено приближенное аналитическое решение задачи, методом малого параметра до второго приближения включительно. Рассмотрен случай плоского деформированного состояния. Для оценки погрешности приближенного решения задача решена и численно, методом конечных элементов. Выполнен сравнительный анализ напряжений, полученных методом малого параметра и численным методом. Показано, что для труб со значениями показателя установившейся ползучести от 3 до 11 погрешность отклонения приближенного аналитического решения для напряжений во втором приближении от численного решения составляет не более 10 % вплоть до величины сжатия эллипса (отношение разности полуосей к большей полуоси) 6 %.

Ключевые слова: толстостенная труба, эллиптический внешний контур, установившаяся ползучесть, метод малого параметра, приближенное аналитическое решение, второе приближение, конечно-элементная модель, численное решение, погрешность.

УДК: 539.376:517.958

Введение. Один из подходов в решении краевых задач ползучести для элементов конструкций с возмущенными границами состоит в линеаризации граничных условий и реологических соотношений на основе метода малого параметра. Детально метод малого параметра для упругопластических тел изложен в монографии [1] и систематически развивался в научной школе Д. Д. Ивлева, в работах его коллег и учеников на случай различных условий пластичности, составных упругопластических тел, различных типов концентраторов и т. д. Так, предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы рассмотрено в работе [2]; решение задачи об

© Москалик А. Д., Радченко В. П., 2016
Москалик Анна Давидовна
`e-mail:` annmoskalik1@gmail.com, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.
Радченко Владимир Павлович
`e-mail:` radch@samgtu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Поступила 28.01.2016

упругопластическом состоянии двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии приведено в работе [3]; эллиптическая форма отверстия в тонкой пластине рассмотрена в работе [4]; упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, при двуосном растяжении – в работе [5]. Для эллиптической упругопластической трубы построено первое приближение методом малого параметра в монографии [6]. Следует отметить, что все подобные задачи решались в основном в упругопластической области, однако во всех работах отсутствуют численные оценки погрешности построенных приближенных решений для любого приближения. Имеются единичные попытки решения задачи с возмущенными границами и в условиях ползучести [7–9].

Целью данной работы является сравнение приближенного аналитического решения задачи об установившейся ползучести толстостенной трубы с эллиптическим внешним контуром, находящейся под внутренним давлением, полученного с помощью метода малого параметра, с численным решением этой же задачи на основе метода конечных элементов, реализованным с помощью программного комплекса `ANSYS`.

Постановка задачи. Рассматривается толстостенная труба под действием внутреннего давления q с внутренним контуром в виде окружности радиусом $r = h$, внешним эллиптическим контуром с большой полуосью $r = a$ и малой полуосью $r = b$ (см. рис. 1).

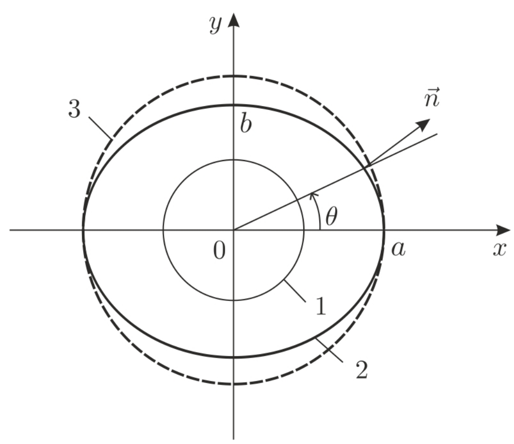


Рис. 1. Схема трубы с возмущенной внешней границей: 1 — внутренний контур трубы $r = h$; 2 — внешний эллиптический контур трубы; 3 — внешний контур цилиндрической трубы $r = a$ для осесимметричного случая

В качестве малого параметра принимается величина сжатия эллипса

$$\delta = (a - b)/a = 1 - \sqrt{1 - e^2}, \tag{1}$$

где $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ – эксцентриситет эллипса. При получении приближенного аналитического решения предполагается, что упругие деформации малы по сравнению с деформациями ползучести и ими можно пренебречь. Таким образом, рассматриваются установившиеся поля скоростей деформаций ползучести и напряжений. Задача решается для случая плоского деформированного состояния в пределах разложения до второго порядка по малому параметру.

Разложение тензора напряжений σ_{ij}, тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и вектора скоростей перемещений $\dot{u}_i$ по малому параметру до членов второго порядка имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)} + \delta^2\sigma_{ij}^{(2)} + O(\delta^3),\\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^{(0)} + \delta\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} + \delta^2\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)} + O(\delta^3),\\ \dot{u}_i &= \dot{u}_i^{(0)} + \delta\dot{u}_i^{(1)} + \delta^2\dot{u}_i^{(2)} + O(\delta^3),\end{aligned}$$

где индексы 0, 1 и 2 соответствуют нулевому, первому и второму приближениям.

Принимая центр эллипса за полюс, уравнение эллиптического внешнего контура трубы в полярных координатах имеет вид:

$$r = b/\sqrt{1 - e^2 cos^2\theta}.$$

Выражая эксцентриситет в последнем соотношении через сжатие δ с использованием формулы (1), имеем

$$r = a(1-\delta)/\sqrt{1 + (\delta^2 - 2\delta)cos^2\theta}.$$

Раскладываем полученное соотношение в степенной ряд по параметру δ и, ограничиваясь членами второго порядка включительно, получаем

$$r = a + \frac{a}{2}(\cos 2\theta - 1)\delta + \frac{3a}{16}(\cos 4\theta - 1)\delta^2. \tag{2}$$

Поскольку задача решается в условиях плоского деформированного состояния, то

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = 0. \tag{3}$$

Предполагается несжимаемость материала для скоростей деформаций на стадии установившейся ползучести, что находит экспериментальное подтверждение [10]:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = 0. \tag{4}$$

Постановка задачи включает в себя уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} = -r\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} - 2\sigma_{r\theta}, \tag{6}$$

которые линейны относительно компонент напряжений и, следовательно, выполняются для каждого приближения.

Аналогично для каждого приближения выполняются уравнения совместности деформаций:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial\dot{u}_r}{\partial r},\\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\dot{u}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\dot{u}_r}{r},\\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{u}_r}{\partial\theta} + \frac{\partial\dot{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r}\Big).\end{aligned} \tag{7}$$

В качестве определяющих используются квазилинейные уравнения установившейся ползучести со степенным законом [10]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}A\sigma_e^{n-1}S_{ij}, \tag{8}$$

где n, A — постоянные характеристики материала, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}$ — девиатор напряжений, σ_e — интенсивность напряжений для случая плоской деформации:

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\big(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\big)^2 + \big(4\sigma_{r\theta}\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Приближенное аналитическое решение задачи. Согласно [10] решение для нулевого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)}(r) &= Q\big[1 - (a/r)^p\big], \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r) &= Q\big[1 - (1-p)(a/r)^p\big], \\ \sigma_{zz}^{(0)}(r) &= Q\big[1 - (1+p)(a/r)^p\big]. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь введено обозначение

$$Q = \frac{q}{\big(a/h\big)^p - 1}, \quad p = 2/n. \tag{10}$$

При этом $\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0$ ввиду симметричности задачи для нулевого приближения.

Поскольку граница при $r = h$ не возмущена и задано давление q, линеаризованное граничное условие на внутреннем радиусе трубы для последующих (после нулевого) приближений представимо в виде

$$\sigma_{rr}^{(k)}\Big|_{r=h} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(k)}\Big|_{r=h} = 0, \tag{11}$$

$k = 1, 2$ – номера приближений.

Линеаризованное граничное условие для первого приближения при $r = a$, согласно [1], зависит от нулевого приближения (9):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}\Big|_{r=a} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr}\cdot\frac{a}{2}(\cos 2\theta - 1) = \frac{Qp}{2} - \frac{Qp}{2}\cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(1)}\Big|_{r=a} &= \Delta\sigma^{(0)}\sin 2\theta = -Qp\sin 2\theta, \end{aligned} \tag{12}$$

где для удобства записи вводится обозначение

$$\Delta\sigma^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)}.$$

Уравнения (4)–(8) с граничными условиями (11), (12) образуют краевую задачу для нахождения первого приближения в напряжениях и дальнейшего полного построения решения поставленной краевой задачи с учетом первого приближения.

Решение для первого приближения поставленной задачи в напряжениях, согласно [10], определяется с использованием функции

$$\begin{aligned} R(r) = C_{11}r^{(p+l)/2}\cos(y\ln r) + C_{12}r^{(p+l)/2}\sin(y\ln r) + \\ + C_{13}r^{(p-l)/2}\cos(y\ln r) + C_{14}r^{(p-l)/2}\sin(y\ln r), \end{aligned} \tag{13}$$

где $C_{11} \div C_{14}$ – константы интегрирования, коэффициенты l и y находятся при определении функции $R(r)$ для конкретного материала согласно [9]. Так, при $n = 3{,}03$

коэффициенты $l = 3,69$, $y = 0,82$; при $n = 10,96$ соответственно $l = 2,61$, $y = 1,56$. Тогда напряжения для первого приближения определяются в следующем виде:

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2L}\Big[R''r^{-p+2} - R'r^{-p+1} + 4Rr^{-p}\Big]\sin 2\theta = \sigma_{r\theta}^{R}\sin 2\theta,$$
$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{1}{L}\int\Big[-R''r^{-p+1} + (4p+1)R'r^{-p} - (4p+4)Rr^{-p-1}\Big]dr\cos 2\theta - \frac{2C}{L}r^{-p} + K^{\psi} =$$
$$= \sigma_{rr}^{R}cos2\theta + \sigma_{rr}^{\Psi},$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{2L}\Big[R'''r^{-p+3} - (p-3)R''r^{-p+2} + (p+5)R'r^{-p+1} + (8-4p)Rr^{-p}\Big]\cos 2\theta +$$
$$+ \frac{2C}{L}(p-1)r^{-p} + K^{\psi} = \sigma_{\theta\theta}^{R}cos2\theta + \sigma_{\theta\theta}^{\Psi}. \quad (14)$$

Здесь введено обозначение $L = 3A\big(\sqrt{3}Qa^{p}/n\big)^{n-1}$; знак $(')$ используется для обозначения дифференцирования по r. Константы интегрирования C, K^{ψ}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14} определяются путем подстановки в граничные условия (11), (12) для первого приближения.

Линеаризованное граничное условие для второго приближения при $r = a$ зависит от нулевого и первого приближений:

$$\sigma_{r\theta}^{(2)}\Big|_{r=a} = \Big[\frac{1}{2}\Delta\sigma^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta\sigma^{R} + \frac{a}{4}\frac{d}{dr}\Big(\Delta\sigma^{(0)} - \sigma_{r\theta}^{R}\Big)\Big]_{r=a}\sin 4\theta +$$
$$+ \Big[\frac{1}{2}\Delta\sigma^{(0)} + \Delta\sigma^{\Psi} - \frac{a}{2}\frac{d}{dr}\Big(\Delta\sigma^{(0)} - \sigma_{r\theta}^{R}\Big)\Big]_{r=a}\sin 2\theta,$$
$$\sigma_{rr}^{(2)}\Big|_{r=a} = \Big[\sigma_{r\theta}^{R} - \frac{a}{4}\frac{d\sigma_{rr}^{R}}{dr} - \frac{a^2}{16}\frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} - \frac{3a}{16}\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} - \frac{1}{2}\Delta\sigma^{(0)}\Big]_{r=a}\cos 4\theta +$$
$$+ \Big[\frac{a}{2}\frac{d\sigma_{rr}^{R}}{dr} + \frac{a^2}{4}\frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} - \frac{a}{2}\frac{d\sigma_{rr}^{\Psi}}{dr}\Big]_{r=a}\cos 2\theta +$$
$$+ \Big[\frac{a}{2}\frac{d\sigma_{rr}^{\Psi}}{dr} + \frac{3a}{16}\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} + \frac{1}{2}\Delta\sigma^{(0)} - \frac{a}{4}\frac{d\sigma_{rr}^{R}}{dr} - \frac{3a^2}{16}\frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2}\Big]_{r=a}. \quad (15)$$

В решении краевой задачи для второго приближения используются функции, зависящие от нулевого и первого приближений:

$$A_4(r) = \frac{s}{2\Delta\sigma^{(0)}}\bigg(\frac{[\Delta\sigma^{R}]^2}{2p} + [\sigma_{r\theta}^{R}]^2\bigg), \quad A_2(r) = \frac{s}{p\Delta\sigma^{(0)}}\Delta\sigma^{R}\Delta\sigma^{\Psi},$$
$$A_0(r) = \frac{s}{2\Delta\sigma^{(0)}}\bigg(\frac{[\Delta\sigma^{R}]^2}{2p} + \frac{[\Delta\sigma^{\Psi}]^2}{p} - [\sigma_{r\theta}^{R}]^2\bigg), \quad B_4(r) = \frac{s}{2p\Delta\sigma^{(0)}}\Delta\sigma^{R}\sigma_{r\theta}^{R},$$
$$B_2(r) = \frac{s}{p\Delta\sigma^{(0)}}\Delta\sigma^{R}\Delta\sigma^{\Psi},$$

где $\Delta\sigma^{R} = \sigma_{rr}^{R} - \sigma_{\theta\theta}^{R}$, $\Delta\sigma^{\Psi} = \sigma_{rr}^{\Psi} - \sigma_{\theta\theta}^{\Psi}$.

Решение задачи по нахождению второго приближения в напряжениях представимо в виде

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \left(\frac{2}{L}\int\left[-V''r^{-p+1} + (4p+1)V'r^{-p} - (4p+16)Vr^{-p-1}\right]dr + \right.$$
$$\left. + \frac{4B_4 + A_4}{r} + K^V\right)\cos 4\theta + \left(\frac{1}{L}\int\left[-W''r^{-p+1} + (4p+1)W'r^{-p} - (4p+4)Wr^{-p-1}\right]dr + \right.$$
$$\left. + \frac{2B_2 + A_2}{r} + K^W\right)\cos 2\theta - \frac{2C}{L}r^{-p} + K^U = \sigma_{rr}^V cos4\theta + \sigma_{rr}^W cos2\theta + \sigma_{rr}^U, \quad (16)$$

где K^V, K^W и K^U — константы интегрирования.

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = \left[\frac{1}{2L}(V''r^{-p+2} - V'r^{-p+1} + 16Vr^{-p}) + B_4(r)\right]\sin 4\theta +$$
$$+ \left[\frac{1}{2L}(W''r^{-p+2} - W'r^{-p+1} + 4Wr^{-p}) + B_2(r)\right]\sin 2\theta = \sigma_{r\theta}^V \sin 4\theta + \sigma_{r\theta}^W \sin 2\theta. \quad (17)$$

Функции $V(r)$, $W(r)$ зависят от характеристик нелинейности материала:

$$\begin{aligned} V(r) = {} & [V_1(r) + v_1]r^{(p+m)/2}\cos(t\ln r) + [V_2(r) + v_2]r^{(p+m)/2}\sin(t\ln r) + \\ & + [V_3(r) + v_3]r^{(p-m)/2}\cos(t\ln r) + [V_4(r) + v_4]r^{(p-m)/2}\sin(t\ln r), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} W(r) = {} & [W_1(r) + w_1]r^{(p+l)/2}\cos(y\ln r) + [W_2(r) + w_2]r^{(p+l)/2}\sin(y\ln r) + \\ & + [W_3(r) + w_3]r^{(p-l)/2}\cos(y\ln r) + [W_4(r) + w_4]r^{(p-l)/2}\sin(y\ln r), \end{aligned} \quad (19)$$

где $v_1 \div v_4$, $w_1 \div w_4$ – константы интегрирования; $l = l(p)$ и $y = y(p)$ идентичны первому приближению, $m = m(p)$, $t = t(p)$ – известные значения для конкретного материала, определяемые согласно [9] при нахождении функции $V(r)$. Так, при $n = 3,03$ коэффициенты $m = 6,73$, $t = 2,18$; при $n = 10,96$ соответственно $m = 3,95$, $t = 3,50$. Использование первого и второго приближений метода малого параметра позволяет определить напряжения и скорости деформаций ползучести в трубе с внешним эллиптическим контуром в зависимости от сжатия $\delta = (a-b)/a$, принимаемой в качестве малого параметра.

Анализ приближенного аналитического решения задачи. В качестве модельного примера рассмотрена труба с внутренним радиусом $h = 0,115$ м, внешней большой полуосью эллипса $a = 0,15$ м под действием внутреннего давления $q = 22,07$ МПа. В качестве модельных материалов рассмотрены углеродистая сталь [11] и жаропрочный сплав ХН73МБТЮ(ЭИ698) [12], реологические характеристики которых в уравнениях состояния (8) следующие:

углеродистая сталь: $n = 3,03$, $A = 9,04 \cdot 10^{-9}$ $T = 649\,°C$;
ХН73МБТЮ (ЭИ698): $n = 10,96$, $A = 4,57 \cdot 10^{-33}$ $T = 775\,°C$.

В таблице 1 приведены значения: $\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ – при учете первого приближения на внешней границе трубы при $\widetilde{r} = a/h + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2h$; $\sigma_{\theta\theta}^{**} = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ – при учете второго приближения на внешней границе трубы при $\widetilde{r} = a/h + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2h + \delta^2 \cdot 3a(\cos 4\theta - 1)/16h$, вычисленные с шагом $0,01$ для различных величин сжатия δ при $\theta = \pi/2$ для углеродистой стали и жаропрочного сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698).

Таблица 1. Значения тангенциального напряжения для трубы с эллиптическим внешним контуром

$\delta, \%$	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Углеродистая сталь											
$\sigma^{*}_{\theta\theta}$	1,0	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,35	1,41	1,46	1,51	1,56
$\sigma^{**}_{\theta\theta}$	1,0	1,07	1,13	1,21	1,29	1,37	1,45	1,54	1,63	1,72	1,82
ХН73МБТЮ (ЭИ698)											
$\sigma^{*}_{\theta\theta}$	1,0	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,48	1,54	1,60
$\sigma^{**}_{\theta\theta}$	1,0	1,06	1,13	1,20	1,27	1,34	1,42	1,49	1,56	1,63	1,70

Из данных, приведенных в таблице, можно сделать вывод, что при возрастании величины сжатия эллипса до $\delta = 0,1$ тангенциальные напряжения в опасном сечении при $\theta = \pi/2$ возрастают в $1,7$–$1,8$ раза.

Конечно-элементная модель задачи. Для построения численного решения разработана конечно-элементная модель толстостенной трубы с эллиптическим внешним контуром, которая реализована с помощью программного комплекса `ANSYS`. Решение выполняется двумя шагами:

1) упругое решение;
2) решение с учётом свойств ползучести материала за время $1 \cdot 10^3$ ч, поскольку за это время напряженное состояние выходит на стационарный режим, соответствующий стадии установившейся ползучести.

Модуль упругости E и плотность рассматриваемых модельных материалов принимаются постоянными для выбранного материала и температуры:

углеродистая сталь: $E = 1.56 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 7630$ кг/м^3, $T = 649\,^\circ C$;
ХН73МБТЮ (ЭИ698): $E = 1.44 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 7900$ кг/м^3, $T = 775\,^\circ C$.

При расчетах используется плоский восьмиузловой элемент `PLANE183`, пригодный для моделирования плоского деформированного состояния и позволяющий учитывать большие деформации при установившейся ползучести.

Принимая во внимание симметрию задачи, в `ANSYS` была построена конечно-элементная дискретная модель для одной четвертой трубы. Количество элементов для $1/4$ трубы составляет порядка 15000. Отсутствующая часть трубы заменена условиями симметричности по оси x и по оси y (см. рис. 1).

Для оценки адекватности конечно-элементной модели на предварительном этапе решается задача об осесимметричной трубе, находящейся в условиях установившейся ползучести под внутренним давлением q, что соответствует нулевому приближению (9) поставленной задачи.

При значениях времени $t = 10$ часов изменения напряжений становятся пренебрежимо малы, а деформации ползучести изменяются линейно, что позволяет говорить о состоянии установившейся ползучести материала при $t \geq 10$ часов. При анализе результата решения задачи в условиях установившейся ползучести в качестве конечного было выбрано время $t = 10^3$ часов.

Оценка погрешности приближенного аналитического решения от численного. Была проведена оценка погрешности приближенного аналитического и конечно-элементного решений задачи для осесимметричной трубы и трубы с эллиптическим внешним контуром с учетом второго приближения включительно на основе значений радиальных σ_{rr} и тангенциальных $\sigma_{\theta\theta}$ напряжений в 15 равноотстоящих точках по координате r_i: $h \le r_i \le a + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2 + \delta^2 \cdot 3a(\cos 4\theta - 1)/16$ $(i = \overline{1,15})$ при $\theta = \pi/2$. Вычисление погрешности проведено по двум нормам:

$$s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{15}\left|\sigma^{(0+1+2)}_{\omega\omega_i} - \sigma^{\texttt{ANS}}_{\omega\omega_i}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{15}\left|\sigma^{\texttt{ANS}}_{\omega\omega_i}\right|} \quad \text{и} \quad \sigma = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{15}\left[\sigma^{(0+1+2)}_{\omega\omega_i} - \sigma^{\texttt{ANS}}_{\omega\omega_i}\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{15}\left[\sigma^{\texttt{ANS}}_{\omega\omega_i}\right]^2}\right)^{1/2}, \quad \omega = r, \theta,$$

где $\sigma^{(0+1+2)}_{\omega\omega_i} = \sigma^{(0+1+2)}_{\omega\omega}(r_i)$, $\sigma^{\texttt{ANS}}_{\omega\omega_i} = \sigma^{\texttt{ANS}}_{\omega\omega}(r_i)$ $(\omega = r, \theta)$ – расчетные значения для аналитического (два приближения) и численного решений соответственно.

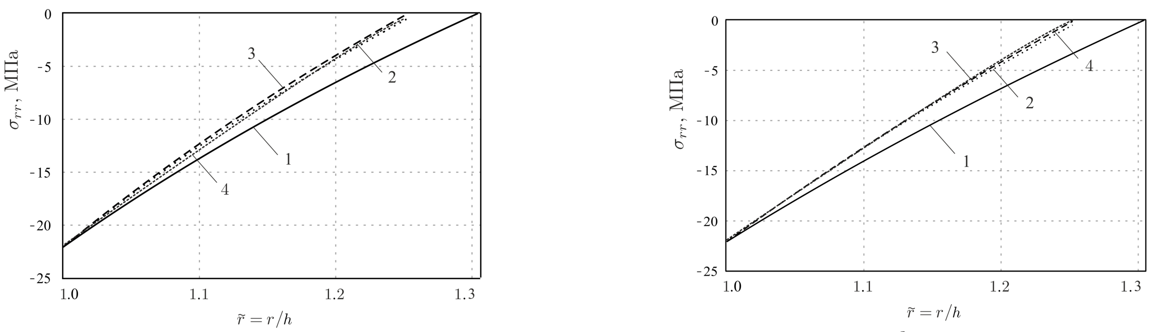
В таблице 2 приведены оценки погрешности между приближенным аналитическим и конечно-элементным расчетами в процентах для труб из малоуглеродистой стали и сплава ЭИ698, используемых в качестве модельных примеров. Через дробную черту приведены погрешности по двум нормам: s/σ.

Таблица 2. Погрешность приближенного аналитического решения от численного для трубы с эллиптическим внешним контуром при $\theta = \pi/2$

δ	0	0,02	0,04	0,06
Углеродистая сталь				
σ_{rr}	0,14/0,32	2,01/1,94	2,61/2,55	2,98/2,91
$\sigma_{\theta\theta}$	0,03/0,07	3,47/4,04	6,21/7,36	9,72/10,03
ХН73МБТЮ (ЭИ698)				
σ_{rr}	0,09/0,20	1,67/1,61	1,87/1,79	2,23/2,24
$\sigma_{\theta\theta}$	0,01/0,02	2,55/3,24	5,11/6,11	8,98/9,04

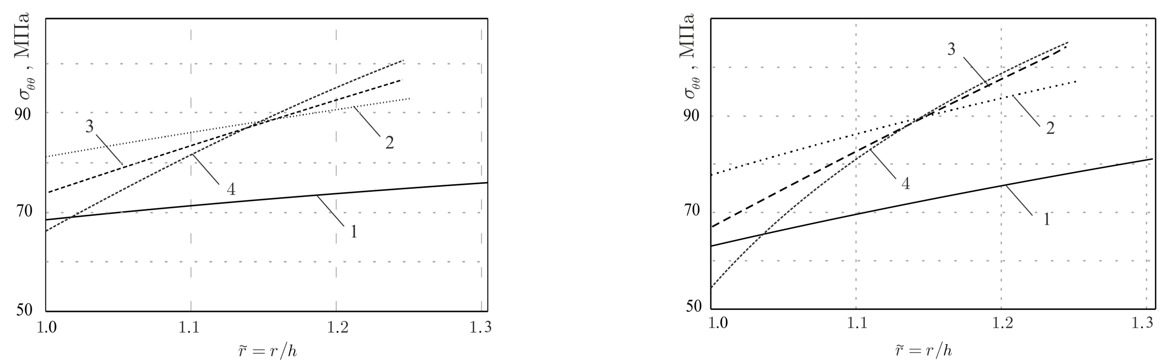
Графики на рис. 2 и 3 построены для радиальной и тангенциальной компонент тензора напряжений при $\delta = 0,04$ и значении угла $\theta = \pi/2$, соответствующего максимальным значениям тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$. Верхний индекс означает количество приближений, используемых для оценки напряжения, индекс $(^{\texttt{ANS}})$ означает конечно-элементное решение.

Заключение. В работе проведен сравнительный анализ приближенного аналитического и конечно-элементного решений задачи о толстостенной трубе с эллиптическим внешним контуром в условиях установившейся ползучести. Анализ данных, представленных в работе, показывает, что приближенное аналитическое решение задачи имеет тенденцию к сходимости. Величина сжатия $\delta = 6\%$ для рассмотренной модельной задачи для трубы в абсолютных величинах составляет 9 мм, что при толщине данной трубы 35 мм составляет 26% толщины. Тем не менее при $\delta = 6\%$ погрешность аналитического решения от численного не превышает 10%. Таким образом, можно утверждать, что приближенное аналитическое решение применимо в прикладных задачах при величине сжатия эллиптического внешнего контура до $\delta = 6\%$.



a b

Рис. 2. Радиальные напряжения для трубы с внешним эллиптическим контуром из углеродистой стали (a) и сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) (b) при $\theta = \pi/2$, $\delta = 0,04$: 1 – $\sigma_{rr}^{(0)}$, 2 – $\sigma_{rr}^{(0+1)}$, 3 – $\sigma_{rr}^{(0+1+2)}$, 4 – $\sigma_{rr}^{\mathtt{ANS}}$



a b

Рис. 3. Тангенциальные напряжения для трубы с внешним эллиптическим контуром из углеродистой стали (a) и сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) (b) при $\theta = \pi/2$, $\delta = 0,04$: 1 – $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 – $\sigma_{\theta\theta}^{(0+1)}$, 3 – $\sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)}$, 4 – $\sigma_{\theta\theta}^{\mathtt{ANS}}$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М. : Наука, 1978. 208 с.

[2] Никитин А. В., Миронов Б. Г. Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 58–67.

[3] Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.

[4] Павлова Т. Н. Об определении перемещений в задаче напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 1 (65). С. 64–69.

[5] Тихонов С. В., Рыбакова Т. И. Упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двуосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 138–146.

[6] Мирсалимов В. И. Неодномерные упругопластические задачи. М. : Наука; Гл. ред. физ.–мат. лит., 1987. 256 с.

[7] Радченко В. П., Башкинова Е. В. Решение краевых задач установившейся ползучести в полярных координатах методом возмущений // Вестник Самарского государственного технического унивесритета. Серия: Технические науки. 1998. № 5. С. 86–91.

[8] Москалик А. Д. Применение метода возмущений к задаче о несоосной трубе в условиях установившейся ползучести // Вестник Самарского государственного технического унивесритета. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 4 (33). С. 76–85.

[9] Радченко В. П., Москалик А. Д. Приближенное аналитическое решение задачи для трубы с эллиптическим внешним контуром в условиях установившейся ползучести // Вестник Самарского государственного технического унивесритета. Серия: Физико-математические науки. 2014. № 4 (37). С. 65–84.

[10] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1979. 744 с.

[11] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М. : Машиностроение, 1975. 400 с.

[12] Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.

A. D. Moskalik, V. P. Radchenko

THE EVALUATION OF FINITE ELEMENT AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE STEADY-STATE CREEP FOR THICK-WALLED TUBE WITH ELLIPTICALLY PERTURBED OUTER BORDER

Samara State Technical University, Samara, Russia

Samara State Technical University, Samara, Russia

Abstract. The thick-walled tube with elliptically perturbed outer contour under the impact of internal pressure in a steady-state creep is considered. The approximate analytical solution of the problem by small parameter method to the second approximation inclusive was constructed. The case of plane strain was considered. For the error estimation of the approximate solution the problem was solved also numerically by the finite element method. A comparative analysis of the stresses, obtained by the small parameter method and numerical method is executed. It was shown that the error of deviation of the approximate analytical solution for stresses in the second approximation from numerical solution for the tubes with exponent of the steady-state creep from 3 to 11 is not more than 10 % till flattening factor of ellipse (that is ratio of the difference of semi-axes to the semi-major axis) 6 %.

Keywords: thick-walled tube, elliptic outer contour, steady-state creep, small parameter method, approximate analytical solution, second approximation, finite element model, numerical solution, solution error.

REFERENCES

[1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elasto-plastic solids. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).

[2] Nikitin A. V., Mironov B. G. Limit condition of a multilayered anisotropic thick-walled pipe // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2014. No 4 (22). P. 58–67. (in Russian).

[3] Kerzhayev A. P. An elasto-plastic condition of the two-layer thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure, at transmitting anisotropy // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2013. № 2 (16). P. 71–81. (in Russian).

[4] Pavlova T. N. On the determination of displacements in the problem of the stress-strain state of a thin plate with an elliptic hole. // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. № 1 (65). P. 64–69. (in Russian).

[5] Tikhonov S. V., Rybakova T. I. Biaxial stretching of elastoplastic plain with eccentric, circular and anisotropic inclusion // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2015. № 3 (25). P. 138–146. (in Russian).

Radchenko Vladimir Pavlovich

`e-mail:` radch@samgtu.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University, Samara, Russia.

Moskalik Anna Davidovna

`e-mail:` annmoskalik1@gmail.com, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University, Samara, Russia.

[6] Mirsalimov V. M. Non-one-dimensional elastoplastic problems. M.: Nauka, 1987. 256 p. (in Russian).

[7] Radchenko V. P., Bashkinova E. V. Solution of the value boundary problems for steady creep in polar coordinates by the perturbation method // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Tekhnicheskie Nauki, 1998. № 5. P. 86–91. (in Russian).

[8] Moskalik A. D. The application of perturbation method to problem of misaligned tube in conditions of steady-state creep // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2013. № 4 (33). P. 76–85. (in Russian).

[9] Radchenko V. P., Moskalik A. D. Approximate analytical solution of the problem for the tube with elliptic outer contour under steady-state creep condition // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2014. № 4 (37). P. 65–84. (in Russian).

[10] Rabotnov Yu. N. Mechanics of Deformable Solids. M.: Nauka, 1979. 744 p. (in Russian)

[11] Malinin N. N. Applied Theory of Plasticity and Creep. M.: Mashinostroenie, 1975. 400 p. (in Russian).

[12] Radchenko V. P., Saushkin M. N. Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures. M. : Mashinostroenie-1, 2005. 226 p. (in Russian).