

В. И. Штука

О РАСЧЕТАХ ДОБАВОЧНОГО ВСЕСТОРОННЕГО ДАВЛЕНИЯ В ДИНАМИКЕ УДАРНОГО НАГРУЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. На примере ударного нагружения несжимаемого цилиндрического упругого слоя, содержащего в себе предварительные деформации, указаны особенности построения лучевых разложений для приближенного вычисления добавочного всестороннего давления и последующих численных расчетов.

Ключевые слова: динамика твердого тела, нелинейная упругость, ударные волны, несжимаемость, численные методы, лучевые ряды, функция добавочного всестороннего давления

УДК: 539.3

Введение. Свойства ударных волн (поверхностей разрывов деформаций) в несжимаемой упругой среде изучались неоднократно [1], [2], [3], [4], [5] дано решение авто-модельной задачи, в [3] предложен вариант метода возмущений, связанный со сращиванием внешнего квазистатического разложения решения с прифронтовой асимптотикой за ударной волной. Здесь будет рассмотрен иной метод построения приближенного решения, который предложившими его авторами [6]. [7] назван лучевым. Он состоит в представлении решения за поверхностями разрывов ускорений в форме степенных рядов по времени или по лучевой координате. Для коэффициентов таких рядов, называемых лучевыми, из дифференциальных уравнений движения и условий совместности разрывов рекуррентно следуют обыкновенные дифференциальные уравнения (уравнения затухания). Такое положение нарушается только в случае ударных волн. Являясь принципиально нелинейным явлением, ударная волна имеет скорость своего движения, несовпадающую со скоростью распространения возмущений по среде и от того рекуррентность в получении уравнений затухания не следует. Это вызвало иное предложение для обобщения метода построения лучевых рядов [8], [9], связанное с разложением интенсивности ударной волны в ряд, коэффициенты которые включают в себя δ -производные от функции, определенной а движущейся поверхности сильных

© Штука В. И., 2016
Штука Виктор Игоревич
e-mail: onslice@mail.ru, аспирант, инженер-математик, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00292).

Поступила 02.04.2016

разрывов. Рекуррентная форма геометрических и кинематических условий совместности разрывов [10], [11] позволила последовательно вычислять коэффициенты такого степенного ряда. Таким способом были приближенно решены одномерные задачи об ударном нагружении предварительно деформированного полупространства [9], об антиплоском и скручивающем ударе по свободному несжимаемому полупространству [12], о таком же ударе по деформированному несжимаемому упругому цилиндрическому слою [13]. В рассмотренных задачах [9], [12], [13] вычислению добавочного давления, как обычно, внимания не уделяется. Считается, что по полученным перемещениям вычислить его не составляет труда. Однако это не всегда просто. Здесь укажем особенности.

Модельные соотношения. Рассматривается математическая модель несжимаемого упругого материала в адиабатическом приближении, которая в декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}) - p\delta_{ij}, \\ 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \quad v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \\ \dot{u}_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\end{aligned}\tag{1}$$

где u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей, α_{ij} и σ_{ij} – тензоры деформаций Альманзи и напряжений Коши – Эйлера, p – функция добавочного всестороннего давления, $\rho = const$ – плотность среды, δ_{ij} – символ Кронекера. Индексом после запятой обозначена производная по соответствующей пространственной координате, точкой сверху – по времени. Упругий потенциал изотропной несжимаемой упругой среды $W(A_1, A_2)$ – плотность распределения внутренней энергии, представлен своим разложением в ряд Тейлора относительно свободного состояния:

$$\begin{aligned}W(A_1, A_2) &= -2\mu A_1 - \mu A_2 + bA_1^2 - (\mu - b)A_1A_2 - aA_1^3 + \dots, \\ A_1 &= \alpha_{ii}, \quad A_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji},\end{aligned}\tag{2}$$

где μ – модуль сдвига, a и b – модули упругости третьего порядка. Сокращение числа постоянных материала вызвано характером дальнейшего винтового деформирования [14], что заставляет их быть связанными между собой. В цилиндрической системе координат r, φ, z , компоненты вектора перемещений зададим в следующей форме:

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t),\tag{3}$$

где $\psi(r, t)$ – угловое смещение, $u(r, t)$ – осевое смещение точек среды.

Так, компоненты тензора напряжений согласно формуле Мурнагана (1) с учетом (2) и (3) имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p - 2\mu - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \dots, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 u_{,r}^2 m + \dots, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + \mu u_{,r}^2 - \theta_3 r^2 \psi_{,r}^2 m + \dots, \quad \sigma_{\varphi z} = u_{,r} r \psi_{,r} (\mu + \theta_3 m + \dots), \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu r \psi_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots), \quad \sigma_{rz} = \mu u_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots), \\ \theta_1 &= \frac{\mu + b}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3(a - b + \mu)}{4}, \quad \theta_3 = -\frac{\mu - b}{2}, \quad \chi_1 = \frac{\theta_2}{\mu},\end{aligned}\tag{4}$$

поэтому уравнение движения (1) в одномерном случае записываются в форме

$$\begin{cases} \sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -r^{-1}\rho v_{\varphi}^2, \\ \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = \rho v_{\varphi,t}, \\ \sigma_{rz,r} + r^{-1}\sigma_{rz} = \rho v_{z,t}. \end{cases} \quad (5)$$

Первая компонента системы (1.5) отвечает за эволюцию функции p . Выделим именно ее, поскольку две другие компоненты определяют поведение функций ψ и u .

$$p, r + r^{-1}(\mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 u_{,r}^2) + 2(\theta_1 + 2\theta_2 m)(u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2) = r \rho \psi_{,t}^2. \quad (6)$$

Ударные волны. В телах, испытывающих существенные нестационарные нагрузки, могут распространяться поверхности разрывов деформаций. Такие процессы не учитываются в дифференциальных формулировках и модельных соотношениях (1). Интегральные формулировки законов сохранения позволяют определить соотношения на разрывы искомых величин и использовать их наряду с дифференциальными. Одним из таких соотношений является динамическое условие совместности

$$[\sigma_{ij}]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i],$$

где $[f] = f^+ - f^-$ – разрыв функции, индексами "плюс" (далее опускается при отсутствии индекса у разрывной функции) и "минус" обозначены ее значения перед и за поверхностью разрывов, n_j – компоненты вектора внешней к поверхности разрывов нормали. Если записать данное условие покомпонентно

$$\begin{cases} [\sigma_{rr}] = 0, \\ [\sigma_{r\varphi}] = -\rho G[v_{\varphi}], \\ [\sigma_{rz}] = -\rho G[v_z], \end{cases} \quad (7)$$

то из него следует условие существования и распространения поверхностей разрывов деформаций (ударных волн) в цилиндрическом слое. Для этого в формулах (7) употребляются выражения (4). Первое уравнение системы (7) позволяет выделить разрыв функции добавочного давления, выразив его относительно интенсивности и предварительного сдвига:

$$[p] = -[m](\theta_1 + \theta_2(2 + 3m)m - \theta_2(1 + 3m)[m] + \theta_2[m]^2). \quad (8)$$

На волне нагрузки Σ_1 выполняется соотношение на интенсивности $r\psi_{,r}/u_{,r} = r[\psi_{,r}]/[u_{,r}]$ [13], поэтому направленность предварительного сдвига сохраняется, а его величина возрастает (это следует из термодинамического условия совместности [5]). Поэтому при отсутствии предварительных скручивающих деформации (8) может быть переписано в виде

$$[p] = -(\theta_1 + \theta_2(2 + 3u_{,r}^2)u_{,r}^2 - \theta_2(1 + 3u_{,r}^2)[u_{,r}](2u_{,r} - [u_{,r}]) + \theta_2[u_{,r}]^2(2u_{,r} - [u_{,r}])^2)[u_{,r}](2u_{,r} - [u_{,r}]).$$

На волне круговой поляризации Σ_2 величина предварительного сдвига сохраняется ($[m] = 0$ [13]) в отличие от его направленности. Поэтому функция на данной поверхности разрывов согласно (5) является непрерывной, $[p] = 0$. Более того, волна круговой поляризации является изоэнтропийной и в несжимаемой среде распространяется за волной нагрузки [5]. Поскольку за волной нагрузки функция добавочного

всестороннего давления непрерывна, то в этой области действует уравнение движения, в частности его компонента (6), описывающая поведение непосредственно.

Лучевой метод. Краевые условия для функций задачи при $t > 0$ такие, что на внутренней стенке ($r = r_0$) происходит скручивающее воздействие, а на внешней стенке ($r = R$) выполняется условие жесткого закрепления

$$\begin{aligned} p(r_0, t) &= p_0 + p_1 t, \\ \psi(r_0, t) &= \psi_1 t + \psi_2 t^2, \quad \psi(R, t) = 0, \\ u(r_0, t) &= u_0, \quad u(R, t) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Следующие далее обозначения соответствуют принятым в работе [13]. Поскольку на волне круговой поляризации разрыв функция не терпит, понадобятся лишь определенные величины на волне нагрузки, а решение за ней запишется в форме ряда

$$\begin{aligned} u^-(r, t) &= u(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t-t_1)^j}{j!}, \quad t_1 = \int_0^r G_1^{-1}(\xi) d\xi, \\ \kappa_j &= \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{jk} \frac{t_1^k}{k!}, \quad \kappa_{jk} = \left[\frac{\delta^k \kappa_j}{\delta t^k} \right]_{t_1=0}; \end{aligned} \quad (10)$$

для разрыва самой функции p и ее градиента

$$\begin{aligned} p^-(r, t) &= p(r) - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \frac{(t-t_1)^j}{j!}, \\ \lambda_j &= \left[\frac{\partial^j p}{\partial t^j} \right]_{t=t_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{jk} \frac{t_1^k}{k!}, \quad \lambda_{jk} = \left[\frac{\delta^k \lambda_j}{\delta t^k} \right]_{t_1=0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Основным уравнением, которое описывает динамику изменения разрыва функции, будет являться выражение для δ -производной [10] на волне нагрузки

$$\begin{aligned} \frac{\delta \lambda_0}{\delta t} &= \lambda_1 + 2\kappa_1 \left((\theta_1 + 6\theta_2 u_{,r}^2) (u_{,rr} - C^{-2} \kappa_2) - r^{-1} u_{,r} (\theta_1 + 2(\theta_2 + \theta_3) u_{,r}^2) \right) - \\ &- 2\kappa_2 C^{-1} u_{,r} (\theta_1 + 2\theta_2 u_{,r}^2) + \dots, \quad C = \sqrt{\mu/\rho}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку решение для компонент осевого и скручивающего воздействия было получено в [13], возможно записать приближенное решение и для функции p . Таким образом, исходя из совокупности уравнений (9), (10), (11) и (12), считаем возможным явное представление искомых коэффициентов, а именно

$$\lambda_{00} = 0, \quad \lambda_{01} = -p_1 - 2r^2 \psi_1 \psi_2 C^{-2} \frac{\theta_1 + 2\theta_2 u_{,r}^2(r_0)}{1 + 5\chi_1 u_{,r}^4(r_0)}, \quad \lambda_{10} = -p_1. \quad (13)$$

Запись решения для функции добавочного давления предполагает знание закона движения волны нагрузки $t_1(r)$ (или $r_1(t)$). Данные выражения, также как и выражения для $t_2(r)$ (или $r_2(t)$), были представлены ранее в [13].

Численное моделирование и результаты расчетов. Считаем, что приближенное решение является удовлетворительным в некоторый промежуток времени $t \in (0; t_0]$ с начала воздействия на слой. При этом функция p определена своими

коэффициентами (13) и разложением (11). После чего область $t > t_0$ и $r \in [r_0; r_2)$ разбивается сеткой с шагом Δt по времени и Δr по координате, чтобы записать в ее узлах уравнение движения (5), а конкретно для функции добавочного всестороннего давления его компоненту (6). Непосредственно за поверхностью разрывов считаем справедливыми лучевые разложения (10) и (11), но с неизвестными коэффициентами. Эти коэффициенты определяются путем минимизации квадрата невязки системы. В качестве вычислительного шаблона использовалась схема с центральными разностями и дискретизированная система разрешается методом простых итераций. Осуществляется плановый переход от одного временного слоя к другому, с обязательным отслеживанием области, где возможна запись конечно-разностного представления уравнения движения.

Следует заметить, что инициализация расчетной схемы является не менее важным мероприятием. Если использовать приближенное решение (13), то необходимо иметь в виду, что при точном решении интенсивность стремится к нулю асимптотически. Этот эффект можно предварительно оценить. Так, при наличии предварительных деформаций антиплоского типа, время смены знака для лучевого приближения интенсивности определится неравенством $t_0 < 2r_0/3C$.

Анатолий Исакович Лурье, выдающийся отечественный ученый-механик, отмечал [14], что несжимаемая теория упругости во многом предназначена для изучения деформационных свойств эластомеров. Выберем материал с параметрами, близкими к параметрам резины 6Ж ТУ 38-005-1166-98: $\rho = 1050$ кг/м³, $C = 50$ м/с, $\chi_1 = 100$. Геометрические размеры слоя: $r_0 = 10^{-2}$ м, $R = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Условия на внутренней границе следующие: $u_0 = 10^{-3}$ м, $\psi_1 = 20\pi$, $\psi_2 = 300\pi$, $p_0 = \mu$ Па, $p_1 = 10^4 \mu$ Па. Такие большие значения ψ_1 и ψ_2 приведут в момент достижения волной нагрузки внешней границы слоя к повороту внутренних точек всего лишь на 0.3 градуса (при этом следует учитывать малость времени достижения волной нагрузки внешней границы слоя T). На рисунке ниже представлены эпюры (всего 10, с указанием моментов времени, для которых они показаны) радиальной компоненты тензора напряжений и функции добавочного всестороннего давления, нормированных по отношению к величине μ . Для σ_{rr} влияние волны круговой поляризации мало заметно, поскольку величина $[p]$ является более существенной и проявляет себя на волне нагрузки.

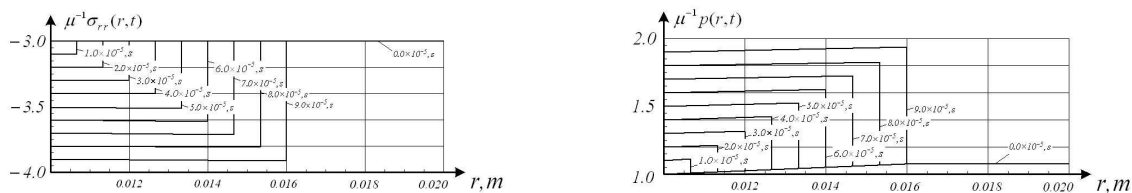


Рис. 1. Эпюры радиальных напряжений и компоненты добавочного всестороннего давления

Приближенное решение и результаты численных расчетов подтверждают, что чем больше скорость и ускорение граничного воздействия, тем больших значений достигнет функция добавочного всестороннего давления. Помимо этого заметно снижение роста p по мере приближения к внешней границе слоя. Частота сетки, начиная с определенного значения, влияет лишь на время расчета, качественно не улучшая полученных результатов.

Заключение. Отметим еще раз, что в большинстве работ вопрос определения функции добавочного всестороннего давления опускался и зачастую оставался за кадром, а здесь именно ему было посвящено основное внимание. Рассмотрим определенный случай, хотя и не самый простой: с наличием кривизны у поверхностей разрывов, предварительных деформаций, которые обуславливают распространение двух ударных волн. На волне круговой поляризации функция является непрерывной. Такой факт позволяет сделать утвердительное заключение о том, что функция не может выступать в качестве маркера или индикатора волны круговой поляризации. Однако в качестве индикатора волны нагрузки она может выступать в полной мере. Исходя из сравнения результатов приближенного и численного решения, необходимо заметить следующее: примененная численная схема позволила улучшить и уточнить приближенное решение для достаточно больших времен, нежели это было возможно при использовании только аналитических выражений. Также положительную роль сыграли первоначальные оценки решений, которые и были использованы в качестве начальных приближений при построении уже численного решения. Данные методики дополнили друг друга синергетически, устранив слабые места приближенного и численного счета.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Boa-The Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 1–14.
- [2] Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М. : Мир, 1972. 183 с.
- [3] Буренин А. А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикл. Механика. 1985. Т. 21, № 5. С. 3–8.
- [4] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М. : Московский лицей, 1998. 412 с.
- [5] Буренин А. А., Дудко О. В., Лаптева А. А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 14–23.
- [6] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus. 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [7] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязкопластических средах // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, № 1. С. 145–155.
- [8] Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток : ДВО АН СССР, 1991. С. 129–137.
- [9] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagations of finite amplitude shock waves // Proc. 1993 Gnt. Symp. of Nonlinear Theory and its Applications. Hawaii. 1993. Vol. 3. P. 1085–1088.
- [10] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М. : Мир, 1964. 528 с.

[11] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.

[12] Герасименко Е. А., Завертан А. В. Расчеты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1, № 3. С. 46–56.

[13] Севастьянов Г. М., Штука В. И., Буренин А. А. Лучевой метод в приближенном решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 50–62.

[14] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980. 512 с.

V. I. Shtuka

**ABOUT THE CALCULATIONS OF ADDITIONAL PRESSURE IN THE
PROBLEM OF DYNAMIC IMPACT LOADING OF AN INCOMPRESSIBLE
CYLINDRICAL ELASTIC LAYER**

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok

Abstract. The paper is based on the problem of shock loading of an incompressible cylindrical elastic layer with preliminary deformations and devoted to constructions of ray series to approximate computation the additional hydrostatic pressure and subsequent numerical calculations.

Keywords: solid dynamics, nonlinear elasticity, shock waves, incompressibility, numerical methods, ray series, additional pressure function

REFERENCES

- [1] Boa-The Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 1–14.
- [2] Blend D. Nonlinear dynamic elasticity. Moscow : Mir, 1972. 183 p. (in Russian).
- [3] Burenin A. A. Shock deformation of incompressible elastic half-space // Applied Mechanics. 1985. Vol. 21, № 5. P. 3–8. (in Russian).
- [4] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear waves in elastic media. Moscow : Moscow High School, 1998. 412 p. (in Russian).
- [5] Burenin A. A., Dudko O. V., Lapteva A. A. By the patterns of distribution change of shape deformations // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2011. Vol. 14, № 4. P. 14–23. (in Russian).
- [6] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus. 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [7] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Vervevko N. D. The ray method for solving problems in visco-elastic-plastic media // Applied Mathematics and Mechanics. 1973. Vol. 37, № 1. P. 145–155. (in Russian).
- [8] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces breaks Applied problems of mechanics of deformable media. Vladivostok: FEB AS USSR, 1991. P. 129–137. (in Russian).
- [9] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagations of finite amplitude shock waves // Proc. 1993 Gnt. Symp. of Nonlinear Theory and its Applications. Hawaii. 1993. Vol. 3. P. 1085–1088.
- [10] Tomas T. Plastic flow and fracture in solids. M.: Mir, 1964. 528 p. (in Russian).
- [11] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).

Shtuka Victor Igorevich

e-mail: onslice@mail.ru, Post-Graduate Student, Mathematician Engineer, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok.

[12] Gerasimenko E. A., Zavertan A. V. The calculations of the dynamics of an incompressible elastic medium and twisting at impact antiplane // Computational Continuum Mechanics. 2008. Vol. 1, № 3. P. 46–56. (in Russian).

[13] Sevastyanov G. M., Shtuka V. I., Burenin A. A. The ray method in approximate solve of shock loading of noncompressible cylindrical layer problem // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 4 (26). P. 50–62. (in Russian).

[14] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).