

М. В. Егоров

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ИЗ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ВБЛИЗИ УДАРНЫХ ВОЛН

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Построены динамические уравнения упруговязкопластического деформирования оболочки вращения с учетом вязкопластических слагаемых в уравнениях динамического деформирования типа С. П. Тимошенко путем введения скорости вязкопластического деформирования на фронте возмущения и перехода к локальной производной по пройденному расстоянию вместо частной производной по времени. Построено динамическое поле перемещений осесимметричной оболочки вращения из упруговязкопластического материала вблизи ударных волн лучевым методом. Определены скорости движения фронтов возмущения, показаны 2 изолированные поверхности, каждая из которых за собой оставляет собственный набор продольных и поперечных компонент возмущений. Получены 2 системы уравнений переноса слабых разрывов, построенных на подвижных поверхностях. В каждой из этих систем имеются алгебраические и дифференциальные уравнения. За первой поверхностью разрыва продольной скорости имеют место алгебраические и линейные, неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами при искомым функциях. За второй поверхностью разрыва поперечной скорости – обобщенное уравнение Риккати с переменными коэффициентами, линейные, неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка. Представлено решение для продольного и поперечного перемещений, угла поворота срединного сечения в виде степенных рядов Тейлора в окрестности поверхностей возмущения третьего порядка точности с учетом пластического деформирования материала за волнами нагрузки. Построено распределение остаточных необратимых вязкопластических деформаций после прохождения ударных волн в виде степенных рядов Тейлора с точностью до третьего порядка.

Ключевые слова: упруговязкопластическое деформирование, оболочка вращения, ударные волны.

УДК: 519.633+531.295

Введение. Уравнения, описывающие динамическое упруговязкопластическое деформирование оболочки вращения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, записанных для продольного перемещения u , поперечного перемещения v и угла поворота срединного сечения ψ , могут

© Егоров М. В., 2016

Егоров Михаил Валерьевич

e-mail: egorovmv89@mail.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 12.04.2016

быть получены путем добавления вязкопластических слагаемых в уравнения типа С. П. Тимошенко.

Уравнения типа С. П. Тимошенко представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамическое поведение тонкой осесимметричной оболочки вращения в пределах упругости[1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_1^2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{c_1^2 \nu}{R^2} v \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \psi - \frac{2c_1^2 \nu}{R^3} v \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{c_1^2}{R^2} v - \frac{c_1^2 \nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c_1^2 \nu}{2R} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{c_1^2 \nu}{R} v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{3c_2^2}{2R^3} v^2; \end{cases} \quad (1)$$

где u – продольное перемещение, v – поперечное перемещение, ψ – угол поворота срединного сечения, R – средний радиус оболочки, h – толщина оболочки, c_1 – скорость распространения продольного возмущения в неограниченной среде, c_2 – скорость распространения сдвигового возмущения в неограниченной среде, ν – коэффициент Пуассона, k – параметр, характеризующий форму поперечного сечения оболочки (площадь, статический момент, момент инерции, ширину нейтрального слоя).

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu)}; \quad c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}, \quad (2)$$

где ρ – плотность материала, E – модуль продольной упругости.

Учет пластических деформаций в уравнениях (1) проведем исходя из уравнений движения сплошной среды в напряжениях (2).

Рассмотрим динамические уравнения осесимметричного движения в скоростях и напряжениях EVP материала [2]:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}); \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2\mu e_{rr}^p; \\ \sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - 2\mu e_{zz}^p; \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \frac{1}{r} v_r - 2\mu e_{\theta\theta}^p; \\ \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - 2\mu e_{rz}^p; \\ e = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r}; \end{cases} \quad (4)$$

В уравнениях (4) λ, μ – упругие параметры Ламэ, компоненты скоростей пластической деформации e_{ij}^p за фронтом возмущений определяются согласно выражению [2]:

$$\frac{de_{ij}^p}{dt} = \epsilon_{ij}^p = \frac{1}{\eta} \frac{I_2(\sigma') - k\sqrt{(2)}}{I_2(\sigma')} \sigma'_{ij}, \quad (5)$$

где $I_2(\sigma') > K\sqrt{2}$.

В (5) введены следующие обозначения: ϵ_{ij}^p – тензор скорости пластической деформации, η – коэффициент динамической вязкости, k – предел текучести, $I_2(\sigma') = \sqrt{\sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij}}$

– второй инвариант девиатора тензора напряжений, $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений.

Для того, чтобы системы уравнений (3)–(4) описывали поведение тонкой оболочки, необходимо провести процедуру осреднения согласно следующему выражению:

$$\int_{R_-}^{R_+} v dr = \tilde{v} h. \quad (6)$$

Система уравнений (3) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mu (\frac{\partial v_r}{\partial z}) + \frac{\partial v_z}{\partial r}) - \frac{2\mu}{\rho c} \epsilon_{rz}^p; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\lambda e + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}) - \frac{2\mu}{\rho c} \epsilon_{zz}^p. \end{cases} \quad (7)$$

С учетом вязкопластических слагаемых уравнения типа С. П. Тимошенко представляются в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_1^2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{c_1^2 \nu}{R^2} \nu \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2\mu}{\rho c} \epsilon_{zz}^p; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \psi - \frac{2c_1^2 \nu}{R^3} v \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{c_1^2}{R^2} v - \frac{c_1^2 \nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c_1^2 \nu}{2R} (\frac{\partial v}{\partial z})^2 + \frac{c_1^2 \nu}{R} v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{3c_2^2}{2R^3} v^2 - \frac{2\mu}{\rho c} \epsilon_{rz}^p. \end{cases} \quad (8)$$

Лучевое представление перемещений оболочки в окрестности волновых фронтов. В системе уравнений (8) перейдем к подвижной системе координат, перемещающейся со скоростью c по оси z , вводя пройденное фронтом расстояние n и используя соотношения

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - c \frac{\partial}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\delta^2}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta}{\delta t} \frac{\partial}{\partial z} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая непрерывность перемещений u, v на подвижных поверхностях Σ_1, Σ_2 и разрывность скоростей, деформаций и их градиентов по z , представим решение для перемещений в виде ряда Тейлора кусочно непрерывной функции за Σ , начиная с самой Σ , где $u^- = u^+$:

$$\begin{aligned} f(n, t) = \Sigma_{k=0}^{\infty} (f_{,k}^+(t)|_{\Sigma_1} - [f, k]|_{\Sigma_1}) n^k \theta(n - c_1 t) + \\ \Sigma_{k=0}^{\infty} (f_{,k}^+(t)|_{\Sigma_1} - [f, k]|_{\Sigma_1}) (n - (c_1 - c_2)t)^k \theta(c_2 t - n). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь θ – единичная функция, f^+ – значение функции перед фронтом Σ , $[f]$ – скачок функции на фронте.

Для получения соотношений для скачков $[u, n], [\psi, n], [v, n]$ проинтегрируем систему уравнений (1) по нормали к распространению возмущений, устремив радиус средней поверхности к бесконечности:

Рассмотрим разрывное поведение искомых функций u, v, ψ как предельное, быстро меняющееся в малой окрестности 2ϵ волнового фронта Σ и введем понятие скачка функции[2]:

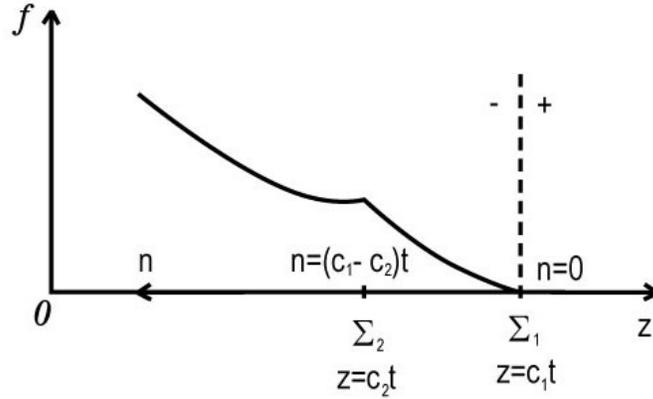


Рис. 1. Кусочно-непрерывное представление перемещения f за волновыми фронтами Σ_1, Σ_2

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial f}{\partial n} dn = f_{-}^{+} = [f]. \quad (11)$$

Тогда система уравнений (1) примет вид

$$\begin{cases} c^2[u, n] = c_1^2[u, n]; \\ c^2[\psi, n] = c_1^2[\psi, n]; \\ c^2[v, n] = c_1^2 k^2[v, n]. \end{cases} \quad (12)$$

Из выполнения системы уравнений (11) следует существование изолированных волн: разрыва продольной деформации и изгиба формы срединной поверхности $[u, n], [\psi, n]$ на волне Σ_1 , перемещающейся со скоростью $c_I = c_1$, и разрыва деформации сдвига на волне Σ_2 , перемещающейся со скоростью $c_{II} = c_2 k$.

Построение системы уравнений для скачков градиентов перемещений на поверхностях Σ_1 и Σ_2 . Проведем разложение полной производной по времени пластических деформаций на локальную и конвективную:

$$\frac{de_{ij}^p}{dt} = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} + c \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x}, \quad (13)$$

где c – скорость движения фронта возмущений (пластическая деформация перед фронтом отсутствует), локальная производная от пластических деформаций на фронте равна 0: $\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = 0$.

$$\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x} = \frac{1}{c} \epsilon_{ij}^p. \quad (14)$$

Согласно выражениям (15)-(16), система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\delta^2[u]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta[u,n]}{\delta t} + c^2[u,nn] = c_1^2[u,nn] + \frac{c_1^2 \nu}{R}[v,n] - \frac{8\mu^2}{3\rho c_1 \eta}[u,n] \left(1 - \frac{K}{\mu \sqrt{4/3[u,n]^2 + [v,n]^2}}\right); \\ \frac{\delta^2[\psi]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta[\psi,n]}{\delta t} + c^2[\psi,nn] = c_1^2[\psi,nn] - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2}[v,n]; \\ \frac{\delta^2[v]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta[v,n]}{\delta t} + c^2[v,nn] = c_2^2 k^2[v,nn] + c_2^2 k^2[\psi,n] - \frac{c_1^2 \nu}{R}[u,n] + \frac{c_1^2 \nu}{2R}[v,n]^2 - \\ - \frac{2\mu}{\rho c_1 \eta} (1/3\mu[v,n] - \lambda[u,n]) \left(1 - \frac{K}{\mu \sqrt{4/3[u,n]^2 + [v,n]^2}}\right). \end{cases} \quad (15)$$

Исходя из представления решения для u , v и ψ в виде ряда Тейлора, построим выражения для деформаций, градиентов и вторых градиентов путем последовательного дифференцирования системы уравнений (17) по пройденному расстоянию за поверхностью Σ_1 , где пройденное расстояние поверхность вводится путем замены $n = ct$. Запишем системы уравнений на поверхности Σ_1 и один, два раза продифференцированные по пройденному расстоянию n :

$$\begin{cases} \frac{\delta[u,n]}{\delta n} - \frac{4\mu^2}{3\rho c_1^3 \eta}[u,n] + \frac{2\sqrt{3}\mu K}{3\rho c_1^3 \eta} = 0; \\ [\psi,n] = [\psi,n]_0; \\ [v,n] = 0; \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} [v,nn] = \frac{c_2^2 k^2}{c_1^2 - c_2^2 k^2} [\psi,n] + [u,n] \left(\frac{2\mu\lambda}{c_1 \rho \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{c_1^2 \nu}{R(c_1^2 - c_2^2 k^2)} \right) - \frac{\lambda K \sqrt{3}}{\rho c_1 \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)}; \\ \frac{\delta[u,nn]}{\delta n} - \frac{4\mu^2}{3\rho c_1^3 \eta}[u,nn] - 0.5 \frac{\delta^2[u,n]}{\delta n^2} + \frac{\nu}{R}[v,nn] = 0; \\ \frac{\delta[\psi,nn]}{\delta n} - 0.5 \frac{\delta^2[\psi,n]}{\delta n^2} - \frac{6c_2^2 k^2}{c_1^2 h^2}[v,nn] = 0; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} [v,nnn] = \frac{2c_1^2}{c_1^2 - c_2^2 k^2} \frac{\delta[v,nn]}{\delta n} + \frac{c_2^2 k^2}{c_1^2 - c_2^2 k^2} [\psi,nn] + \frac{c_1^2 \nu R'[u,n]}{R^2(c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{c_1^2 \nu [u,nn]}{R(c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \\ - \frac{2\mu^2 [v,nn]}{3\rho c_1 \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} + \frac{2\mu\lambda [u,nn]}{\rho c_1 \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} + \frac{\sqrt{3}\mu K [v,nn]}{3\rho c_1 \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2) [u,n]}; \\ \frac{\delta[u,nnn]}{\delta n} - [u,nnn] \frac{4\mu^2}{3\rho c_1^3 \eta} - 0.5 \frac{\delta^2[u,nn]}{\delta n^2} - \frac{\nu}{R^2} R'[v,nn] + \frac{\nu}{2R} [v,nnn] - \\ - \frac{\sqrt{3}\mu K [v,nn]^2}{6\rho c_1^3 \eta [u,n]^2} + \frac{2\sqrt{3}\mu K [u,nn]^2}{3\rho c_1^3 \eta [u,n]^2} = 0; \\ \frac{\delta[\psi,nnn]}{\delta n} - 0.5 \frac{\delta^2[\psi,nn]}{\delta n^2} - \frac{6c_2^2 k^2}{c_1^2 h^2} [v,nn] = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Следует отметить, в системе уравнений (16-18) уравнения для $[u,n]$, $[u,nn]$, $[u,nnn]$ являются линейными неоднородными дифференциальными первого порядка с одним и тем же постоянным коэффициентом при искомой функции: $\frac{4\mu^2}{3\rho c_1^3 \eta}$. Уравнения для $[v,nn]$, $[v,nnn]$ являются алгебраическими. Уравнения для $[\psi,n]$, $[\psi,nn]$, $[\psi,nnn]$ являются также линейными неоднородными дифференциальными уравнениями первого порядка.

Запишем решения дифференциальных уравнений для $[u,n]$, $[u,nn]$, $[u,nnn]$, $[\psi,nn]$, $[\psi,nnn]$ на поверхности Σ_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
[u, n] = \frac{\sqrt{3}K}{2\mu} + e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} ([u, n]_0 - \frac{\sqrt{3}K}{2\mu}); \\
[u, nn] = e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} (C_{12}(n) - C_{120}); \\
C_{120} = [u, nn]_0 - C_{12}(0); \\
C_{12}(n) = \frac{8\mu^4 n^3 ([u, n]_0 - \frac{\sqrt{3}K}{2\mu})}{27\rho^2 c_1^6 \eta^2} - \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{dn}{R(n)} \frac{c_2^2 k^2 \nu [\psi, n]_0}{c_1^2 - c_2^2 k^2} + \\
+ \frac{\arctg(\frac{0.5b+an}{ac-0.25b^2})}{ac-0.25b^2} \left(\frac{\sqrt{3}K\lambda\nu}{c_1 \rho \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{2\mu\lambda\nu[u, n]_0}{c_1 \rho \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} \right) + \frac{c_1^2 \nu \sqrt{3}K}{2\mu(c_1^2 - c_2^2 k^2)} \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{dn}{R(n)} + \\
+ \left(\frac{c_1^2 \nu^2 [u, n]_0}{c_1^2 - c_2^2 k^2} - \frac{\sqrt{3}c_1^2 \nu^2 K}{2\mu(c_1^2 - c_2^2 k^2)} \right) \frac{4a \arctg(\frac{b+2an}{\sqrt{4ac-b^2}})}{(4ac-b^2)^{1.5}} - \frac{2(0.5b+2an)}{(b^2-4ac)(an^2+bn+c)}; \\
[u, nnn] = e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} (C_{13}(n) - C_{130}); \\
C_{130} = [u, nnn]_0 - C_{13}(0); \\
C_{13}(n) = \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} 0.5 \frac{d^2}{dn^2} [u, nn] dn + \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{\nu R'(n) [v, nn]}{R(n)} dn - \\
- \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{\nu [v, nnn]}{2R(n)} dn + \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{\sqrt{3}\mu K [v, nn]^2}{6\rho c_1^3 \eta [u, n]^2} dn - \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{2\sqrt{3}\mu K [u, nn]^2}{3\rho c_1^3 \eta [u, n]^2} dn; \\
[\psi, nn] = C_{14}(n) + C_{140}; \\
C_{140} = [\psi, nn]_0 - C_{14}(0); \\
C_{14}(n) = \frac{6c_2^4 k^4 n \rho \eta + 6\sqrt{3}c_2^2 k^2 \lambda K n}{c_1^4 h^2 \rho \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{3\sqrt{3}c_2^2 k^2 K c_1 \nu \arctg(\frac{0.5b+an}{\sqrt{ac-0.25b^2}})}{h^2 \mu (c_1^2 - c_2^2 k^2) \sqrt{ac-0.25b^2}} + \\
+ \frac{6c_2^2 k^2 e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \left(\frac{3c_1^3 \lambda [u, n]_0}{2\mu(c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{3\sqrt{3}c_1^2 K \lambda}{4\mu^2 (c_1^2 - c_2^2 k^2)} \right)}{c_1^2 h^2} + \int_0^{n_1} e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{dn}{R(n)} \frac{6c_2^2 k^2}{c_1^2 h^2} \frac{[u, n]_0 \sqrt{3}}{2\mu(c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{[u, n]_0 c_1^2 \nu}{c_1^2 - c_2^2 k^2}; \\
[\psi, nnn] = C_{15}(n) + C_{150}; \\
C_{150} = [\psi, nnn]_0 - C_{15}(0); \\
C_{15}(n) = -0.5 \frac{d[\psi, nn]}{dn} - \int_0^{n_1} \frac{6c_2^2 k^2 [v, nnn]}{c_1^2 h^2} dn.
\end{array} \right. \quad (19)$$

По аналогии с предыдущим построением приведем систему уравнений для градиентов скачков перемещений на Σ_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\delta[v, n]}{\delta n} + \frac{c_1^2 \nu}{4Rc_2^2 k^2} [v, n]^2 - \frac{\mu^2}{3\rho c_2^3 k^3 \eta} [v, n] + \frac{2\mu K}{\rho c_2^3 k^3 \eta} = 0; \\
[u, n] = 0; \\
[\psi, n] = 0;
\end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
[\psi, nn] = -\frac{12c_2^2 k^2}{h^2 (c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, n]; \\
[u, nn] = \frac{c_1^2 \nu}{R(c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, n]; \\
\frac{\delta[v, nn]}{\delta n} + [v, nn] \left(\frac{c_1^2 \nu}{2Rc_2^2 k^2} [v, n] - \frac{\mu^2}{3\rho c_2^3 k^3 \eta} \right) - 0.5 \frac{\delta^2[v, n]}{\delta n^2} + 0.5 [\psi, nn] = 0;
\end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{c_1^2 \nu}{R c_2^2 k^2} [u, nn] - \frac{c_1^2 \nu}{4 R^2 c_2^2 k^2} R' [v, n]^2 + \frac{\mu \lambda}{\rho c_2^3 k^3 \eta} [u, nnn] - \frac{K \lambda [u, nn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]} = 0; \\ [\psi, nnn] = \frac{2 c_2^2 k^2}{c_2^2 k^2 - c_1^2} \frac{\delta [\psi, nn]}{\delta n} - \frac{12 c_2^2 k^2}{h^2 (c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, nn]; \\ [u, nnn] = \frac{2 c_2^2 k^2}{c_2^2 k^2 - c_1^2} \frac{\delta [u, nn]}{\delta n} + \frac{c_1^2 \nu}{R (c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, nn] - \frac{c_1^2 \nu R' [v, n]}{R^2 (c_2^2 k^2 - c_1^2)} - \\ - \frac{8 \mu^2 [u, nn]}{3 \rho c_2 k \eta (c_2^2 k^2 - c_1^2)} + \frac{8 \mu K [u, nn]}{3 \rho c_2 k \eta (c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, n]; \\ \frac{\delta [v, nnn]}{\delta n} + [v, nnn] \left(\frac{c_1^2 \nu}{2 c_2^2 k^2 R} [v, n] - \frac{\mu^2}{3 \rho c_2^3 k^3 \eta} \right) - 0.5 \frac{\delta^2 [v, nn]}{\delta n^2} + 0.5 [\psi, nnn] + \\ + \frac{c_1^2 \nu}{c_2^2 k^2 R^2} R' [u, nn] - \frac{c_1^2 \nu}{2 c_2^2 k^2 R} [u, nnn] - \frac{c_1^2 \nu}{2 c_2^2 k^2 R^3} R'^2 [v, n]^2 - \frac{c_1^2 \nu}{4 c_2^2 k^2 R^2} R'' [v, n]^2 - \\ - \frac{c_1^2 \nu}{c_2^2 k^2 R^2} R' [v, n] [v, nn] + \frac{c_1^2 \nu}{2 c_2^2 k^2 R} [v, nn]^2 + \frac{\mu \lambda}{2 \rho c_2^3 k^3 \eta} [u, nnn] - \frac{\mu K [v, nn]^2}{2 \rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]^2} - \\ - \frac{K \lambda [u, nnn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]} + \frac{2 K \lambda [u, nn] [v, nn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]^2} = 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

В системе уравнений (19)–(21) уравнения для $[v, nn]$, $[v, nnn]$ являются линейными дифференциальными неоднородными уравнениями первого порядка. Уравнение для $[v, n]$ – обобщенное уравнение Риккати с постоянными коэффициентами вида $y' + ay^2 + by + c = 0$, допускающее решение при помощи разделения переменных. Решение для скачков градиентов перемещений представимо в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} [u, n] = 0; [v, n] = 0; [v, n] = \frac{\sqrt{a21c21-0.25b21^2}tg((n+C21(0))\sqrt{a21c21-0.25b21^2})-0.5b21}{a21}; \\ a21 = \frac{-c1^2\nu}{4R(0)c2^2k^2}; b21 = \frac{\mu^2}{3\rho c2^3k^3\eta}; c21 = \frac{-2\mu K}{\rho c2^3k^3\eta}; \\ C21(n) = \frac{\arctg(\frac{a21[v,n]_0+0.5b21}{\sqrt{a21c21-0.25b2^2}})}{\sqrt{a21c21-0.25b^2}}; \\ [v, nn] = e^{-\int_0^{n^2} P22(n)dn} (C22(0) + \int_0^{n^2} e^{\int_0^{n^2} P22(n)dn} Q22(n)dn); \\ C22(n) = [v, nn]_0 e^{\int_0^{n^2} P22(0)dn} - \int_0^{n^2} e^{\int_0^{n^2} P22(0)dn} Q22(0)dn; \\ P2(n) = \frac{c1^2\nu[v,n]}{2R(n)c2^2k^2} - \frac{\mu^2}{3\rho c2^3k^3\eta}; \\ Q22(n) = 0.5[v, n]'' - 0.5[\psi, nn] + \frac{c1^2\nu[u, nn]}{R(n)c2^2k^2} + \frac{c1^2\nu R(n)' [v, n]^2}{4R(n)^2 c_2^2 k^2} - \frac{\mu \lambda [u, nn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta} + \\ + \frac{K \lambda [u, nn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]}; \\ [v, nnn] = e^{-\int_0^{n^2} P22(n)dn} (C23(0) + \int_0^{n^2} e^{\int_0^{n^2} P22(n)dn} Q23(n)dn); \\ C23(n) = [v, nnn]_0 e^{\int_0^{n^2} P22(n)dn} - \int_0^{n^2} e^{\int_0^{n^2} P22(n)dn} Q23(n)dn; \\ Q23(n) = 0.5[v, nnn]'' - 0.5[\psi, nnn] - \frac{c1^2\nu R(n)' [u, nn]}{c2^2k^2 R(n)^2} + \frac{c1^2\nu [u, nnn]}{2c2^2k^2 R(n)} + \frac{c1^2\nu R(n)'^2 [v, n]^2}{2c2^2k^2 R(n)^2} + \\ + \frac{c1^2\nu [v, n]^2 R(n)''}{4c2^2k^2 R(n)^2} + \frac{c1^2\nu [v, n] [v, nn] R(n)'}{c2^2k^2 R(n)^2} + \frac{c1^2\nu [v, nn]^2}{2c2^2k^2 R(n)} - \frac{\mu \lambda [u, nnn]}{2\rho c2^3k^3\eta} + \frac{\mu K [v, nn]^2}{2\rho c2^3k^3\eta [v, n]^2} + \\ + \frac{K \lambda [u, nnn]}{\rho c2^3k^3\eta [v, n]} - \frac{2K \lambda [u, nn] [v, nn]}{\rho c2^3k^3\eta [v, n]^2}. \end{array} \right. \quad (23)$$

Численные примеры. Решение систем уравнений (18), (23) позволяет найти члены рядов Тейлора для функций $u(n)$, $\psi(n)$, $v(n)$, а также для скоростей пластической продольной и поперечной деформации за поверхностями Σ_1, Σ_2 :

$$y(n) = \sum_{k=1}^3 \frac{y^{(k)}(c_1 t)}{k!} n^k + \sum_{k=1}^3 \frac{y^{(k)}(c_2 kt)}{k!} n^k \theta(n - c_2 kt), \quad (24)$$

где $\theta(n) = 0, n < 0; 1, n \geq 0$ – функция Хевисайда.

Ниже приведены графики продольного, сдвигового перемещения, а также угла поворота срединного сечения для следующих параметров: $E = 210\text{ГПа}$, $\rho = 7850\text{кг/м}^3$, $\nu = 0.3$, $k = 0.85$, $K = 500\text{МПа}$, $\eta = 10^{15}\text{Пас}$, $h = 1\text{м}$, $R(n) = n^2 - 1.8n + 1$, $[u, n]_0 = [u, nn]_0 = [u, nnn]_0 = [\psi, n]_0 = [\psi, nn]_0 = [\psi, nnn]_0 = [v, n]_0 = [v, nn]_0 = [v, nnn]_0 = 0.0001$

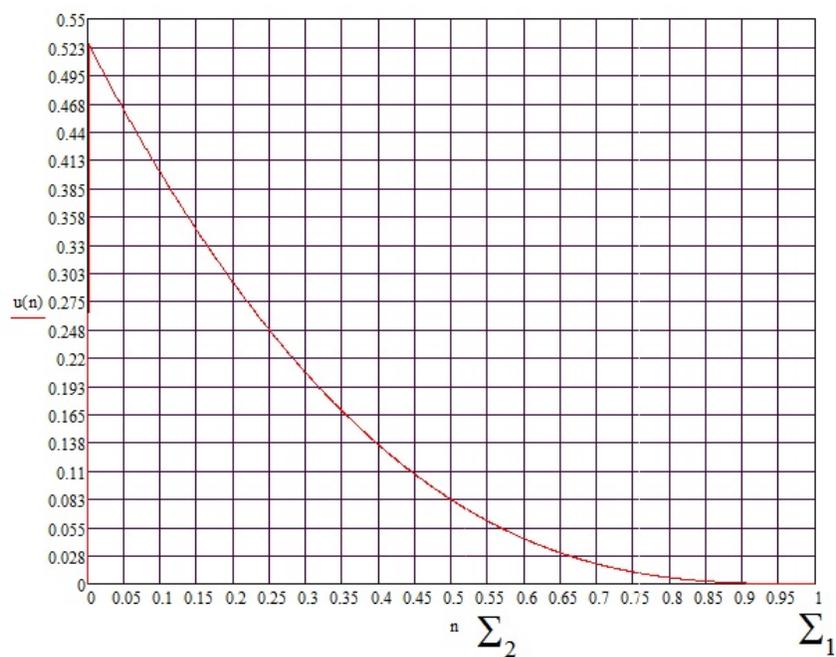


Рис. 2. График продольного перемещения

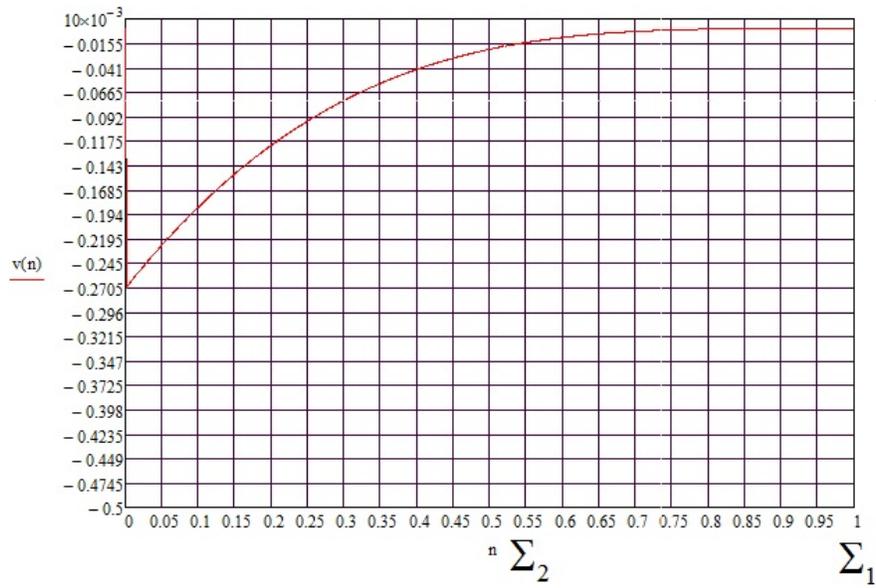


Рис. 3. График сдвигового перемещения

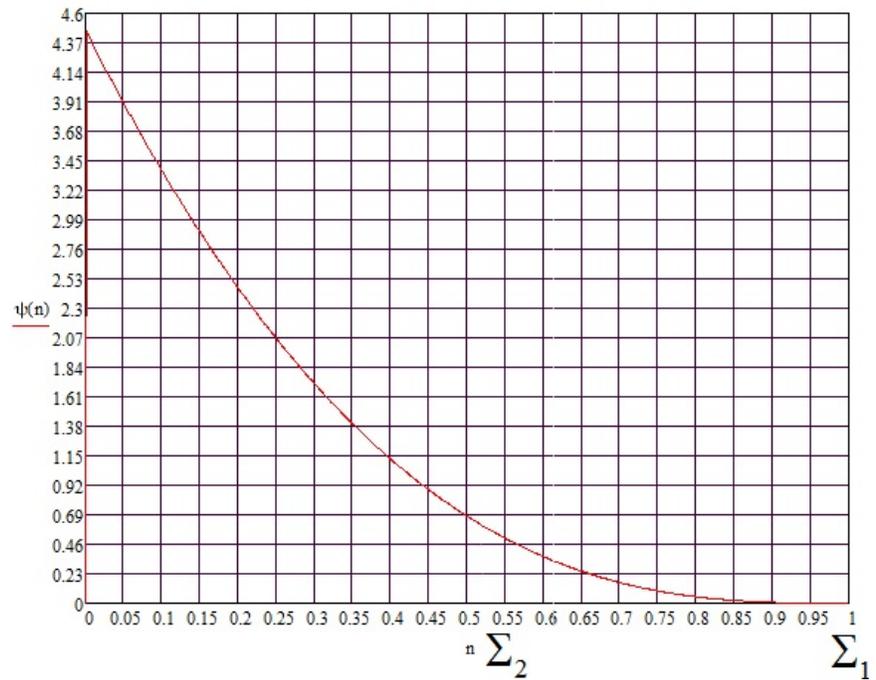


Рис. 4. График угла поворота срединного сечения

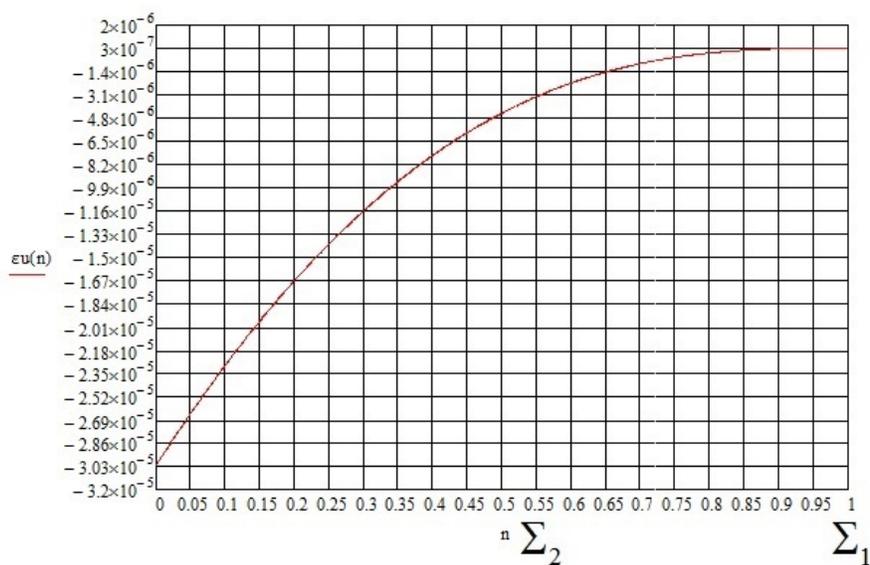


Рис. 5. График изменения скорости остаточных пластических продольных деформаций после прохождения ударного импульса

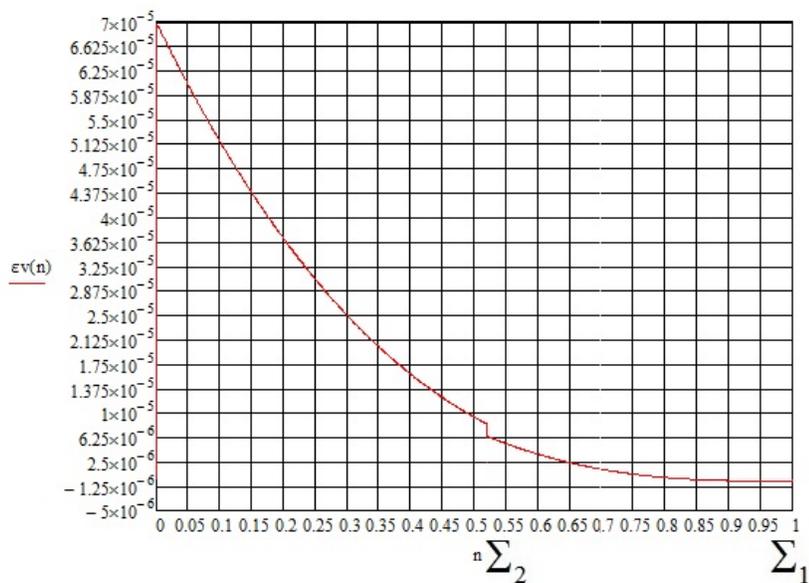


Рис. 6. График изменения скорости остаточных пластических поперечных деформаций после прохождения ударного импульса

Заключение. Применение лучевого метода к уравнениям в частных производных упруговязкопластического деформирования оболочки вращения позволило построить

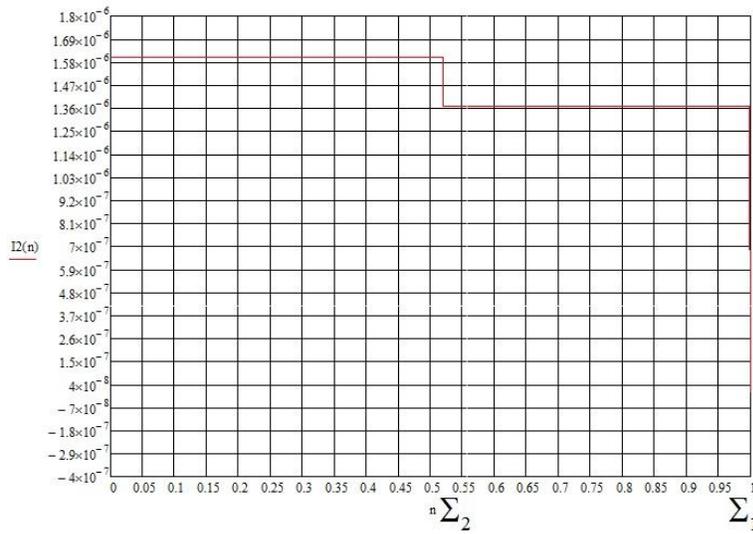


Рис. 7. График изменения второго инварианта скорости пластической деформации

решения для продольного, сдвигового перемещения, а также угла поворота за поверхностями распространения возмущений с точностью до третьего порядка по пройденному расстоянию за фронтами Σ_1 и Σ_2 . Следует отметить особенность скорости пластической деформации, состоящую в том, что она претерпевает скачок на фронте сдвиговой волны Σ_2 вследствие разрывности напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. О распространении волн в упруговязкопластической среде // *Механика деформируемого тела*. 1965. № 4. С. 111–123.
- [2] Сагомоян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. М.: Наука, 1985. 416 с.
- [3] Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара // *Вестник ВГУ. Серия: Математика*. 1997. 204 с.
- [4] Вервейко Н. Д., Егоров М. В. Метод последовательных нагружений расчета динамического деформирования осесимметричной оболочки распространяющимся внутренним давлением // *Вестник ВГУ. Серия: Математика*. 2015. С. 111–120.

M. V. Yegorov

**EPV MATERIAL AXISYMMETRIC ROTATING SHELL DISPLACEMENT
CALCULATION RAY METHOD NEAR SHOCK WAVES**

Voronezh state university, Voronezh, Russia

Abstract. Rotating shell dynamic EVP deformation equations with viscoplastic terms considering dynamic deformation equations S. P. Timoshenko's type are built by introducing of viscoplastic deformation speed on perturbation front and transition to local derivative according to the traveled distance instead partial derivative with respect on time. EVP material rotating axisymmetric shell dynamic displacement field near shock waves is built by ray method. Perturbation fronts velocity movement are identified, two isolated surfaces are shown, each of which reserves their own set of longitudinal and transverse components of perturbation. Weak discontinuity transition two equation systems are obtained, which built on moving surfaces. There are algebraic and differential equations in each of this systems. There are for the longitudinal velocity discontinuity surface algebraic and first order linear heterogeneous differential equations with constant coefficients of the unknown functions. There are for the second transverse velocity discontinuity surface generalized Rikkati equation with variable coefficients, linear heterogeneous differential equations. Longitudinal, transverse and rotation angle mindsection as Taylor's power row in the surrounding of perturbation surfaces with third order accuracy with material plastic deformation for downloading waves considering solution is presented. Residual irreversible viscoplastic deformation distribution is built after shock waves passing as Taylor's power row with third order accuracy.

Keywords: EVP deformation, rotating shell, shock waves.

REFERENCES

- [1] Bykovtsev G. I., Verveyko N. D. Wave propagation in the elasticviscousplastic media // *Mechanics of Solid*. 1965. № 4. P. 111–123. (in Russian).
- [2] Sagomonyan A. Y. *Stress waves in continuous environments*. M.: Science, 1985. 416 p. (in Russian).
- [3] Verveyko N. D. EVP and water hammer waves ray theory // *VSU*. 1997. 204 p. (in Russian).
- [4] Verveyko N. D., Yegorov M. V. Consecutive loading method of axisymmetric shell dynamic deformation calculation distributed internal pressure // *VSU messenger. Math. series*. 2015. P. 111-120. (in Russian).

Yegorov Mikhail Valerievich

e-mail: egoeovmv89@mail.ru., Post graduate student., Voronezh state university, Voronezh, Russia.