

Д. А. Аbruков

**ИЗГИБ ПОЛУПОЛОСЫ СО СВОБОДНЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ КРАЯМИ,
НА ТОРЦЕ КОТОРОЙ ЗАДАНЫ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ
И ОБОБЩЕННАЯ ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА.
ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Впервые построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба тонкой пластины в форме полуполосы, продольные стороны которой свободны, а на торце заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Оно представляется в рядах по функциям Фадля – Папковича. Искомые коэффициенты рядов находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

Ключевые слова: изгиб пластины, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+517.95

Актуальность исследуемой проблемы. В статьях [1], [2], [3] изучались свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в обычном смысле [1]. Поэтому разложения по ним невозможно построить, опираясь на классический аппарат теории базиса функций [7]. Решению краевой задачи предшествует изучение, так называемых разложений Лагранжа [1]. Это, в отличие от разложений двух функций, возникающих при решении краевой задачи, разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлона – Рибьера. Точные аналитические решения краевой задачи изгиба тонкой полуполосы, продольные стороны которой свободны от закрепления, до настоящего времени не были найдены.

Материал и методика исследований. Рассмотрим пластину, отнесенную к декартовым координатам x, y . Элемент пластины с внутренними силовыми факторами, соответствующими классической теории изгиба тонких пластин, показан на рис. 1. Дифференциальные уравнения равновесия можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x, y) = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + T_x = 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Поступила 11.11.2014

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-13-00118.

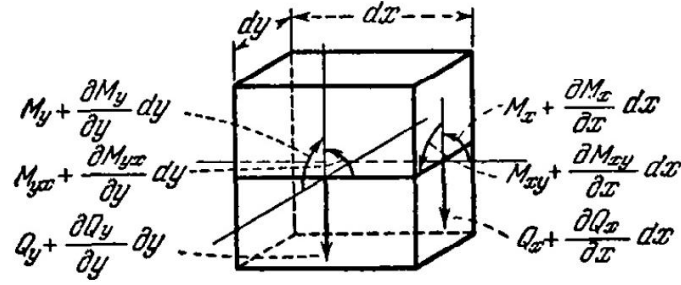


Рис. 1

где $P(x, y)$ – произвольная поперечная нагрузка (далее $P(x, y) = 0$), Q_x, Q_y – поперечные силы, M_x, M_y, M_{xy} ($M_{xy} = -M_{yx}$) – изгибающие и крутящий моменты. Функции

$$T_x(x, y) = \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} - Q_x(x, y), \quad T_y(x, y) = \frac{\partial M_y(x, y)}{\partial y} - Q_y(x, y). \quad (2)$$

Моменты M_x, M_y, M_{xy} и углы поворота Φ_x, Φ_y можно выразить через прогиб $w = w(x, y)$:

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy}(x, y) &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \Phi_x(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ν – коэффициент Пуассона, а

$$D = \frac{E\rho^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины (E – модуль упругости, ρ – толщина пластины). Кроме того,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (4)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа на плоскости.

Подставляя выражения (4) в первое из уравнения (1) получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = P(x, y). \quad (5)$$

Помимо обычных сил Q_x, Q_y вводятся также обобщенные в смысле Кирхгоффа поперечные силы

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем строить решение, пользуясь методом начальных функций [4], позволяющим эффективно получать выражения для функций Фадля – Папковича. Основные соотношения метода имеют вид

$$W(x, y) = L_{WW}(y)W_0(x) + L_{W\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{WM}(y)M_0(x) + L_{WQ}(y)Q_0(x),$$

$$\begin{aligned}
\Phi_y(x, y) &= L_{\Phi W}(y)W_0(x) + L_{\Phi\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{\Phi M}(y)M_0(x) + L_{\Phi Q}(y)Q_0(x), \\
M_y(x, y) &= L_{MW}(y)W_0(x) + L_{M\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{MM}(y)M_0(x) + L_{MQ}(y)Q_0(x), \\
K_y(x, y) &= L_{QW}(y)W_0(x) + L_{Q\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{QM}(y)M_0(x) + L_{QQ}(y)Q_0(x).
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{WW}(y) &= L_{QQ}(y) = \cos \alpha y + \frac{1-\nu}{2}\alpha y \sin \alpha y; \\
L_{WM}(y) &= L_{\Phi Q}(y) = -\frac{1}{2\alpha}y \sin \alpha y; \\
L_{W\Phi}(y) &= L_{MQ}(y) = -\frac{1}{2\alpha}[(1+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu)\alpha y \cos \alpha y]; \\
L_{WQ}(y) &= \frac{1}{2\alpha^3}[-\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y]; \\
L_{\Phi\Phi}(y) &= L_{MM}(y) = \cos \alpha y - \frac{1-\nu}{2}\alpha y \sin \alpha y; \\
L_{\Phi W}(y) &= L_{QM}(y) = \frac{1}{2}[-(1+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu)\alpha y \cos \alpha y]; \\
L_{\Phi M}(y) &= -\frac{1}{2\alpha}[\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y]; \\
L_{MW}(y) &= L_{Q\Phi}(y) = \frac{1}{2}(1-\nu)^2\alpha^3 y \sin \alpha y; \\
L_{M\Phi}(y) &= \frac{1-\nu}{2}\alpha[(3+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu)\alpha y \cos \alpha y]; \\
L_{QW}(y) &= \frac{1-\nu}{2}\alpha^3[(3+\nu) \sin \alpha y - (1-\nu)\alpha y \cos \alpha y] -
\end{aligned} \tag{8}$$

операторы метода начальных функций, причем, $\alpha = \partial/\partial x$, $\alpha^2 = \partial^2/\partial x^2$ и т. д. Поэтому выражения (8) представляют собой дифференциальные операторы бесконечного порядка. $W(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $K_y(x, y)$ – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и обобщенная в смысле Кирхгоффа поперечная сила, умноженные на D . Эти функции, определенные при $y = 0$,

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= Dw(x, 0), & \Phi_0(x) &= \frac{\partial W(x, 0)}{\partial y}, \\
M_0(x) &= M_y(x, 0), & Q_0(x) &= K_y(x, 0),
\end{aligned} \tag{9}$$

называются начальными. Зная начальные функции, по формулам (7), (8) можно найти все факторы. В качестве начальных функций могут быть выбраны функции $W(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $K_y(x, y)$, определенные при любом значении $y = const$. Однако практически их удобно выбирать так, чтобы две из них были известны сразу, например, из условий симметрии задачи.

Рассмотрим пластину $\{\Pi : x \geq 0, |y| \leq h\}$ шириной $2h$ со свободными от закрепления краями $y = \pm h$:

$$M_y(x, \pm h) = K_y(x, \pm h) = 0 \tag{10}$$

и некоторыми граничными условиями на торце $x = 0$. Решение задачи будем искать с разделением на симметричное и обратно симметричное относительно линии симметрии пластины $y = 0$. В случае симметричной задачи начальные функции $\Phi_0(x) = Q_0(x) = 0$. С помощью

формул (7) удовлетворим граничным условиям (10), которые теперь будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{QW}(h)W_0(x) + L_{QM}(h)M_0(x) &= 0, \\ L_{MW}(h)W_0(x) + L_{MM}(h)M_0(x) &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $L_{MW}(h)$, $L_{MM}(h)$ и т. д. – операторы метода начальных функций (8), определенные при $y = h$.

Введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$M_0(x) = L_{QW}(h)F(x), \quad W_0(x) = -L_{QM}(h)F(x). \tag{12}$$

При этом первое из уравнений (11) будет тождественно удовлетворено, а второе примет такой вид:

$$-\frac{1}{4}\alpha^3 (2(\nu - 1)\alpha h + (\nu + 3) \sin 2\alpha h) F'(x) = 0. \tag{13}$$

Нулевым корням уравнения (13) отвечает функция

$$F_0(x) = C_4 x^3 + C_3 x^2 + C_2 x + C_1, \tag{14}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные интегрирования. Элементарное решение найдем, подставляя $F(x) = F_0(x)$ в соотношения (12), (7) и раскладывая операторы метода начальных функций в ряды по степеням параметра α ([4]).

$$W(x, y) = 2h\nu(3xC_4 + C_3), \quad \Phi_x(x, y) = 6h\nu C_4. \tag{15}$$

Подставляя $F(x) = e^{\lambda x}$ в (13), получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$L(\lambda) = -\frac{1}{4}(\nu - 1)\lambda^3 (2(\nu - 1)\lambda h + (\nu + 3) \sin 2\lambda h) = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) помимо нулевых имеет два действительных и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Ниже для иллюстрации приведены значения пяти ненулевых корней уравнения (16) при $h = 2$, $\nu = \frac{1}{3}$, принадлежащих первой координатной четверти (табл. 1).

Таблица 1

| № корня λ_k | $Re\lambda_k$ | $Im\lambda_k$ |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 0,6489347699124498204415 | 0 |
| 2 | 1,920926875876095578757 | 0,2534177319545075720067 |
| 3 | 3,502055248275297722192 | 0,4246957870594158390368 |
| 4 | 5,078718900627479816160 | 0,5213277636781326527900 |
| 5 | 6,653374600317019693510 | 0,5900791876440081757655 |

Для определения точных значений комплексных Λ нужно воспользоваться следующей асимптотической формулой (принципы построения асимптотических формул для корней трансцендентных уравнений можно найти в книге [6]):

$$\lambda_{k+1} \approx \frac{1}{h} \left[k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(4\zeta k\pi)}{4k\pi} \right] + i\frac{1}{h} \left[\frac{\ln(4\zeta k\pi)}{2} + \frac{1}{2k} \right], \tag{17}$$

$$\zeta = \frac{1-\nu}{3+\nu}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее для упрощения выкладок корни $\pm\lambda_1$ и $\pm\bar{\lambda}_1$ будем рассматривать как комплексные, а в конечных выражениях перейдем к пределу, полагая, что мнимые части этих корней стремятся к нулю.

Аналогично [10] функцию $F(x)$ теперь можно представить в виде ряда с неопределенными коэффициентами A_k :

$$F(x) = F_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k e^{\bar{\lambda}_k x}, \quad (\lambda_k \in \Lambda, \operatorname{Re} \lambda_k < 0). \quad (18)$$

Подставляя ее в формулы (12), найдем начальные функции, а затем по формулам (7) – прогиб, угол поворота, изгибающий момент и обобщенную поперечную силу ($\operatorname{Re} \lambda_k < 0$):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \phi_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ K_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \chi_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\omega(\lambda_k, y) = \frac{1}{2} \lambda_k [(\nu + 1) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + (\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y);$$

$$\phi_y(\lambda_k, y) = \frac{1}{2} \lambda_k^2 [(\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - ((\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h) + \sin(\lambda_k h)) \sin(\lambda_k y)];$$

$$m_y(\lambda_k, y) = -\frac{\nu-1}{2} \lambda_k^3 [(\nu + 3) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + (\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y); \quad (20)$$

$$\chi_y(\lambda_k, y) = \frac{(\nu - 1)^2}{2} \lambda_k^5 [y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - h \cos(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)]$$

– функции Фадля – Папковича.

Выражения для прочих факторов можно получить по формулам (2)–(4), (6):

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_x(x, y) &= 6h\nu C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \phi_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ K_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ Q_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k q_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ Q_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k q_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ T_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k t_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k t_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ T_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k t_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k t_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
 m_x(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu-1)^2}{2} \lambda_k^3 \{ [\lambda_k^h \cos(\lambda_k h) - \sin(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \}; \\
 m_{xy}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu-1)}{2} \lambda_k^3 \{ (\nu-1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - \\
 &\quad - [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \}; \\
 \phi_x(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} \lambda_k^2 \{ [(\nu+1) \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k^h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \\
 &\quad + (\nu-1) \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \}; \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$\chi_x(\lambda_k, y) = \frac{\nu-1}{2} \lambda_k^4 \{ [(\nu-5) \sin(\lambda_k h) - (\nu-1) \lambda_k^h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - (\nu-1) \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \};$$

$$q_x(\lambda_k, y) = -(\nu-1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y); \quad q_y(\lambda_k, y) = (\nu-1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y);$$

$$t_x(\lambda_k, y) = \frac{(\nu-1)^2}{2} \lambda_k^4 \{ [\sin(\lambda_k h) - \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \};$$

$$\begin{aligned}
 t_y(\lambda_k, y) &= -\frac{(\nu-1)}{2} \lambda_k^4 \{ (\nu-1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - \\
 &\quad - [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k y \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \}
 \end{aligned}$$

– функции Фадля – Папковича.

Функцию $F(x)$ можно ввести иначе. Так, чтобы тождественно удовлетворялось второе уравнение (11). Тогда получим другое представление для функций Фадля – Папковича. Одно представление легко выразить через другое. Но оба представления важны при изучении поведения решений вблизи угловых точек границы. Представление функций Фадля – Папковича, используемое в этой статье, назовем первым или S-представлением.

Порождающими функциями для функций Фадля – Папковича (20), (22) называются соответственно функции $\omega(\lambda, y)$, $\phi_y(\lambda, y)$ и т. д., получающиеся из функций Фадля – Папковича путем замены λ_k комплексным параметром λ .

Удовлетворяя с помощью выражений (21) граничным условиям, заданным на торце полуполосы $x = 0$, приходим к задаче определения коэффициентов A_k, \bar{A}_k из двух разложений по двум системам функций Фадля – Папковича, например,

$$\begin{aligned}
 M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y), \\
 K_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y),
 \end{aligned} \tag{23}$$

где $M_x(y) = M_x(0, y)$, $K_x(y) = K_x(0, y)$ – заданные при $x = 0$ изгибающий момент и обобщенная поперечная сила.

При построении биортогональных систем функций нужно знать первые члены разложений в ряды Тейлора по степеням λ порождающих функций, а также функции $L(\lambda)$. Приведем их:

$$L(\lambda) = -h(\nu^2 - 1)\lambda^4 + \frac{h^3(\nu+3)(\nu-1)}{3}\lambda^6 + \dots;$$

$$\omega(\lambda, y) = h\nu\lambda^2 - \frac{h(2h^2\nu - h^2 + 3y^2)}{6}\lambda^4 + \dots; \quad \phi_y(\lambda, y) = -hy\lambda^4 + \frac{hy(h^2\nu - y^2\nu + 2y^2)}{6}\lambda^6 + \dots;$$

$$m_y(\lambda, y) = -(\nu^2 + 1)h\lambda^4 + \frac{h(\nu-1)(h^2\nu + 3y^2)}{3}\lambda^6 + \dots;$$

$$\chi_y(\lambda, y) = \frac{(\nu-1)^2}{6}hy(h^2 - y^2)\lambda^8 - \frac{hy(h^4 - y^4)(\nu-1)^2}{60}\lambda^{10} + \dots;$$

$$\begin{aligned}
m_x(\lambda, y) &= \frac{(\nu-1)^2}{6}h(3y^2 - h^2)\lambda^6 + \frac{(\nu-1)^2}{60}h(h^4 - 5y^4)\lambda^8 + \dots; \\
m_{xy}(\lambda, y) &= -hy(\nu-1)\lambda^5 + \frac{(\nu-1)}{6}hy(h^2\nu - \nu y^2 + 2y^2)\lambda^7 + \dots; \\
\phi_x(\lambda, y) &= \nu h\lambda^3 + \frac{h}{6}(h^2 - 3y^2 - 2h^2\nu)\lambda^5 + \dots; \\
\chi_x(\lambda, y) &= -2h(\nu-1)\lambda^5 + \frac{(\nu-1)}{6}h(h^2\nu - 3\nu y^2 + h^2 + 9y^2)\lambda^7 + \dots
\end{aligned} \tag{24}$$

$$q_x(\lambda, y) = -h(\nu-1)\lambda^5 + \frac{(\nu-1)}{6}h(h^2+3y^2)\lambda^7 + \dots; \quad q_y(\lambda, y) = (\nu-1)hy\lambda^6 - \frac{(\nu-1)}{6}hy(h^2+y^2)\lambda^8 + \dots ;$$

$$\begin{aligned}
t_x(\lambda, y) &= -\frac{(\nu-1)^2}{6}h(3y^2 - h^2)\lambda^7 + \frac{(\nu-1)^2}{60}h(5y^4 - h^4)\lambda^9 + \dots; \\
t_y(\lambda, y) &= (\nu-1)yh\lambda^6 - \frac{(\nu-1)}{6}hy(2y^2 + h^2\nu - \nu y^2)\lambda^8 + \dots
\end{aligned}$$

Уравнения для определения биортогональных систем функций $W_k(y)$, $\Phi_{yk}(y)$ и т. д. для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ выглядят следующим образом [9]:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y)W_k(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_k^2)}; & \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\lambda, y)\Phi_{yk}(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} m_y(\lambda, y)M_{yk}(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} \chi_y(\lambda, y)K_{yk}(y)dy &= \frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y)M_{xk}(y)dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} m_{xy}(\lambda, y)M_{xyk}(y)dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\lambda, y)\Phi_{xk}(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}; & \int_{-\infty}^{\infty} \chi_x(\lambda, y)K_{xk}(y)dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} q_x(\lambda, y)Q_{xk}(y)dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} q_y(\lambda, y)Q_{yk}(y)dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} t_x(\lambda, y)T_{xk}(y)dy &= \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} t_y(\lambda, y)T_{yk}(y)dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Правые части уравнений (25) таковы, что если в них функции, зависящие от λ , разложить в степенные ряды по параметру λ , то минимальные степени λ справа и слева будут равны. Правые части, удовлетворяющие этому условию, назовем **минимальными правыми частями уравнений для определения функций биортогональных систем**. Правые же части, получающиеся из минимальных путем умножения их на λ^{ν} некоторой четной степени и необходимые для решения краевой задачи, назовем **базовыми**. Функции $W_k(y)$, $\Phi_{yk}(y)$ и т. д. биортогональных систем можно представить в виде суммы соответствующих финитных $\omega_k(y)$, $\phi_{yk}(y)$ и т. д. (равных нулю вне отрезка $|y| \leq h$) и нефинитных $\omega_k^*(y)$, $\phi_{yk}^*(y)$ и т. д. частей которые, как можно проверить, на $(-\infty, \infty)$ ортогональны ко всем функциям $\{\sin \frac{m}{h}\pi\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos \frac{m}{h}\pi\}_{m=1}^{\infty}$.

При решении краевых задач обычно используются финитные части биортогональных систем функций, поэтому важно знать их явное представление. В частности,

$$m_{xk}(y) = \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h} - \frac{1}{2}(\delta(y-h) + \delta(y+h)), \quad \chi_{xk}(y) = -\frac{1}{2} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k h}, \tag{26}$$

где δ – дельта-функция. Формулы (26) строятся следующим образом. Например, построим функцию $m_{xk}(y)$. Приняв в уравнении (25₅) $\lambda = \frac{m}{h}\pi = q_m$ для каждой пары номеров $k, m = 1, 2, \dots$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(q_m, y) M_{xk}(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} \quad (27)$$

или

$$\frac{(\nu - 1)^2}{2} q_m^4 h (-1)^m \int_{-h}^h \cos(q_m y) m_{xk}(y) dy = \frac{-\frac{1}{2}(\nu - 1)^2 q_m^6 h}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

Отсюда

$$\int_{-h}^h \cos(q_m y) m_{xk}(y) dy = -\frac{(-1)^m q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (28)$$

Учитывая, что

$$\int_{-h}^h \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = -\frac{2\lambda_k (-1)^m \sin(\lambda_k h)}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad -\frac{(-1)^m q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} = -(-1)^m - \frac{(-1)^m \lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2},$$

из равенства (28) получим $m_{xk}(y)$.

В силу строения правой части равенства (27) **базовой** правой частью уравнений биортогональной системы $M_{xk}(y)$ будет

$$R_k(\lambda) = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2},$$

то есть тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y) M_{xk}(y) dy = R_k(\lambda). \quad (29)$$

В силу уравнений и равенств (1₂), (2₁), (1₃), (3₃), (3₄), (3₅), (6₁), (1₁), (6₂), (2₁), а также выражений (19), (21) последовательно получим уравнения биортогональных систем с **базовыми** правыми частями для остальных факторов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t_x(\lambda, y) T_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} m_{xy}(\lambda, y) M_{xyk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} q_x(\lambda, y) Q_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} t_y(\lambda, y) T_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y) W_k(y) dy &= R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\lambda, y) \Phi_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\lambda, y) \Phi_{yk}(y) dy &= R_k(\lambda); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_x(\lambda, y) K_{xk}(y) dy = \lambda R_k(\lambda); \quad \int_{-\infty}^{\infty} q_y(\lambda, y) Q_{yk}(y) dy = \lambda^2 R_k(\lambda);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_y(\lambda, y) K_{yk}(y) dy = \lambda^2 R_k(\lambda); \quad \int_{-\infty}^{\infty} m_y(\lambda, y) M_{yk}(y) dy = \lambda^2 R_k(\lambda).$$

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (29), (30₈) с учетом первого члена разложения функции $L(\lambda)$ в ряд Тейлора ($L(\lambda) = L'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)$) получаются следующие соотношения биортогональности для каждой пары номеров $k, m = 1, 2, \dots$, в частности:

$$\int_T m_x(\lambda_m, y) M_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\lambda_m L'(\lambda_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad (31)$$

$$\int_T \chi_x(\lambda_m, y) K_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\lambda_m^2 L'(\lambda_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y) \bar{M}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_m L'(\bar{\lambda}_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T \chi_x(\bar{\lambda}_m, y) \bar{K}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_m^2 L'(\bar{\lambda}_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$. Для комплексных значений λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (25) нужно заменить Т-образным контуром, лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-h, h]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [2].

Функции $\bar{W}_k(y)$, $\bar{\Phi}_{yk}(y)$ и т. д., $\bar{\omega}_k(y)$, $\bar{\phi}_{yk}(y)$ и т. д., в отличие от соответствующих функций без черты, зависят от $\bar{\lambda}_k$.

Отметим, что для каждой пары номеров $k, m = 1, 2, \dots$

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y) M_{xk}(y) dy = \int_T m_x(\lambda_m, y) \bar{M}_{xk}(y) dy = 0;$$

$$\int_T \chi_x(\bar{\lambda}_m, y) K_{xk}(y) dy = \int_T \chi_x(\lambda_m, y) \bar{K}_{xk}(y) dy = 0. \quad (32)$$

Умножая равенства (23) соответственно на $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$ и $K_{xk}(y) + \bar{K}_{xk}(y)$ и интегрируя обе части полученных равенств, с учетом соотношений (31), (31) для каждого номера $k = 1, 2, \dots$, получим систему алгебраических уравнений

$$\Delta_1^* = A_k N_k + \bar{A}_k \bar{N}_k,$$

$$\Delta_2^* = \lambda_k A_k N_k + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{N}_k, \quad (33)$$

где

$$N_k = \frac{\lambda_k L'(\lambda_k)}{2}, \quad \bar{N}_k = \frac{\bar{\lambda}_k L'(\bar{\lambda}_k)}{2};$$

$$\Delta_1^*(k) = \Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k), \quad \Delta_2^*(k) = \Delta_2(k) + \bar{\Delta}_2(k); \quad (34)$$

$$\Delta_1(k) = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xk}(y) dy, \quad \bar{\Delta}_1(k) = \int_{-h}^h M_x(y) \bar{m}_{xk}(y) dy; \quad (35)$$

$$\Delta_2(k) = \int_{-h}^h K_x(y) \chi_{xk}(y) dy, \quad \bar{\Delta}_2(k) = \int_{-h}^h K_x(y) \bar{\chi}_{xk}(y) dy. \quad (36)$$

Поочередно умножая первое уравнение системы (32) на $\bar{\lambda}_k$ и λ_k и вычитая второе уравнение, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим решение системы (32)

$$A_k = \frac{\Delta_2^*(k) - \Delta_1^*(k)\bar{\lambda}_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)N_k}, \quad \bar{A}_k = -\frac{\Delta_2^*(k) - \Delta_1^*(k)\lambda_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)\bar{N}_k}. \quad (37)$$

Исследуем разложения (23) с коэффициентами (37) на торце $x = 0$ полуполосы. Например, первое разложение

$$M_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta_2^*(k) - \Delta_1^*(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k) - \Delta_1^*(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k}. \quad (38)$$

Сравним его с разложением Лагранжа этой же функции:

$$M_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k}. \quad (39)$$

Учитывая, что $\Delta_1^*(k) = \Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k)$, представим разложение (38) в виде суммы разложений следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k))\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{(\Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k))\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\bar{\Delta}_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\}. \end{aligned}$$

Вычитая и прибавляя ряд Лагранжа (39), получим:

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\bar{\Delta}_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\bar{\Delta}_1(k)(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\bar{\Delta}_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\bar{\Delta}_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\}. \end{aligned}$$

После преобразования получим:

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Или

$$\begin{aligned}
M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{N_k} \right\} - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{N_k} \right\} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{N_k} \right\}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Последняя группа слагаемых в выражении (40) представляет собой разложение Лагранжа (39), а проекции первой и второй фигурных скобок на вещественное направление, т. е. на сумму векторов $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$, как не трудно проверить, дают ноль. Поэтому выражения, заключенные в каждой из этих скобок, можно условно трактовать как суммы чисто мнимых векторов.

Пары дробей в фигурных скобках ряда (41) представляют собой сопряженные выражения, в дальнейшем условимся, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ их суммы обозначать через $2Re$. Тогда выражения (41) примут более простой вид:

$$\begin{aligned}
M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\} - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Такое же преобразование можно сделать и по отношению ко второму разложению (23) с коэффициентами (37).

Раскладываемые функции $M_x(y)$ и $K_x(y)$ должны быть самоуравновешены, так как функции Фадля – Папковича по которым они раскладываются, тоже самоуравновешены.

Известно [3], что ряды (23) с коэффициентами (37) плохо сходятся к раскладываемым функциям, а для кусочно-непрерывных функций они могут и вовсе расходиться. Чтобы понять, почему так происходит, рассмотрим подробнее разложение функции $M_x(y)$ с коэффициентами (37). Для упрощения выкладок будем считать, что функция $K_x(y) = 0$. В этом случае все числа $\Delta_2(k) = \bar{\Delta}_2(k) = 0$. Тогда в силу (37) получим

$$A_k = \frac{-(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k))\bar{\lambda}_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) N_k}, \quad \bar{A}_k = -\frac{-(\Delta(k) - \bar{\Delta}(k))\lambda_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) N_k}, \tag{43}$$

где

$$\Delta(k) = \Delta_1(k), \quad \bar{\Delta}(k) = \bar{\Delta}_1(k).$$

Следуя соотношению (42), сумму первого ряда (23) перепишем следующим образом:

$$M_x(y) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\Delta(k)\lambda_k + \bar{\Delta}(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\}. \tag{44}$$

Последний ряд в формуле (44) является рядом Лагранжа (39) раскладываемой функции $M_x(y)$, а сумма первого ряда равна нулю, так как равны нулю его проекции на полную систему вещественных подпространств $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$ (см. (41)).

Именно первый ряд в формуле (44) (бесконечная сумма которого эквивалентна нулю) может исказить картину сходимости биортогональных разложений по функциям Фадля – Папковича, поскольку ряд Лагранжа в формуле (44) сходится не хуже тригонометрического ряда для функции $M_x(y)$, по крайней мере, внутри отрезка $|y| \leq h$ (что было показано в [8]). Поэтому, для получения надежных разложений по функциям Фадля – Папковича, в них необходимо выделять ряды, эквивалентные нулю. Эти ряды названы нуль-рядами [8].

Нуль-ряды в решениях (19), (21) нужно выделять не только на торце полуполосы, но и внутри ее (т. е. при всех значениях x), приводя тем самым биортогональные разложения к разложениям Лагранжа в каждом сечении полуполосы.

Покажем как происходит выделение нуль-ряда, например, в случае функции $M_y(x, y)$. Подставляя выражения (43) в (19₃) получим

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \left(\frac{m_y(\lambda_k, y) \bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) N_k} + \frac{m_y(\bar{\lambda}_k, y) \lambda_k e^{\bar{\lambda}_k x}}{(\bar{\lambda}_k - \lambda_k) \bar{N}_k} \right).$$

Или

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x} m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k N_k} \right). \quad (45)$$

С учетом **базовой** правой части уравнений биортогональной системы $M_{yk}(y)$ (см. (30₁₁)), умножая числитель и знаменатель на λ_k^2 , имеем

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x} m_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \lambda_k^2 N_k} \right).$$

Вводя обозначения $\lambda_k = a_k + ib_k$, сделаем следующие преобразования под знаком суммы:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{1} \cdot \frac{\lambda_k e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} = \\ &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{2} \cdot \frac{a_k + ib_k}{b_k i} e^{a_k x} \{ \cos b_k x + i \sin b_k x \} = \\ &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{2} e^{a_k x} \left\{ \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) + i \left(\sin b_k x - \frac{c_k \cos b_k x}{b_k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Спроектировав (46) на вещественное подпространство, т. е. на сумму векторов $M_{yk}(y) + \bar{M}_{yk}(y)$, как это делалось выше, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим:

$$-2Re \left(\frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} \right) = -(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k e^{a_k x} \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right). \quad (47)$$

Заметим, что (см. (45), (46))

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -i(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k e^{a_k x} \left(\sin b_k x - \frac{a_k \cos b_k x}{b_k} \right) \frac{m_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}}{\lambda_k^2 N_k} \right\} = 0. \quad (48)$$

Итак, ненулевую часть ряда (45) в силу равенства (47) можно записать следующим образом:

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k e^{a_k x} \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \right\}.$$

Учитывая, что для первого действительного корня λ_1 справедливо $b_k \rightarrow 0$, получим равенства (49₄) (см. ниже).

Аналогично подставляя выражения (43) в другие формулы (19), (21) и избавляясь в них от нуль-рядов с учетом (30) получим искомые выражения для прогиба, поперечных сил, углов поворота и моментов в полуполосе ($a_k = Re \lambda_k$, $b_k = Im \lambda_k$, $a_k < 0$):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \frac{\omega(\lambda_1, y) e^{a_1 x}}{N_1} \Delta(1) (1 - a_1 x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\omega(\lambda_k, y) e^{a_k x}}{N_k} \Delta(k) \left(\cos b_k x - a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x(x, y) &= 6h\nu C_4 - \frac{\phi_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x + \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
K_x(x, y) &= -\frac{\chi_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
M_y(x, y) &= -\frac{m_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (1 + a_1 x) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
\Phi_y(x, y) &= \frac{\phi_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{N_1} \Delta(1) (1 - a_1 x) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{N_k} \Delta(k) \left(\cos b_k x - a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
M_x(x, y) &= \frac{m_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{N_1} \Delta(1) (1 - a_1 x) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{N_k} \Delta(k) \left(\cos b_k x - a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
K_y(x, y) &= -\frac{\chi_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (1 + a_1 x) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
M_{xy}(x, y) &= -\frac{m_{xy}(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
Q_y(x, y) &= -\frac{q_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (1 + a_1 x) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{q_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
Q_x(x, y) &= -\frac{q_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{q_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
T_x(x, y) &= -\frac{t_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
T_y(x, y) &= -\frac{t_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (1 + a_1 x) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Приведем примеры расчетов при $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 2$, $E = 0,69 \cdot 10^5$ МПа (материал – катанный алюминий).

Пример 1. $M_x(y) = \frac{h(\nu-1)^2(3y^2-h^2)}{6}$. Сечения $x = 0$ (рис. 2а) и $x = 1$ (рис. 2б). Сечения $y = 0$ (средняя линия полуполосы – рис. 3а) и $y = 2$ (край полуполосы – рис. 3б). Прогиб $w(x, y)$ (рис. 4).

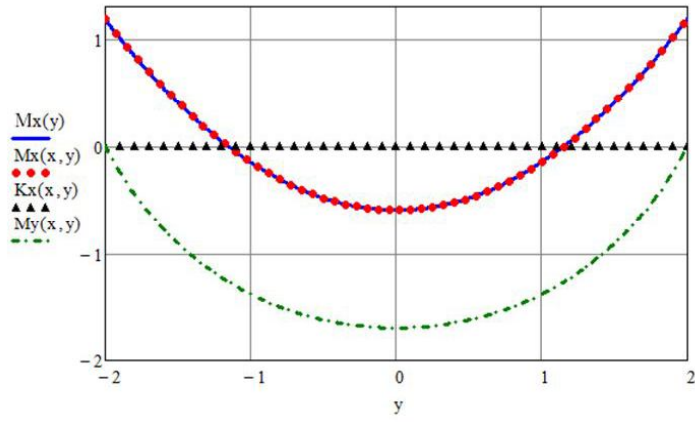


Рис. 2а

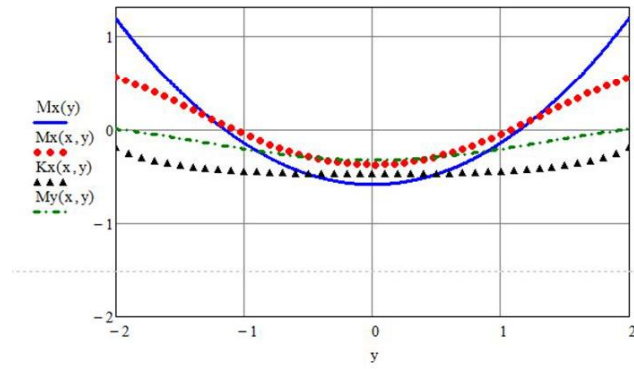


Рис. 2б

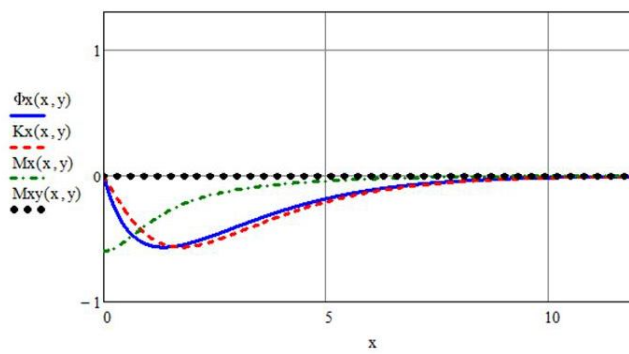


Рис. 3а

Пример 2. $M_x(y) = \cos(\frac{\pi y}{h})$. Сечения $x = 0$ (рис. 5а) и $x = 1$ (рис. 5б). Сечения $y = 0$ (средняя линия полуполосы – рис. 6а) и $y = 2$ (край полуполосы – рис. 6б). Прогиб $w(x, y)$ (рис. 7).

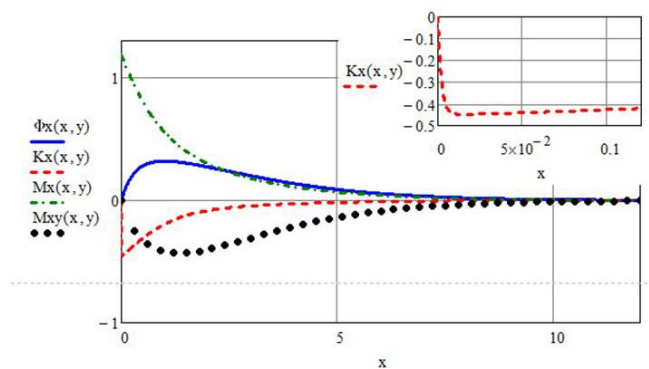
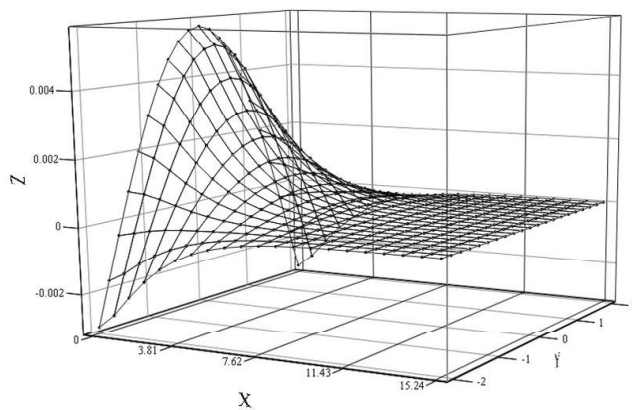


Рис. 3б



Полуполоса (X - длина, Y - ширина, Z - прогиб)

Рис. 4

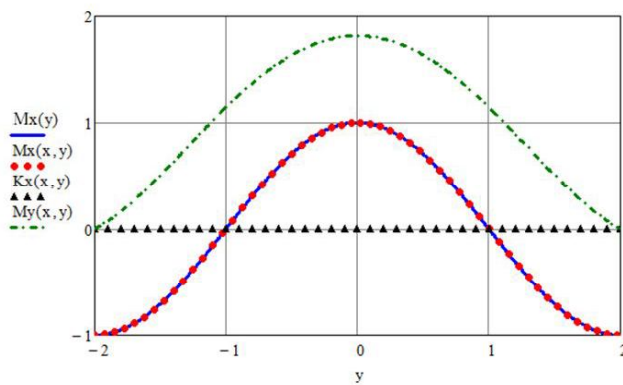


Рис. 5а

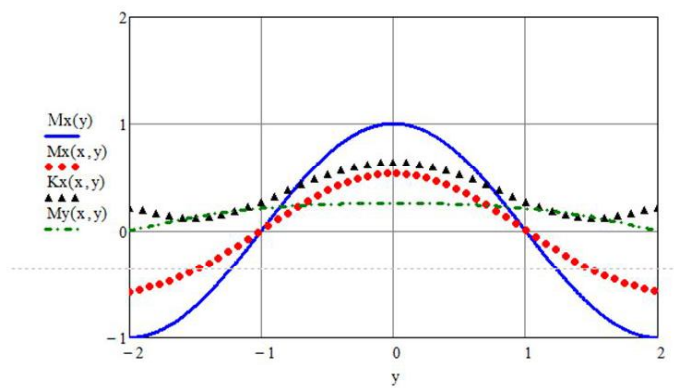


Рис. 5б

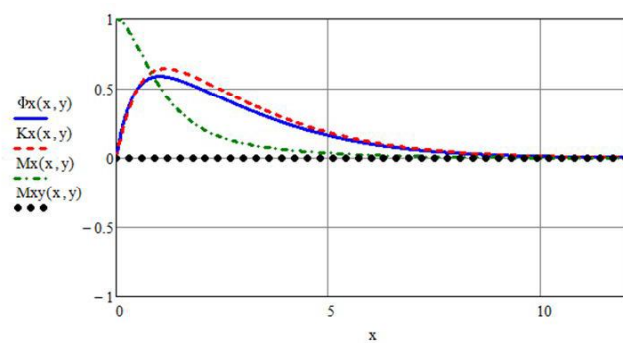


Рис. 6а

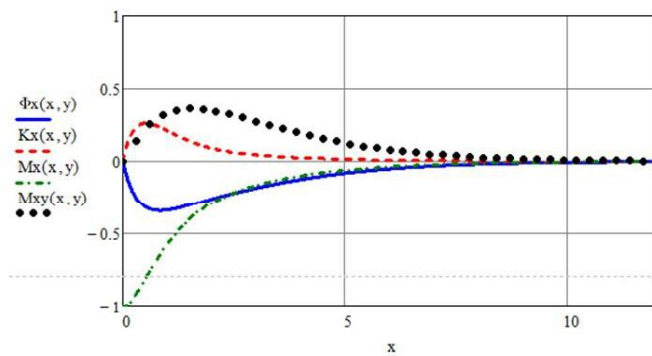


Рис. 6б

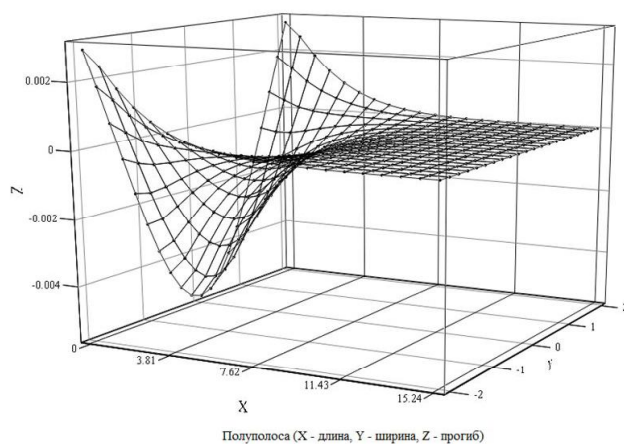


Рис. 7

Пример 3. $M_x(y) = y^4 - 1, 2y^2h^2 + 0, 2h^4$ имеем. Сечения $x = 0$ (рис. 8а) и $x = 1$ (рис. 8б). Сечения $y = 0$ (средняя линия полуполосы – рис. 9а) и $y = 2$ (край полуполосы – рис. 9б). Прогиб $w(x, y)$ (рис. 10).

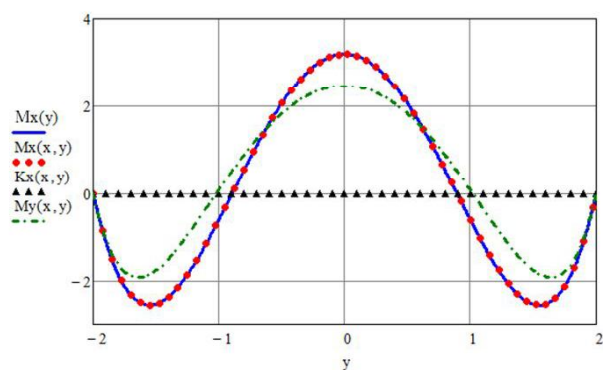


Рис. 8а

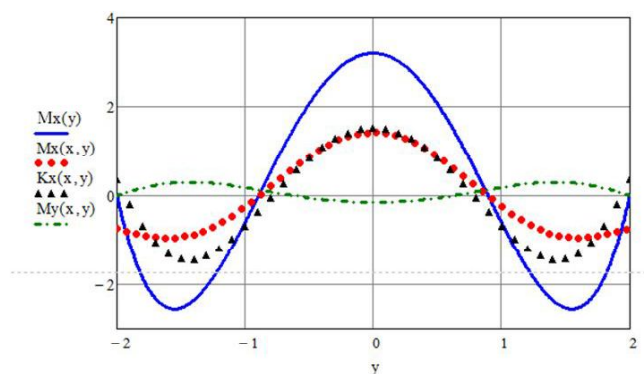


Рис. 8б

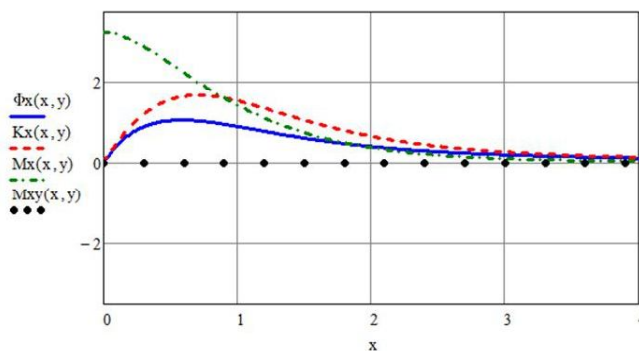


Рис. 9а

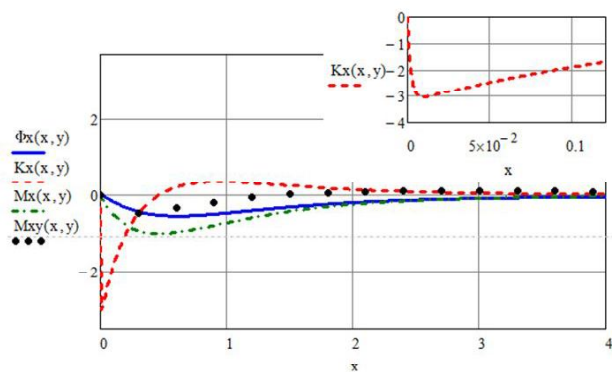


Рис. 9б

Результаты исследований и их обсуждение. Построены примеры точных аналитических решений симметричной краевой задачи изгиба полуполосы, продольные стороны которой свободны от закрепления, а на торце заданы самоуравновешенный изгибающий момент и равная нулю обобщенная поперечная сила.

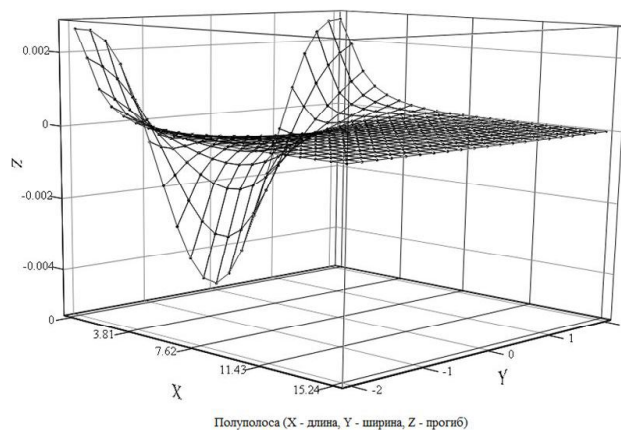


Рис. 10

Резюме. Аналогично могут быть построены аналитические решения для полуполосы со свободными продольными сторонами при других граничных условиях на торце полуполосы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям / М. Д. Коваленко // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352. – № 4. – С. 480–482.
- [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МТТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [4] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
- [5] Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
- [6] Маркушевич, А. И. Целые функции. Элементарный очерк / А. И. Маркушевич. – М. : Наука, 1965. – 108 с.
- [7] Кашин, Б. С. Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян. – М. : АФЦ, 1999. – 560 с.
- [8] Коваленко, М. Д. Однородные решения теории упругости. Базисные свойства / М. Д. Коваленко, Н. В. Клейн, С. Н. Попов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11. – № 2. – С. 209–225.

Абруков Денис Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: AbrukovDA@yandex.ru

D. A. Abrukov

**SEMI-STRIP BEND WITH THE FREE LONGITUDINAL EDGES AT WHICH
END FACE THE MOMENT OF DEFLECTION AND THE GENERALIZED
TRANSVERSAL FORCE ARE SET. PRECISE SOLUTION OF A BOUNDARY
VALUE PROBLEM**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The precise analytical solution of a boundary value problem of a bend of a thin plate in the form of a semi-strip which longitudinal parties are free is for the first time constructed, and at an end face the moment of deflection and the generalized transversal force are set. It is represented in ranks on Fadde – Papkovich functions. Required coefficients of ranks are by means of systems of functions, biorthogonal to Fadde – Papkovich functions.

Keywords: plate bending, Fadde – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] *Kovalenko, M. D.* Lagrange's decomposition and uncommon representations of zero on the uniform to decisions / M. D. Kovalenko // Reports of the Russian Academy of Sciences . – 1997. – Vol. 352. – № 4. – P. 480–482.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Faddeya – Papkovich's functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.
- [3] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Faddeya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.
- [4] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [5] *Tymoshenko, S. P.* Plates and covers / S. P. Tymoshenko, S. Voynovsky-Krieger. – M. : Nauka, 1966. – 636 p.
- [6] *Markushevich, A. I.* Entire functions. elementary outline / A. I. Markushevich. – M. : Nauka, 1965. – 108 p.
- [7] *Kashin, B. S.* Orthogonal ranks / B. S. Kashin, A. A. Saakian. – M. : AFTS, 1999. – 560 p.
- [8] *Kovalenko, M. D.* Uniform solutions of the theory of elasticity. Basic properties / M. D. Kovalenko, N. V. Klein, S. N. Popov // Mechanics of composite materials and designs. – 2005. – Vol. 11. – № 2. – P. 209–225.

Abrukov, Denis Alexandrovich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary