ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

Ивлев Д. Д.

О ПЕРЕХОДЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СОСТОЯНИЯ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЕ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева)

В работе рассматриваются условия перехода статически неопределимого состояния в статически определимое.

Вопросы перехода статически неопределимого состояния в статически определимое рассматривались в работе [1]. В качестве условия достижений статически определимого состояния полной пластичности рассматривались экстремальные значения диссипации механической работы при условии пластичности Треска среди всех возможных условий предельного состояния.

Условия перехода статически неопределимого неполного пластического состояния в состояние полной пластичности обсуждались в работах [2], [3].

Пластическое деформирование возникает в результате достижения сдвигающими усилиями некоторого предельного значения. Условие пластичности максимального касательного напряжения, условие пластичности Треска имеет вид:

$$\left| t_{\max} \right| = k, \quad k - const. \tag{1}$$

Выражения максимальных касательных напряжений запишем в виде

$$t_1 = \frac{s_1 - s_3}{2}, \ t_2 = \frac{s_2 - s_1}{2}, \ t_3 = \frac{s_3 - s_2}{2}, \tag{2}$$

где s_1, s_2, s_3 – главные напряжения.

Согласно (2) имеет место:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0. \tag{3}$$

Введем трехмерное пространство t_1, t_2, t_3. Области изменения касательных напряжений t_i согласно (1) ограничена плоскостями (рис. 1)

$$-k \le t_i \le k. \tag{4}$$

Введем вектор

$$\boldsymbol{\tau} = t_1\boldsymbol{i} + t_2\boldsymbol{j} + t_3\boldsymbol{k}\,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – единичные орты вдоль осей t_1, t_2, t_3.

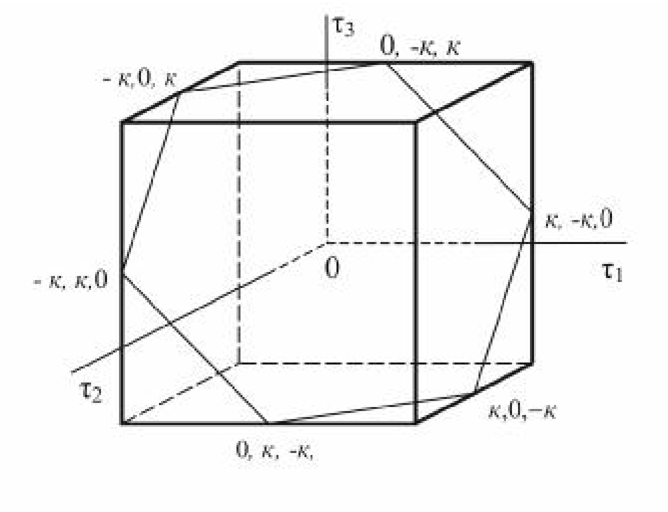

Рис. 1.

Вектор $\boldsymbol{\tau}$ (5) лежит в девиаторной плоскости (3) пространства t_1, t_2, t_3 (рис. 2).

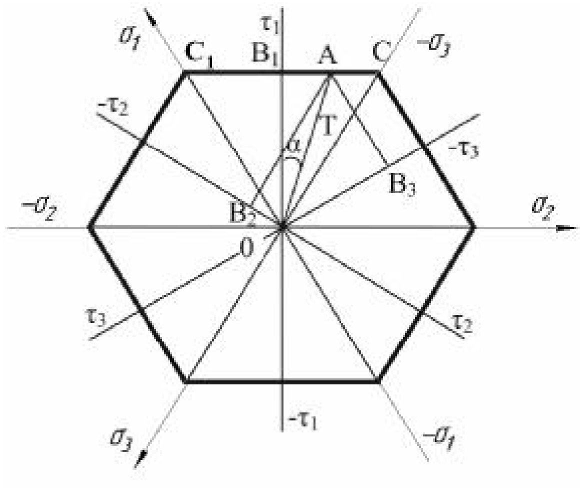

Рис. 2.

Рассмотрим девиаторную плоскость (3) (рис. 2). Обозначим

$$T = AO,\ t_1 = OB_1,\ |t_2| = OB_2,\ |t_3| = OB_3,$$

$$t_1 = T\cos a,$$

$$t_2 = -T\sin(30^\circ - a) = -\frac{T}{2}\left(\cos a - \sqrt{3}\sin a\right), \qquad (6)$$

$$t_3 = -T\sin(60^\circ - a) = -\frac{T}{2}\left(\cos a + \sqrt{3}\sin a\right).$$

Выражения (6) удовлетворяют соотношению (3).

Согласно (6), модуль вектора $\boldsymbol{\tau}$ имеет вид

$$|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}T, \;\; T = \frac{\sqrt{6}}{3}|\boldsymbol{\tau}|. \tag{7}$$

Для напряженного состояния, изображенного на рис. 2, имеет место:

$$t_1 = \frac{s_1 - s_3}{2} = k, \;\; k - const, \;\; s_1 \geq s_2 \geq s_3. \tag{8}$$

На рис. 3 показано положение кругов Мора, соответствующих условиям (8).

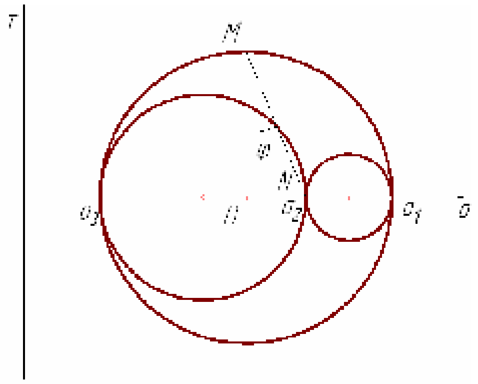

Рис. 3.

Параметр Лоде имеет вид:

$$m = tg\,j = \frac{NO}{MO} = \frac{s_2 - \frac{1}{2}(s_1 + s_3)}{\frac{s_1 - s_3}{2}} = \frac{s_2 - s}{k} = \sqrt{3}tg\,a, \;\; s = \frac{1}{2}(s_1 - s_3). \tag{9}$$

Из (9) получим

$$s_2 = mk + s. \tag{10}$$

Согласно (2), (10) будем иметь

$$t_2 = \frac{k}{2}(m - 1), \;\; t_3 = -\frac{k}{2}(m + 1). \tag{11}$$

Из (2), (7), (8), (11) получим выражения для интенсивности напряжений

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 = 2k^2(3 + m^2). \tag{12}$$

Условие пластичности Треска (1) не учитывает влияние параметра Лоде (9) на характер напряженного состояния при неполной пластичности $|m| < 1$, полная пластичность имеет место при $|m| = 1$. Постепенный переход от состояния неполной пластичности к состоянию полной пластичности с учетом влияния параметра Лоде может быть описан в случае совместного использования двух условий предельного состояния (8), (12)

$$s_1 - s_2 = 2k, \tag{8}$$

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 = 2k^2(3 + m^2). \tag{12}$$

Условие предельного состояния (12) по форме напоминает условие пластичности Мизеса, но в отличие от последнего правая часть (12) не является фиксированной.

Согласно соотношениям обобщенного ассоциированного закона течения из (13) следует

$$\begin{aligned} e_1 &= l_1 + l_2(2s_1 - s_2 - s_3), \\ e_2 &= l_2(2s_1 - s_2 - s_3), \\ e_1 &= -`l_1 + l_2(2s_1 - s_2 - s_3), \end{aligned} \tag{13}$$

где e_1, e_2, e_3 – главные скорости деформации, $l_1 \geq 0,\ l_2 \geq 0$.

Из (2), (11), (13) следует

$$\begin{aligned} e_1 &= l_1 + l_2 k(3 - m), \\ e_2 &= l_2 km, \\ e_1 &= -`l_1 + l_2 k(3 + m). \end{aligned} \tag{14}$$

Диссипация механической энергии согласно (2), (11), (14) будет иметь вид:

$$N = s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 = 2k\left[l_1 + l_2 k\left(3 + m^2\right)\right]. \tag{15}$$

Из (15) следует, что при фиксированных l_1, l_2 диссипация N возрастает с ростом параметра Лоде и достигает максимального значения при $m = \pm 1$:

$$N_{\max} = 2k\left[l_1 + 4l_2 k\right]. \tag{16}$$

Определим диссипативную функцию $D = D(e_{ij})$.

Из (14) следует

$$2l_2 = \frac{e_2}{km}. \tag{17}$$

Далее из (14), (17) найдем

$$2l_1 = e_1 - e_3 - \frac{3e_2}{m}. \tag{18}$$

Из (15), (17), (18) следует выражение диссипативной функции

$$D(e_{ij}) = k[e_1 - e_3 + me_2]. \tag{19}$$

Согласно (19), найдем при фиксированных e_1, e_2, e_3 диссипативная функция $D(e_{ij})$ возрастает с ростом параметра m.

Для определения напряженного состояния из диссипативной функции следует рассмотреть функционал [4]

$$D = k[e_1 - e_3 + me_2] + n(e_1 + e_2 + e_3), \tag{20}$$

где n – неопределенный множитель Лагранжа.

Из (20) следует

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\partial D}{\partial e_1} = k + n, \\ s_2 &= \frac{\partial D}{\partial e_2} = km + n, \\ s_3 &= \frac{\partial D}{\partial e_3} = -k + n. \end{aligned} \tag{21}$$

Из (21) следуют соотношения (8), (12).

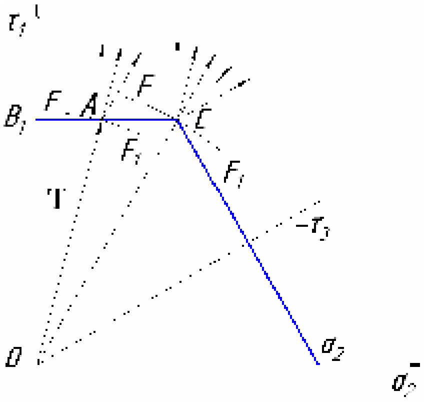

Рис. 4.

На рис. 4 точка A находится на пересечении отрезка прямой B_1C, соответствующей условию Треска (8) и дуги окружности FF_1, соответствующей условию (12).

В результате совместного использования условий предельного состояния Треска (8), (12) в точке A в состоянии неполной пластичности $m \neq 1$ возникает определенная свобода пластического течения. В результате при $m \neq 0$ появляется составляющая скорости деформации вдоль оси s_2, которая может возрастать по мере возрастания параметра Лоде m. Таким образом может быть учтено влияние параметра Лоде на характер деформирования при условии пластичности максимального касательного напряжения Треска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Об экстремальных свойствах условий пластичности / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1960. – Вып. 6.

2. *Христианович, С. А.* К теории идеальной пластичности / С. А. Христианович, Е. И. Шемякин // МТТ. – 1967 – № 5.

3. *Ивлев, Д. Д.* О развитии предельного состояния / Д. Д. Ивлев, Н. М. Матченко // МТТ. – 2006. – № 6.

4. *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории пластических сред / Д. Д. Ивлев // ДАН СССР. – 1967. – Т. 176. – № 5.