ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

Амензаде Р. Ю., Ахундов М. Б.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО ЛИНЕЙНО ВЯЗКО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

(Бакинский государственный университет)

Проблема устойчивости тонкостенных элементов конструкций занимает одно из центральных мест в механике деформируемых твердых тел. Это обстоятельство отражено в многочисленных исследованиях, проведенных в данной области [6; 5; 8]. Обеспечив устойчивость, можно быть уверенным в равновесии спроектированной конструкции и не опасаться разрушения ее элементов от различных воздействий. Наряду с явлением полного разрушения недопустимо и появление таких больших деформаций, которые помешали бы выполнению конструкцией ее прямых функций.

В последнее время в качестве несущих элементов широко используются тонкостенные стержни, изготовленные из композитных материалов, которым присуще свойство кусочной неоднородности по толщине. Это обусловлено, в частности, стремлением к экономии материала при одновременном уменьшении веса конструкции и изысканием дополнительных прочностных ресурсов. Некоторые задачи устойчивости и выпучивания многослойных стержней, изготовленных из линейно-упругого и нелинейно-упругого материалов рассмотрены в [3; 4].

В предлагаемой работе исследуется устойчивость шарнирно опертого по концам призматического, линейно вязко-упругого кусочно-неоднородного по толщине стержня. Численно выявлено влияние физико-механических и геометрических параметров на критическое время устойчивости.

1. Пусть стержень имеет поперечное сечение, состоящее из нескольких частей, соединенных между собой по всей его длине. При их жестком соединении стержень считается монолитным и его можно рассматривать как обычный, даже если он составлен из различных материалов. Поэтому допустим, что задан прямоугольный в плане стержень единичной ширины, длиной l и толщиной $2h$.

Для определенности введем в плоскости изгиба в рассмотрение декартову систему координат (x, z) с началом на левом торце стержня и направим ось x вдоль длины стержня. Положим теперь, что он составлен из s чередующихся различных по толщине слоев с различными модулями упругости E_{k+1} и функциями ползучести $D_{k+1}\{(t-t), s(t)\}[k=0,1,\mathbf{K}(s-1)]$, которые в дальнейшем будем считать линейными относительно напряжения:

$$D_{k+1}\{(t-t), s(t)\} = F'_{k+1}(t-t)\, s(t).$$

Полагаем, что раздел слоев осуществляется параллельно боковым граням стержня. Толщину каждого слоя обозначим через d_k. Таким образом $d_1 + d_2 + \mathbf{K} + d_s = 2h$. В основу предлагаемой здесь теории сжатых многослойных стержней ставятся следующие предположения:

а) условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении, из чего следует равенство на них перемещений, напряжения и отсутствие взаимного давления слоев;

б) процесс выпучивания происходит в плоскости стержня;

в) в силу тонкостенности нормальное напряжение s по толщине меняется по линейному закону.

Применимость и точность последнего допущения обоснована в [2]. В дальнейшем будем руководствоваться гипотезой плоских сечений Кирхгофа–Лява, при которой допущения а) выполняются автоматически.

При сделанных предположениях выпишем физическое соотношение для пакета в целом в виде одного равенства

$$e^f = \frac{s}{E_{k+1}} + \int_0^t F'_{k+1}(t-t)\, s(t)\,dt \qquad a_k \le z \le a_{k+1}, \tag{1.1}$$

где штрих означает дифференцирование по параметру $t-t$,

$$a_k = -h + \sum_{i=0}^{s} d_i,$$

а d_0 принимается равным нулю. Для дальнейших целей конкретизируем вид $F'_{k+1}(t-t)$, задав его в экспоненциальном виде:

$$F'_{k+1}(t-t) = \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-a(t-t)}. \tag{1.2}$$

Здесь полагалось, что показатель ползучести a одинаков для всех слоев пакета.

Рассмотрим, теперь задачу об устойчивости выбранного нами сжатого силой N стержня, имеющего начальное несовершенство w_0. Обозначая посредством u и w соответственно осевое перемещение и прогиб с учетом гипотезы плоских сечений, имеем:

$$e = u,_x + \frac{1}{2}\left(w,_x^2 - w_0^2,_x\right) + z\left(w,_{xx} - w_0,_{xx}\right), \tag{1.3}$$

где запятая указывает на дифференцирование по координате x. Решение задачи осуществим посредством вариационного метода [1]. Преимущество такого подхода состоит в возможности выявления таких явлений, которые не предсказываются при привлечении обычных методов классической математической физики. Теперь, с учетом нелинейности только по w, соответствующее выражение функционала приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} R = \int_{-h}^{h}\int_0^l \left\{ \dot{s}\left(\dot{u},_x + w,_x \dot{w},_x + z\dot{w},_{xx}\right) + \frac{1}{2} s\, \dot{w},_x^2 \right\} dzdx - \\ - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{e}^f \dot{s}\, dzdx + \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{s}^2}{E_{k+1}}\, dzdx \end{aligned} \tag{1.4}$$

Под точкой здесь и далее будем понимать дифференцирование по физическому времени t.

Тогда,

$$F''(t-t) = -a\,\frac{A_{k+1}}{E_{k+1}}\,e^{-a(t-t)},$$

для $\dot{e}^f$ запишем:

$$\dot{e}^f = \frac{1}{E_{k+1}}\left\{\dot{s} + A_{k+1}\left[s - a\int_0^t e^{-a(t-t)}s(t)\,dt\right]\right\}. \tag{1.5}$$

В силу соотношения (1.3) и замечая, что

$$\int_{-h}^{h}\dot{s}\,dz = \dot{N}, \qquad \int_{-h}^{h}\dot{s}\,z\,dz = \dot{M},$$

где M – изгибающий момент в сечении стержня, выполнив в (1.4) интегрирование по z, найдем:

$$\begin{gathered} R = \int_0^l\left\{\dot{N}(\dot{u},_x + w,_x\,\dot{w},_x) + \dot{M}\,\dot{w},_{xx} + \frac{1}{2}N\,\dot{w},_x^2\right\}dx - \\ -\int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{e}^f\,\dot{s}\,dzdx + \frac{1}{2}\int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\dot{s}^2}{E_{k+1}}\,dzdx - \dot{N}\left[\dot{u}(l) - \dot{u}(0)\right]. \end{gathered} \tag{1.6}$$

При решении задачи устойчивости будем считать $N = const = -T$, и поэтому соответствующие члены в (1.6) выпадают. Следовательно,

$$R = \int_0^l\left\{\dot{M}\,\dot{w},_{xx} - \frac{T}{2}\dot{w},_x^2\right\}dx - \int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{e}^f\,\dot{s}\,dzdx + \frac{1}{2}\int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\dot{s}^2}{E_{k+1}}\,dzdx. \tag{1.7}$$

Подставляя (1.5) в (1.7), получаем

$$\begin{gathered} R = \int_0^l\dot{M}\,\dot{w},_{xx}\,dx - \frac{T}{2}\int_0^l\dot{w},_x^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{s}^2\,dzdx - \\ -\int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\frac{A_{k+1}}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}s\,\dot{s}\,dzdx + a\int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\frac{A_{k+1}}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{s}\left\{\int_0^t e^{-a(t-t)}s(t)\,dt\right\}dzdx. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Для получения окончательного вида функционала воспользуемся методом Релея–Ритца. С этой целью, удовлетворяя искомые функции w и M краевым условиям шарнирного опирания, в качестве первых собственных функций положим

$$w = a(t)\sin\frac{px}{l}, \qquad M = b(t)\sin\frac{px}{l},$$

откуда после дифференцирования по t будем иметь:

$$\dot{w} = \dot{a}\sin\frac{px}{l}, \qquad \dot{M} = \dot{b}\sin\frac{px}{l}. \tag{1.9}$$

Положив в дальнейших рассуждениях

$$s = -\frac{T}{2h} + \frac{3z}{2h^3}M \quad \text{или} \quad \dot{s} = \frac{3z}{2h^3}\dot{M} \tag{1.10}$$

и учитывая соотношения (1.9) и (1.10) в (1.8), после соответствующего интегрирования получим следующее аналитическое представление функционала:

$$R = -\frac{p^2}{2l}\dot{a}\dot{b} - \frac{p^2}{4l}T\dot{a} - \frac{9l}{16h^6}h_2\dot{b}^2 + \frac{3Tl}{2ph^4}g_1\dot{b} - \frac{9l}{8h^6}g_2 b\dot{b} + \\ + \frac{3Tl}{2ph^4}g_1 e^{-a\,t}\dot{b} + a\,\frac{9l}{8h^6}g_2\dot{b}\int_0^t e^{-a(t-t)}b(t)\,dt, \tag{1.11}$$

для которого справедливы следующие обозначения:

$$h_2 = \sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz, \qquad g_j = \sum_{k=0}^{s-1}\frac{A_{k+1}}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}} z^j dz, \quad (j = 1,2). \tag{1.12}$$

Варьированию в исследуемом функционале подлежат функциональные параметры $\dot{a}$ и $\dot{b}$. Выражение (1.11) значительно упростится, если принять, что раздел слоев симметричен относительно срединной поверхности стержня. Из этого вытекает, что, $g_1 = 0$ и можно записать

$$R = -\frac{p^2}{2l}\dot{a}\dot{b} - \frac{p^2}{4l}T\dot{a} - \frac{9l}{16h^6}h_2\dot{b}^2 - \frac{9l}{8h^6}g_2 b\dot{b} + a\,\frac{9l}{8h^6}g_2\dot{b}\int_0^t e^{-a(t-t)}b(t)\,dt.$$

Условия стационарности данного функционала, соответствующие равенству нулю выражений:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{a}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{b}} = 0,$$

приводят к следующей системе уравнений:

$$\dot{b} = -T\dot{a}, \quad \text{откуда} \quad b = -Ta,$$

$$-\frac{p^2}{l}\dot{a} - \frac{9l}{4h^6}h_2\dot{b} - \frac{9l}{4h^6}g_2 b + a\,\frac{9l}{4h^6}g_2\int_0^t e^{-a(t-t)}b(t)\,dt = 0.$$

Комбинируя эти уравнения, можно записать

$$\dot{a}\left(-p^2 + \frac{9l^2}{4h^6}Th_2\right) + \frac{9l^2}{4h^6}Tg_2 a - a\,\frac{9l^2}{4h^6}g_2\int_0^t e^{-a(t-t)}a(t)\,dt = 0.$$

Введя следующие безразмерные величины

$$w = \frac{T}{T_{кр}} \quad \text{и} \quad y = \frac{a}{h},$$

где согласно [3]

$$T_{кр} = \frac{4p^2h^6}{9l^2}h_2^{-1}$$

– критическая сила для неоднородного по толщине линейно-упругого стержня, последнее уравнение представим в форме

$$\dot{y} - \frac{g_2}{h_2}\frac{w}{1-w}\left\{y - a\int_0^t e^{-a(t-t)}y(t)\,dt\right\} = 0. \tag{1.13}$$

Отметим, что дальнейшее рассмотрение вопроса об устойчивости для вязкоупругости имеет смысл, когда действующая нагрузка меньше критической, т. е. $w < 1$.

2. Учитывая формулу

$$\left\{\int\limits_0^t e^{-a(t-t)} y(t)dt\right\}^{\bullet} = y - a\int\limits_0^t e^{-a(t-t)} y(t)dt,$$

уравнение (1.13) перепишем в виде

$$\left\{y(t) - \frac{g_2}{h_2}\frac{w}{1-w}\int\limits_0^t e^{-a(t-t)} y(t)dt\right\}^{\bullet} = 0,$$

откуда

$$y(t) - \frac{g_2}{h_2}\frac{w}{1-w}\int\limits_0^t e^{-a(t-t)} y(t)dt = C. \qquad (2.1)$$

Постоянную C надлежит определить из начального условия при $t = 0$. Отсюда из (2.1) имеем $C = y(0) = y_0$. Величина y_0 представляет значение прогиба немедленно после приложения нагрузки. Следуя [3] она определяется по формуле

$$y_0 = \frac{y_0^{\vee}}{1-w}, \qquad (2.2)$$

в которой $y_0^{\vee}$ – задаваемый начальный эксцентриситет стержня. Обозначив

$$\frac{g_2}{h_2}\frac{w}{1-w} = b,$$

(2.1) запишем следующим образом:

$$y(t) - b\int\limits_0^t e^{-a(t-t)} y(t)dt = y_0. \qquad (2.3)$$

Теперь, приняв

$$a - \frac{g_2}{h_2}\frac{w}{1-w} = l, \quad \text{а} \quad b - a = -l,$$

можно сразу записать решение интегрального уравнения (2.3), а именно [7, 25]:

$$y(t) = y_0\left\{1 + b\int\limits_0^t e^{-l(t-t)}dt\right\}.$$

Вычисляя соответствующий интеграл, получим:

$$y(t) = \left\{\left(1 - \frac{a}{l}\right)e^{-lt} + \frac{a}{l}\right\}y_0. \qquad (2.4)$$

Из формулы (2.4) следует, что в зависимости от знака l возможны три варианта. Если $l \le 0$, то наблюдается неограниченный рост прогиба во времени. Причем для $l < 0$ этот рост имеет экспоненциальный характер, а для $l = 0$ – линейный. Если же $l > 0$, то наблюдается ограниченный рост прогиба, причем его предельное значение определяется соотношением $y_* = y_0\dfrac{a}{l} \quad \left(\dfrac{a}{l} > 1\right)$.

3. Для численного анализа ограничимся случаем $l < 0$. Приведенное выше решение (2.4) в принципе применимо при любых значениях времени t. Однако большие прогибы в стержнях, являющихся элементами конструкций, недопустимы сами по себе. По-

этому разумно ограничить время службы стержня $t_{кр}$ условием достижения прогибом некоторой величины, фиксированной из тех или иных соображений, например $\tilde{y}=1$. Это соответствует безразмерному прогибу, равному половине толщины. Согласно отмеченному находим:

$$1=y_0\left\{\left(1-\frac{a}{l}\right)e^{-l\,t_{кр}}+\frac{a}{l}\right\},$$

откуда для $t_{кр}$ запишем:

$$t_{кр}=-\frac{1}{l}\ln\left|\frac{l-a\,y_0}{l\,y_0\left(1-\dfrac{a}{l}\right)}\right|. \tag{3.1}$$

В качестве примера рассмотрим поведение трехслойного стержня $(s=3)$, обладающего следующей периодической структурой:

$$E_1=E_3,\qquad d_1=d_3,\qquad A_1=A_3.$$

Введем дополнительные обозначения

$$E=\frac{E_1}{E_2},\qquad m=\frac{A_2}{A_1},\qquad k=\frac{d_2}{d_1}.$$

Исходя из этого по формулам для a_k имеем:

$$a_0=-h,\qquad a_1=-\frac{d_2}{2},\qquad a_2=\frac{d_2}{2},\qquad a_3=h.$$

Отмеченное выше позволяет определить отношение g_2/h_2, которое принимает вид:

$$\frac{g_2}{h_2}=A_1\frac{1+1{,}5k+0{,}75k^2+0{,}125Emk^3}{1+1{,}5k+0{,}75k^2+0{,}125Ek^3}.$$

Теперь представим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенной выше зависимости (3.1).

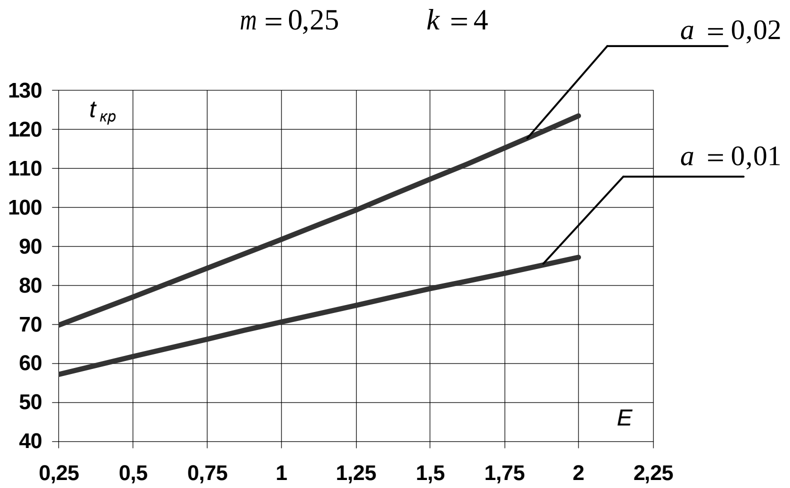

Рис. 1. ***Зависимость критического времени от*** E

$E = 0{,}25 \qquad k = 4$

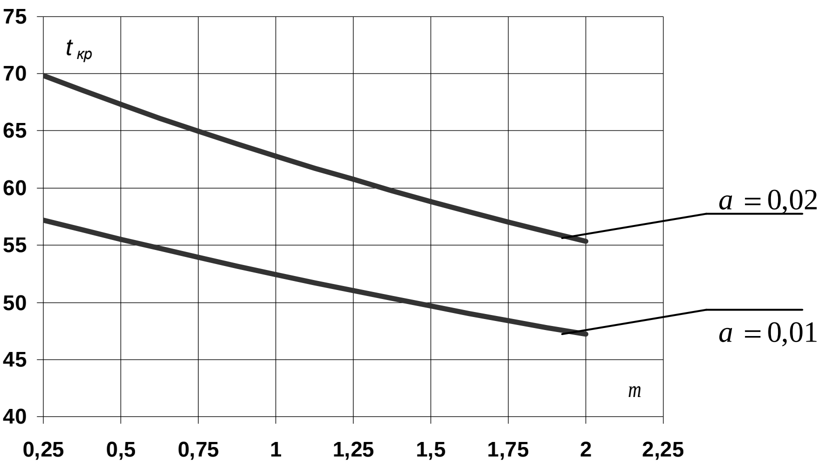

Рис. 2. ***Зависимость критического времени от*** b

$E = 0{,}25 \qquad m = 0{,}25$

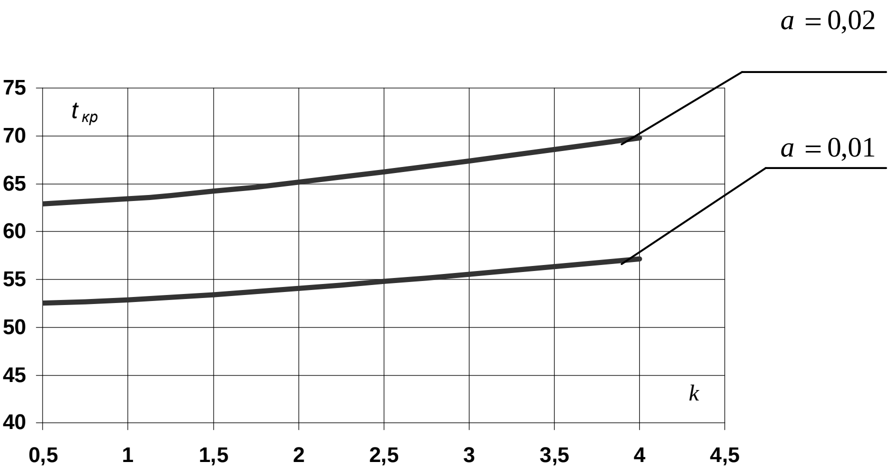

Рис. 3. ***Зависимость критического времени от*** k

На графике рис. 1 представлены кривые зависимости $t_{кр}$ от E для двух значений a. Отсюда видно, что увеличение отношения модулей упругости существенно увеличивает критическое время устойчивости. Причем с возрастанием a также возрастает и $t_{кр}$.

На рисунке 2 и 3 приведены аналогичные графики зависимости $t_{кр}$ от m и k. Здесь их влияние на критическое время менее существенно. Заметим, что в зависимости от m (с его увеличением) наблюдается уменьшение значений критического времени. Небезынтересно отметить, что для однородного стержня $t_{кр} = 52{,}43\, сек$ при $a = 10^{-2}\, сек^{-1}$ и $t_{кр} = 62{,}78\, сек$, когда $a = 2 \cdot 10^{-2}\, сек^{-1}$.

Таким образом, конструированием неоднородности можно увеличить (или уменьшить) критическое время устойчивости и тем самым, в определенном смысле, оптимизировать процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амензаде, Р. Ю.* Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязко-упругих твердых тел / Р. Ю. Амензаде, М. Б. Ахундов // Доклады РАН. – 2006. – Т. 410. – № 1. – С. 45–48.
2. *Амензаде, Р. Ю.* О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли // ДАН Азербайджана. – 2000. – № 4–6. – С. 72–77.
3. *Амензаде, Р. Ю.* Устойчивость неоднородного по толщине стержня из композитного материала / Р. Ю. Амензаде, С. А. Шестериков // МКМ. – 1992. – № 1. – С. 115–118.
4. *Амензаде, Р. Ю.* Предельное состояние жестко-защемленного нелинейно-упругого многослойного стержня / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли, А. Ф. Фатуллаева // МКМ. – 2006. – № 3. – С. 347–360.
5. *Болотин, В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М. : Физматгиз, 1961.– 339 с.
6. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
7. *Работнов, Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 383 с.
8. *Хофф, Н.* Продольный изгиб и устойчивость / Н. Хофф. – М. : Изд-во Ил., 1955. – 154 с.