ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

Васильева А. М.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛОСТЬЮ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

В данной работе рассматривается идеальнопластическое напряженное состояние растягиваемого анизотропного пространства, ослабленного эллипсоидальной полостью. Малый параметр δ характеризует отклонение границы полости от сферической, а также связан с анизотропией среды. Задача статически определимая. Используется условие полной пластичности [1], переменный предел текучести на одноосное растяжение определяется из условия пластичности Хилла [4].

1. Рассмотрим напряженное состояние анизотропной неограниченной среды с эллипсоидальной полостью, растягиваемой на бесконечности равномерными усилиями q. Поверхность полости свободна от усилий. Уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1.1)$$

Условия предельного состояния для главных компонент напряжений запишем в виде

$$s_1 = s_2, \qquad s_3 - s_1 = 2k, \qquad (1.2)$$

где $2k$ – предел текучести при растяжении.

Условие пластичности Хилла для анизотропной среды имеет вид [4]

$$A_1(s_x - s_y)^2 + B_1(s_y - s_z)^2 + C_1(s_z - s_x)^2 + 6(F_1 t_{xy}^2 + G_1 t_{yz}^2 + H_1 t_{xz}^2) = 6k_0^2, \qquad (1.3)$$

где k_0 – *const*, A_1, B_1, C_1, F_1, G_1, H_1 – безразмерные константы анизотропии.

Согласно (1.3) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат по осям x, y, z. В дальнейшем перейдем к сферическим координатам r, q, f, полагая $x = r\sin q\cos f$, $y = r\sin q\sin f$, $z = r\cos q$.

Предположим, что ось f совпадает с осью z. Оси r, q повернуты против часовой стрелки относительно осей x, y на угол a. Таблица перехода от одной системы координат к другой будет следующей (табл. 1):

Таблица 1

	ρ	θ	φ
x	cos α	-sin α	0
y	-sin α	cos α	0
z	0	0	1

Имеют место соотношения между напряжениями в декартовой системе координат и напряжениями в сферической системе координат

$$s_x = \frac{s_r + s_q}{2} + \frac{s_r - s_q}{2}\cos 2a - t_{rq}\sin 2a\ , \quad t_{xy} = \frac{s_r - s_q}{2}\sin 2a + t_{rq}\cos 2a\ ,$$

$$s_y = \frac{s_r + s_q}{2} - \frac{s_r - s_q}{2}\cos 2a + t_{rq}\sin 2a\ , \quad t_{xz} = t_{rf}\cos a - t_{qf}\sin a\ , \qquad (1.4)$$

$$s_z = s_f\ , \qquad t_{yz} = t_{qf}\cos a + t_{rf}\sin a\ .$$

Из (1.3), (1.4) получим

$$A(s_r - s_q)^2 + B(s_q - s_f)^2 + C(s_f - s_r)^2 + 6(Ft_{rq}^2 + Gt_{qf}^2 + Ht_{rf}^2) = 6k_0^2, \qquad (1.5)$$

где *A, B, C, F, G, H* – константы анизотропии.

Имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{1}{r\sin q}\frac{\partial t_{rf}}{\partial f} + \frac{1}{r}(2s_r - s_q - s_f + t_{rq}ctgq) = 0\,,$$

$$\frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{1}{r\sin q}\frac{\partial t_{qf}}{\partial f} + \frac{1}{r}((s_q - s_f)ctgq + 3t_{rq}) = 0\,, \qquad (1.6)$$

$$\frac{\partial t_{rf}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{qf}}{\partial q} + \frac{1}{r\sin q}\frac{\partial s_f}{\partial f} + \frac{1}{r}(3t_{rf} + 2t_{qf}ctgq) = 0\,.$$

Предположим, что взаимная ориентация осей *ρ, θ, φ* и главных направлений *1, 2, 3* определяется табл. 2 направляющих косинусов, тогда, используя известные условия связи между компонентами напряжений в сферической системе координат и главными напряжениями s_1, s_2, s_3, из (1.2) получим [1] выражения для компонент напряжений, учитывающие условия полной пластичности:

Таблица 2

	1 2 3
ρ	l_1 m_1 n_1
θ	l_2 m_2 n_2
φ	l_3 m_3 n_3

$$s_r = s - \frac{2}{3}k + 2kn_1^2, \qquad t_{rq} = 2kn_1n_2\,,$$

$$s_q = s - \frac{2}{3}k + 2kn_2^2, \qquad t_{qf} = 2kn_2n_3, \qquad (1.7)$$

$$s_f = s - \frac{2}{3}k + 2kn_3^2, \quad t_{rf} = 2kn_1n_3, \quad s = \frac{1}{3}(s_r + s_q + s_f)\,,$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \qquad (1.8)$$

где n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения s_3 в системе $r\,,\,q\,,\,j$.

Подставляя (1.7) в (1.5), определим предел текучести *k* в соотношениях (1.2), (1.7)

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}}\ k_0\left[A(n_1^2 - n_2^2)^2 + B(n_2^2 - n_3^2)^2 + C(n_3^2 - n_1^2)^2 + 6(Fn_1^2n_2^2 + Gn_2^2n_3^2 + Hn_1^2n_3^2)\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (1.9)$$

Положим

$$a = 1 + d_1\bar{a}, \qquad A = 1 + d_2\bar{A}, \qquad F = 1 + d_2\bar{F}\,,$$

$$b = 1 + d_1\bar{b}, \qquad B = 1 + d_2\bar{B}, \qquad G = 1 + d_2\bar{G}\,, \qquad (1.10)$$

$$c = 1 + d_1\bar{c}, \qquad C = 1 + d_2\bar{C}, \qquad H = 1 + d_2\bar{H}\,,$$

где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$ – *const*, параметры $\delta_1 \ll 1$, $\delta_2 \ll 1$.

Пусть $d_2 = cd_1 = cd$, $\quad c \ge 0,\ d << 1$, тогда из (1.10) следует

$$d = \frac{a-1}{\bar{a}} = \frac{b-1}{\bar{b}} = \frac{c-1}{\bar{c}} = \frac{A-1}{c\bar{A}} = \frac{B-1}{c\bar{B}} = \frac{C-1}{c\bar{C}} = \frac{F-1}{c\bar{F}} = \frac{G-1}{c\bar{G}} = \frac{H-1}{c\bar{H}}\,. \qquad (1.11)$$

При $\delta = 0$ получаем изотропное пространство со сферической полостью.

Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} &s_{ij} = s^0_{ij} + ds'_{ij}\,, && n_i = n_i^0 + d\ n_i'\,, && k = k^0 + d\ k'\,, \\ &A = 1 + cd\ \bar{A}, && F = 1 + cd\ \bar{F}, && a = 1 + d\ \bar{a}\,, \\ &B = 1 + cd\ \bar{B}, && G = 1 + cd\ \bar{G}, && b = 1 + d\ \bar{b}\,, \\ &C = 1 + cd\ \bar{C}, && H = 1 + cd\ \bar{H}, && c = 1 + d\ \bar{c}\,. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Линеаризируя соотношения (1.5), (1.7), (1.8), получим в нулевом приближении

$$\begin{gathered} s^0_r = s^0 - \frac{2}{3}k^0 + 2k^0 {n_1^0}^2, \quad t^0_{rq} = 2k^0 n_1^0 n_2^0, \ \ (rqf)\ (123) \\ {n_1^0}^2 + {n_2^0}^2 + {n_3^0}^2 = 1, \\ (s^0_r - s^0_q)^2 + (s^0_q - s^0_f)^2 + (s^0_f - s^0_r)^2 + 6({t^0_{rq}}^2 + {t^0_{qf}}^2 + {t^0_{rf}}^2) = 6k_0^2, \end{gathered} \qquad (1.13)$$

где (ρθφ) (123) означают круговую перестановку индексов;
в первом приближении

$$\begin{gathered} s'_r = s' - \frac{2}{3}k' + 4k^0 n_1^0 n_1' + 2k' {n_1^0}^2, \quad t'_{rq} = 2k' n_1^0 n_2^0 + 2k^0(n_1^0 n_2' + n_1' n_2^0), \ \ (rqf)\ (123) \\ n_1^0 n_1' + n_2^0 n_2' + n_3^0 n_3' = 0, \\ \frac{1}{2}c\left[\ \bar{A}(s^0_r - s^0_q)^2 + \bar{B}(s^0_q - s^0_f)^2 + \bar{C}(s^0_f - s^0_r)^2\ \right] + \\ +(s^0_r - s^0_q)(s'_r - s'_q) + (s^0_q - s^0_f)(s'_q - s'_f) + (s^0_f - s^0_r)(s'_f - s'_r) + \\ +6\left[\frac{c}{2}(\bar{F}{t^0_{rq}}^2 + \bar{G}{t^0_{qf}}^2 + \bar{H}{t^0_{rf}}^2) + t^0_{rq}t'_{rq} + t^0_{qf}t'_{qf} + t^0_{rf}t'_{rf}\ \right] = 0. \end{gathered} \qquad (1.14)$$

Невозмущенное состояние (δ=0) для изотропного пространства со сферической полостью радиуса $a_0 = 1$ примем в виде

$$s^0_r \ne 0, \qquad s^0_f = s^0_q \ne 0, \qquad t^0_{rq} = t^0_{qf} = t^0_{rf} = 0\,. \qquad (1.15)$$

Из (1.13), (1.15) получим

$$\begin{gathered} n_2^0 = n_3^0 = 0, \qquad n_1^0 = 1\,, \\ s^0_r = s^0_q + 2k^0, \qquad s^0_q = s^0_f\,, \\ t^0_{rq} = t^0_{qf} = t^0_{rf} = 0, \quad \textit{где}\ \ k^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0\,. \end{gathered} \qquad (1.16)$$

Согласно (1.14), (1.15), (1.16) в первом приближении будем иметь

$$\begin{gathered} n_1' = 0\,, \\ s'_r = s'_q + 2k' = s' + \frac{4}{3}k'\,, \qquad s'_q = s'_f = s' - \frac{2}{3}k'\,, \end{gathered} \qquad (1.17)$$

$$t'_{rq} = 2k^0 n'_2, \qquad t'_{qf} = 0, \qquad t'_{rf} = 2k^0 n'_3,$$

где

$$k' = -\frac{c}{4}\, k^0 (\ \overline{A} + \overline{C}\ ), \qquad s' = \frac{1}{3}(s'_r + s'_q + s'_f). \tag{1.18}$$

Из уравнений равновесия (1.6) в нулевом приближении согласно (1.15) получим

$$\frac{\partial s_r^0}{\partial r} + \frac{2}{r}(s_r^0 - s_q^0) = 0, \qquad \frac{\partial s_q^0}{\partial q} = \frac{\partial s_f^0}{\partial f} = 0. \tag{1.19}$$

В первом приближении уравнения равновесия с учетом (1.17) примут вид

$$\frac{\partial s'}{\partial r} + \frac{2k^0}{r}\frac{\partial n'_2}{\partial q} + \frac{2k^0}{r\sin q}\frac{\partial n'_3}{\partial f} + \frac{1}{r}(4k' + 2k^0 n'_2 ctgq) = 0,$$

$$2k^0 \frac{\partial n'_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s'}{\partial q} + \frac{1}{r}(6k^0 n'_2) = 0, \tag{1.20}$$

$$2k^0 \frac{\partial n'_3}{\partial r} + \frac{1}{r\sin q}\frac{\partial s'}{\partial f} + \frac{1}{r}(6k^0 n'_3) = 0.$$

Удовлетворим второму и третьему уравнениям (1.20) с помощью замены

$$s' = \frac{2k^0}{r^2}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial r}, \quad n'_2 = -\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial q}, \quad n'_3 = -\frac{1}{r^3 \sin q}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial f}, \tag{1.21}$$

тогда из первого уравнения (1.20) получим линейное неоднородное уравнение

$$r^2 \Psi''_{rr} - \Psi''_{qq} - \frac{1}{\sin^2 q}\Psi''_{ff} - 2r\ \Psi'_r - ctgq\ \Psi'_q = Dr^3, \tag{1.22}$$

где

$$D = -\frac{2k'}{k^0} = \frac{c}{2}(\ \overline{A} + \overline{C}\ ). \tag{1.23}$$

В случае $k' = 0$, т. е. если среда изотропная ($c\ \ \overline{A} = c\ \ \overline{B} = ... = c\ \ \overline{H} = 0$), или $\overline{A} = -\overline{C}$, или при $\overline{A} = \overline{C} = 0$, уравнение (1.22) становится однородным (D = 0) и совпадает с уравнением, приведенным в [3].

Общее решение Ψ линейного неоднородного уравнения (1.22) представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения Ψ_1 и частного решения неоднородного Ψ_2, т. е. $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Функция Ψ_1 находится методом разделения переменных в соответствующем однородном уравнении. Для этого положим $\Psi_1 = R(r)Y(q,f)$, тогда, разделяя переменные, для функции $R(r)$ получим уравнение Эйлера

$$r^2 R'' - 2rR' - lR = 0, \ \ l - const. \tag{1.24}$$

Полагая $Y(q,f) = \Theta(q)\Phi(f)$, для функций $\Phi(f)$ и $\Theta(q)$ получим соответственно уравнения

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0, \tag{1.25}$$

$$\sin^2 q\ \ \Theta'' + \sin q \cos q\ \ \Theta' + (-\sin^2 q\ \ l - m^2)\Theta = 0. \tag{1.26}$$

Ограниченным решением последнего при $l = -n(n+1)$ является присоединенная функция Лежандра 1-го рода $P_n^m(\cos q)$.

Решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (1.22), представим в виде

$$\Psi_1 = (C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^m(\cos q)\,, \qquad (1.27)$$

$$b = \sqrt{\frac{9}{4} - n(n+1)}\,, \qquad n,\ m = 0,\ 1,\ 2...$$

Частным решением неоднородного уравнения (1.22) является функция

$$\Psi_2 = \frac{D}{3}(r^3 \ln r - \frac{r^3}{3}) + C_3 \frac{r^3}{3}\,, \quad C_3 - const\,. \qquad (1.28)$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.22) будет следующим:

$$\Psi = \Big[\ (C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^m(\cos q)\ \Big] + \qquad (1.29)$$

$$+ \frac{D}{3}(r^3 \ln r - \frac{r^3}{3}) + C_3 \frac{r^3}{3}\,,$$

где $C_1, C_2, C_3, D_{mn}, E_{mn}$ – константы, определяемые из граничных условий, D – согласно (1.23).

Из (1.29), (1.21), (1.17) получим выражения для компонент напряжений

$$s_r^{'} = \frac{4}{3}k^{'} +$$

$$+\frac{2k^0}{r^2}\left[\left((\frac{3}{2}+b)C_1 r^{\frac{1}{2}+b} + (\frac{3}{2}-b)C_2 r^{\frac{1}{2}-b}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(D_{mn}\cos mf + E_{mn}\sin mf)P_n^m(\cos q) + \right.$$

$$\left. + Dr^2 \ln r + C_3 r^2 \right],$$

$$s_q^{'} = s_f^{'} = -\frac{2}{3}k^{'} +$$

$$+\frac{2k^0}{r^2}\left[\left((\frac{3}{2}+b)C_1 r^{\frac{1}{2}+b} + (\frac{3}{2}-b)C_2 r^{\frac{1}{2}-b}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(D_{mn}\cos mf + E_{mn}\sin mf)P_n^m(\cos q) + \right.$$

$$\left. + Dr^2 \ln r + C_3 r^2 \right], \qquad (1.30)$$

$$t_{rq}^{'} = -\frac{2k^0}{r^3}(C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b})\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(D_{mn}\cos mf + E_{mn}\sin mf)\frac{\partial\left(P_n^m(\cos q)\right)}{\partial q}\,,$$

$$t_{qf}^{'} = 0\,,$$

$$t_{rf}^{'} = -\frac{2k^0}{r^3 \sin q}(C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b})\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-mD_{mn}\sin mf + mE_{mn}\cos mf)P_n^m(\cos q)\,.$$

2. Граничные условия в предположении, что поверхность полости свободна от усилий, записываются в виде

$$\begin{aligned} &s_r \cos\vec{n}r + t_{rq}\cos\vec{n}q + t_{rf}\cos\vec{n}f = 0\,,\\ &t_{rq}\cos\vec{n}r + s_q\cos\vec{n}q + t_{qf}\cos\vec{n}f = 0\,, \qquad (2.1)\\ &t_{rf}\cos\vec{n}r + t_{qf}\cos\vec{n}q + s_f\cos\vec{n}f = 0\,, \end{aligned}$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности полости. Согласно (1.10) уравнение поверхности полости (1.1) примет вид

$$r^2\left(\frac{(\sin q\cos f)^2}{(1+d\ \bar{a})^2}+\frac{(\sin q\sin f)^2}{(1+d\ \bar{b})^2}+\frac{(\cos q)^2}{(1+d\ \bar{c})^2}\right)=1, \qquad (2.2)$$

откуда

$$r=\frac{(1+d\bar{a})(1+d\bar{b})(1+d\bar{c})}{\sqrt{\sin^2 q\cos^2 f(1+d\bar{b})^2(1+d\bar{c})^2+\sin^2 q\cos^2 f(1+d\bar{b})^2(1+d\bar{c})^2+\sin^2 q\cos^2 f(1+d\bar{b})^2(1+d\bar{c})^2}}$$

(2.3)

Раскладывая (2.3) в ряд по d, ограничиваясь первым приближением, получим

$$r=r_0+dr_1(q,f), \qquad (2.4)$$

где

$$r_0=1, \quad r_1(q,f)=r_0(\ \bar{a}\sin^2 q\cos^2 f+\bar{b}\sin^2 q\sin^2 f+\bar{c}\ \cos^2 q\ ). \qquad (2.5)$$

Линеаризируем направляющие косинусы нормали. С точностью до малых второго порядка будем иметь

$$\cos\vec{n}r\approx 1, \qquad \cos\vec{n}q\approx-\frac{d}{r_0}\frac{\partial r_1(q,f)}{\partial q}, \qquad \cos\vec{n}f\approx-\frac{d}{r_0\sin q}\frac{\partial r_1(q,f)}{\partial f}. \qquad (2.6)$$

Из (2.1), учитывая (1.12), (1.15), получим граничные условия на невозмущенной поверхности $r=r_0=1$

$$\textit{при}\ \ r=r_0 \qquad s_r^0=0, \qquad (2.7)$$

$$\textit{при}\ \ r=r_0 \qquad s_r^{'}=-\frac{\partial s_r^0}{\partial r}r_1(q,f),\ t_{rq}^{'}=\frac{s_q^0}{r_0}\frac{\partial r_1(q,f)}{\partial q},\ t_{rf}^{'}=\frac{s_f^0}{r_0\sin q}\frac{\partial r_1(q,f)}{\partial f}. \qquad (2.8)$$

Из уравнений равновесия (1.19), граничных условий (2.7), учитывая (1.16), найдем компоненты напряжений в нулевом приближении

$$s_r^0=-4k^0\ln\frac{r}{r_0},\ \ s_q^0=s_f^0=-4k^0\ln\frac{r}{r_0}-2k^0,\ \ t_{ij}^0=0. \qquad (2.9)$$

Граничные условия (2.8) согласно (2.9) примут вид

$$s_r^{'}=\frac{4k^0}{r_0}r_1(q,f),\quad t_{rq}^{'}=-\frac{2k^0}{r_0}\frac{\partial r_1(q,f)}{\partial q},\quad t_{rf}^{'}=-\frac{2k^0}{r_0\sin q}\frac{\partial r_1(q,f)}{\partial f}\ \text{при}\ r=r_0. \qquad (2.10)$$

Представим $r_1(q,f)$ в виде ряда

$$r_1(q,f)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{mn}\cos mf+b_{mn}\sin mf)P_n^m(\cos q). \qquad (2.11)$$

В выражении (2.11) коэффициенты Фурье a_{mn}, b_{mn} разложения $r_1(q,f)$ в ряд по сферическим функциям определяются по формулам

$$a_{mn}=\frac{1}{N_{mn}}\int_0^{2p}\int_0^{p}r_1(q,f)P_n^m(\cos q)\cos mf\sin q\ dq\ df,\quad N_{mn}=\frac{2pe_m(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!},$$

(2.12)

$$b_{mn}=\frac{1}{N_{mn}}\int_0^{2p}\int_0^{p}r_1(q,f)P_n^m(\cos q)\sin mf\sin q\ dq\ df,\quad e_m=\begin{cases}2 & \textit{при}\ \ m=0\\ 1 & \textit{при}\ \ m>0\end{cases},$$

где $r_1(q,f)$ имеет вид (2.5). Полагая $D_{mn} = a_{mn}$, $E_{mn} = b_{mn}$, $C_3 = -\frac{2}{3}\frac{k^{'}}{k^0}$, из граничных условий (2.10) с учетом (2.11), (1.30) получим при $r = r_0 = 1$ уравнения для определения констант C_1, C_2

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad \left(\frac{3}{2} + b\right)C_1 + \left(\frac{3}{2} - b\right)C_2 = 2\,. \tag{2.13}$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4b}, \quad C_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4b}, \quad C_3 = -\frac{2}{3}\frac{k^{'}}{k^0} = \frac{c}{6}(\overline{A} + \overline{C}), \quad D_{mn} = a_{mn}, \quad E_{mn} = b_{mn}\,. \tag{2.14}$$

Искомые компоненты напряжений определяются согласно (2.9) и (1.30), (1.18), (2.14). Отметим, что при $k^{'} = 0$ полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в [3] для изотропной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 1 – 448 с.; 2002. – Т. 2. – 448 с.

2. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

3. *Семыкина, Т. Д.* О трехосном растяжении упруго-пластического пространства, ослабленного сферической полостью / Т. Д. Семыкина // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 1. – С. 173–177.

4. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.