

Григорьева А. Л.

**ПОВЕРХНОСТЬ НАГРУЖЕНИЯ, СВЯЗАННАЯ С ЛИНИЯМИ УРОВНЯ
ПОВЕРХНОСТИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ
НЕСЖИМАЕМОГО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА**

(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет)

Одной из проблем теории пластичности является задание условия текучести (поверхности нагружения), адекватно описывающей исследуемые экспериментально наблюдаемые эффекты пластического течения. Одним из таких эффектов является влияние на разрушение пластических материалов диссипации энергии, осуществленной частицей материала. В работе [1] показано, что выбор поверхности нагружения, связанной с линиями уровня поверхности деформационных состояний несжимаемого жесткопластического тела, дает возможность выделить удельную диссипацию энергии как независимый параметр, влияющий на условия разрушения. Ниже приводится способ построения поверхности нагружения для конструкционных материалов на основе кривых упрочнения [2].

Рассматривается идеальное жесткопластическое тело, деформационные состояния которого изображаются в виде точек в пространстве главных деформаций. Эти точки образуют гиперболическую поверхность третьего порядка. Деформационные процессы изображаются линиями на этой поверхности.

В качестве меры деформаций используются тензоры деформаций Коши C_{ij} и Альманси E_{ij} :

$$C_{ij} = H_{ki} H_{kj}, \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} - C_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Условие несжимаемости

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1 \quad (2)$$

определяет в пространстве E_i гиперболическую поверхность третьего порядка \mathcal{E} (рис. 1). Проекция поверхности \mathcal{E} на девиаторную плоскость с нормалью \mathbf{n} , которые представляют линии пересечения поверхности \mathcal{E} с плоскостью параллельной девиаторной плоскости, расположенной на расстоянии $h/\sqrt{3}$ до начала координат заданы уравнением:

$$h = (E_1 + E_2 + E_3), \quad (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \quad (3)$$

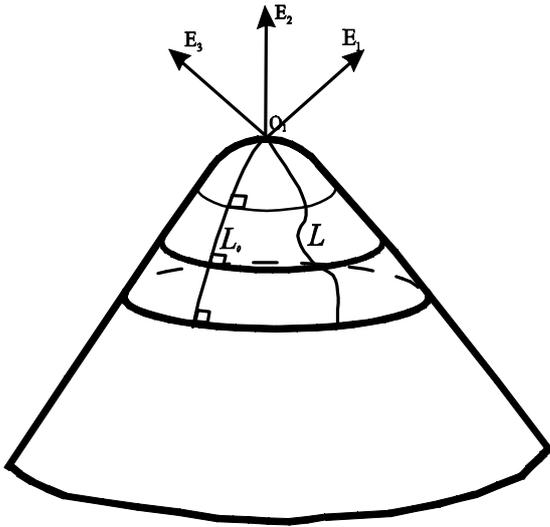


Рис. 1

Введем цилиндрическую поверхность нагружения, связанную с линиями уровня (3), которые характеризуются параметром упрочнения $h = E_1 + E_2 + E_3$. Эта поверхность нагружения обладает свойством: при простом деформировании для достижения соответствующей линии уровня затрачивается одна и та же диссипация энергии. Под простым процессом понимается процесс, в котором физическое время не учитывается и t является параметром. Будем изображать простые деформационные процессы кривыми l на девиаторной плоскости (рис.2). В этой плоскости уравнение цилиндрической поверхности нагружения определяет линии уровня для функции H , заданные уравнением:

$$2x^3 - 6xy^2 - 3\sqrt{2}Hx^2 - 3\sqrt{2}Hy^2 + 2\sqrt{2}H^3 - 6\sqrt{6} = 0, \quad (4)$$

которое определяет цилиндрическую поверхность нагружения $f(s_1 - s_2, s_2 - s_3, H) = 0$,

после замены: $y = \frac{-1}{\sqrt{2}h'}(s_1 - s_2)$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{6}h'}(s_2 - s_3)$. Из рис. 2 видно, что кривые (4) при $H \rightarrow \sqrt{3}$ мало отличаются от окружности.

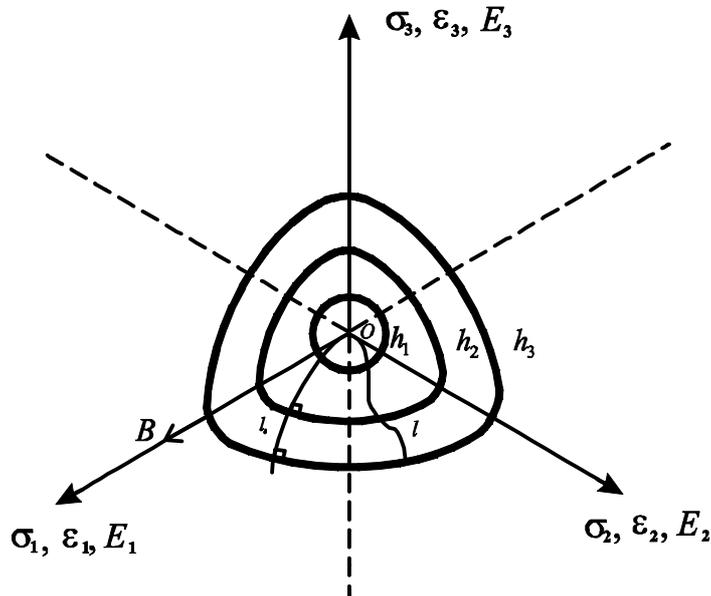


Рис. 2

При плоской деформации условие текучести (4) в Эйлеровых координатах после замены:

$$s_1 = s_z + \frac{1}{2} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2}, \quad s_2 = s_z - \frac{1}{2} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2}, \quad s_3 = s_z \quad (5)$$

имеет вид:

$$\left((s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2 \right) \cdot \left(3^3 H \cdot h' - 5 \left((s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = 18 \cdot h'^3 \left(\sqrt{3}^3 - H^3 \right). \quad (6)$$

К условию (6) присоединяем два уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

и уравнение, связывающее компоненты напряжения с приращениями компонент деформации,

$$\frac{e_x - e_y}{e_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}} = \frac{s_x - s_y}{2t_{xy}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{-5\sqrt{6}}{3h'^3} (s_x - s_y) \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2} - \frac{9\sqrt{2}H}{h'^2} (s_x - s_y), \\ e_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{5\sqrt{6}}{3h'^3} (s_x - s_y) \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2} + \frac{9\sqrt{2}H}{h'^2} (s_x - s_y), \\ e_{xy} &= \frac{-20\sqrt{6}}{3h'^3} t_{xy} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2} - \frac{36\sqrt{2}H}{h'^2} t_{xy}. \end{aligned}$$

Кроме того, должно выполняться условие несжимаемости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Для пяти неизвестных $s_x, s_y, t_{xy}, v_x, v_y$ получили пять уравнений (6)–(9). Формулы (7)–(9) удовлетворяют условию текучести Мизеса при плоской деформации.

Для того чтобы построить поверхности нагружения (4), может быть использован стандартный эксперимент на одноосное растяжение. Как правило, она изображается в координатах $s_T(e)$, где e – логарифмическая (относительная) степень деформации.

Для построения кривой нагружения перестраиваем $s_T(e)$ из [1] для циркония (99,7%) и электролитического никеля в координатах $s_T(h)$ (рис. 3). Параметр h' определяется по формуле:

$$h' = \frac{3s}{3 - 2h}. \quad (10)$$

Из (6) следует, что чем больше параметр h' , тем ближе форма линий уровня приближается к окружности (рис. 4: а) – цирконий (99,7%), б) – электролитический никель). Получаем, что для циркония линии уровня больше подходят к окружности. Для электролитического никеля кривые стремятся к треугольной форме.

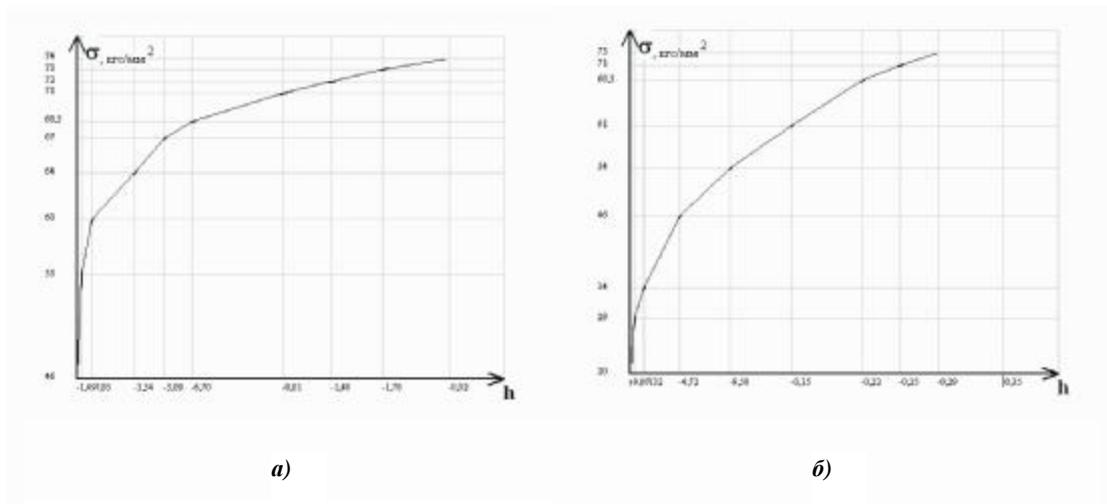


Рис 3.

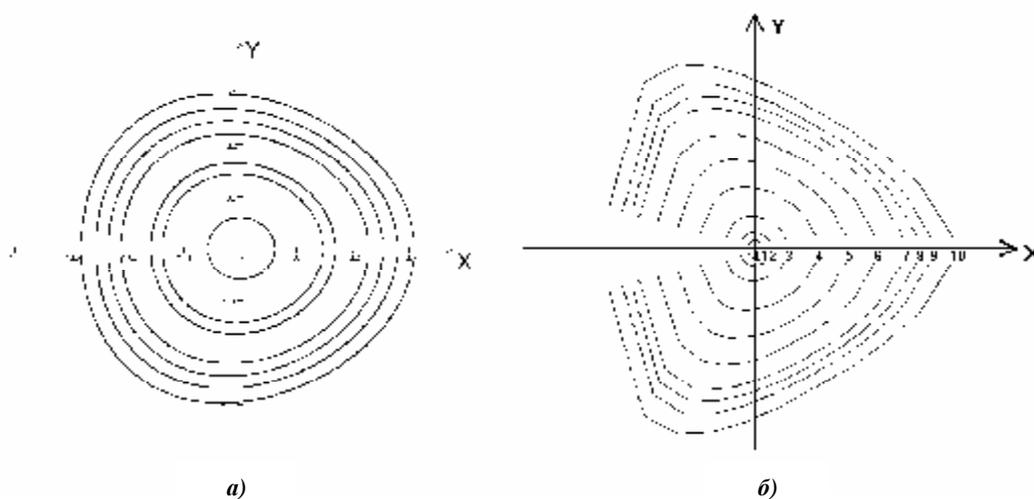


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочеров, Е. П. Деформационные состояния и разрушение идеальных жесткопластических тел / Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2006. – Вып. 42. – С. 66–71.
2. Кроха, В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник / В. А. Кроха. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
3. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. А. Степанов // Доклады РАН. – 2006. – Т. 407. – № 6. – С. 777–781.