ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

Задоян М. А.

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

(Институт механики НАН РА)

Исследуется предельное пластическое состояние быстровращающейся конической трубы из идеально пластического материала с медленно возрастающей угловой скоростью ω вокруг своей оси. Упругопластическое состояние вращающегося диска исследовано В.В. Соколовским [1]. Линейно упругое напряженное состояние дисков и цилиндрических труб рассмотрено во многих работах (см. [2]).

1. Центробежная сила, направленная перпендикулярно оси вращения, будет

$$R = \nu\omega^2\rho,$$

где ν – масса единицы объема материала трубы, ρ – расстояние от оси вращения.

Задача рассматривается в сферических координатах. Массовые силы в них будут

$$R_r = R\sin\vartheta,\ R_\vartheta = R\cos\vartheta.$$

Благодаря осесимметричности деформирования имеем $\omega = \tau_{r\varphi} = \tau_{\vartheta\varphi} = 0$. Далее, рассматривая трубу с малой конусностью, полагаем $\tau_{r\vartheta} = 0$ по всему объему трубы (рис. 1).

Дифференциальные уравнения равновесия примут следующую форму:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi\right) + \nu\omega^2 r\sin^2\vartheta = 0,\\ \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\left(\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi\right)ctg\vartheta + \nu\omega^2 r\sin\vartheta\cos\vartheta = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Условие пластичности Губера – Мизеса имеет вид

$$\left(\sigma_r - \sigma_\vartheta\right)^2 + \left(\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi\right)^2 + \left(\sigma_\varphi - \sigma_r\right)^2 = 6k^2. \tag{2}$$

На внутренней и внешней поверхностях трубы имеем условия

$$\sigma_\vartheta = 0 \text{ при } \vartheta = \alpha,\ \sigma_\vartheta = 0 \text{ при } \vartheta = \beta. \tag{3}$$

Приведенная система уравнений (1)–(2) с граничными условиями (3) принадлежит к числу «статически определимых» задач теории пластичности.

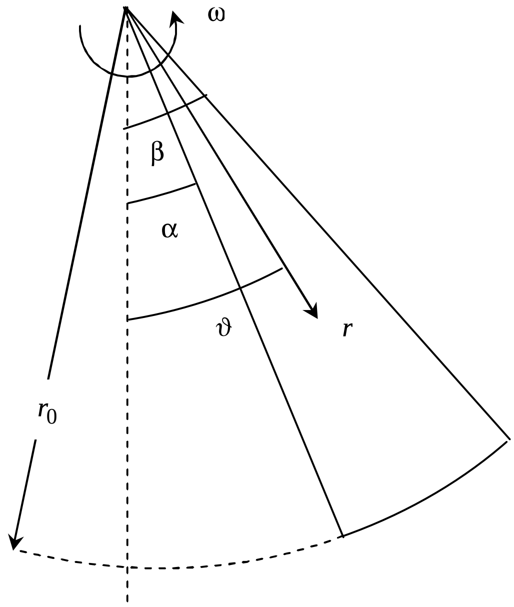

Рис. 1

Из первого уравнения (1) определяем

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sigma_r\right) - \sigma_\vartheta + \nu\omega^2 r^2 \sin^2\vartheta .$$

Далее подобным же образом из второго уравнения (1) находим

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sigma_\vartheta \sin\vartheta\right) + \nu\omega^2 r^2 \sin^2\vartheta .$$

Приравнивая полученные выражения σ_φ, будем иметь

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sigma_r\right) - \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sigma_\vartheta \sin\vartheta\right) - \sigma_\vartheta = 0 .$$

Введем функцию напряжения $\Phi(r,\vartheta)$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \frac{\Phi}{r^2\sin\vartheta}, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\vartheta} + \nu\omega^2 r^2\sin^2\vartheta. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти выражения напряжений тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (1).

Далее, подставляя (4) в условие пластичности (2), приходим к дифференциальному уравнению в частных производных

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{1}{r^2 \cos J} \frac{\partial \Phi}{\partial J} - \frac{1}{r \sin J} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r^2 \sin J} \right)^2 + \\
\left(\frac{1}{r \cos J} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial J} - \frac{\Phi}{r^2 \sin J} - \frac{1}{r^2 \cos J} \frac{\partial \Phi}{\partial J} + n w^2 r^2 \sin^2 J \right)^2 + \\
\left(\frac{1}{r \cos J} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial J} - \frac{1}{r \sin J} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + n w^2 r^2 \sin^2 J \right)^2 = 6k^2.
\end{gathered} \tag{5}
$$

2. Решение уравнения (5) будем искать в форме

$$\Phi = r\psi(\rho), \quad \rho = r \sin \vartheta . \tag{6}$$

Подставляя Φ в уравнение (5), приходим к уравнению

$$\psi'' + \frac{1}{\rho}\psi' - \frac{\psi}{\rho^2} = \frac{\sqrt{3}}{\rho} k - \nu\omega^2 \rho,$$

где A и B произвольные постоянные $y\,(r)$, причем

$$y\,(r) = \frac{\sqrt{3}}{2} kr \ln r - \frac{1}{8} n w^2 r^3 + Ar + \frac{B}{r}. \tag{7}$$

Используя (4) и (6), получим

$$
\begin{aligned}
s_r &= s_J = y'(r) + \frac{1}{r} y\,(r), \\
s_j &= r\,y''(r) + 2y'(r) + n w^2 r^2.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Далее, используя (7), из (8) получим

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \sqrt{3} k \ln \rho - \frac{1}{2}\nu\omega^2\rho^2 + 2A + \frac{\sqrt{3}}{2} k . \tag{9}$$

В чисто пластическое состояние сначала переходит концевое сечение $r = r_0$, а затем при возрастании угловой скорости ω эта область распространяется по направлению к вершине конуса. Минимальное значение ω, при котором сечение $r = r_0$ переходит целиком в пластическое состояние, обозначим через ω_0.

Используя первое граничное условие (3), получаем

$$\sigma_{\vartheta} = \sqrt{3}k \ln\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha} - \frac{1}{2}\nu\omega_0^2 r_0^2 \left(\sin^2\vartheta - \sin^2\alpha\right). \tag{10}$$

Далее из второго условия (3) будем иметь

$$\Omega^2 = \frac{2\sqrt{3}k}{\nu\left(\sin^2\beta - \sin^2\alpha\right)} \ln\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \tag{11}$$

где обозначено $\Omega = \omega_0 r_0$. При возрастании ω пластическая область распространяется по направлению к вершине трубы, т.е. при $\omega > \omega_0$ имеем $r > r_0$.

Если при $\omega = \omega_*$ зона пластичности определяется поверхностью $r = r_*$, то, используя решение (9) или (10), находим

$$\Omega = \omega_0 r_0 = \omega_* r_* .$$

Таким образом, для напряжений (9) и (10) при учете (11) получаем

$$\begin{aligned} s_r = s_J &= \sqrt{3}k\left(\ln\frac{\sin J}{\sin a} - \frac{\sin^2 J - \sin^2 a}{\sin^2 b - \sin^2 a}\ln\frac{\sin b}{\sin a}\right), \\ s_j &= \sqrt{3}k\left(1 + \ln\frac{\sin J}{\sin a} - \frac{\sin^2 J - \sin^2 a}{\sin^2 b - \sin^2 a}\ln\frac{\sin b}{\sin a}\right), \end{aligned} \tag{12}$$

причем $r_0 \le r \le r_*$. Представляет интерес определение осевой силы. Выделяя мысленно сферической поверхностью с радиусом r конечную часть трубы с вершиной и проектируя направление силы от σ_r для удельной осевой силы, приходящейся на единицу площади, будем иметь

$$\overline{\sigma}_r^* = \frac{1}{2(\cos\alpha - \cos\beta)}\int_{\alpha}^{\beta}\sigma_r^* \sin 2\vartheta d\vartheta,$$

где $\sigma_r^* = \dfrac{\sigma_r}{\sqrt{3}k}$. После интеграции согласно (12) получим

$$\overline{\sigma}_r^* = \frac{1}{4(\cos\alpha - \cos\beta)}\left[\left(\sin^2\beta + \sin^2\alpha\right)\ln\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\right]. \tag{13}$$

Из (13) при предположении $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ находим $\overline{\sigma}_r^* \approx 0.03$; между тем минимальное значение $\sigma_{\varphi}^* = \dfrac{\sigma_{\varphi}}{\sqrt{3}k}$, действующее в осевом сечении трубы, равно 1. Иначе говоря, осевая сила (13) по сравнению с σ_{φ} не имеет практического значения.

3. Из полученного решения для конической трубы легко вывести аналогичные формулы для вращающейся цилиндрической трубы. В системе цилиндрических координат $\rho\varphi z$ при предельном переходе $\vartheta \to 0$, $r \to \infty$ и фиксированном ρ напряжения σ_ϑ, σ_φ, σ_r переходят в σ_ρ, σ_φ, σ_z (рис. 2).

Из (9) или (10) следует

$$\sigma_\rho = \sigma_z = \sqrt{3}k\left(\ln\frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}\ln\frac{b}{a}\right),$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt{3}k\left(1 + \ln\frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}\ln\frac{b}{a}\right),$$

причем $a \le \rho \le b$. Здесь a и b соответственно будут внутренним и внешним радиусами цилиндрической трубы.

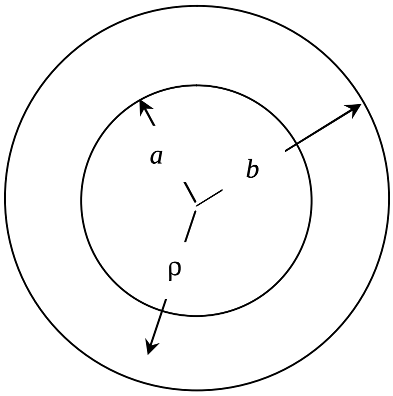

Рис. 2

Из (11) находим предельное значение угловой скорости:

$$\omega_* = \frac{2\sqrt{3}k}{\nu\left(b^2 - a^2\right)}\ln\frac{b}{a}.$$

Вывод о незначительности осевой силы в конической трубе для цилиндрической трубы также остается в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 396 с.
2. *Тимашенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимашенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.