ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

Варданян С. В.

О ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

(Институт механики НАН Армении)

Исследуется пластическое состояние быстровращающейся конической трубы при условии полной пластичности. Получены характеристические соотношения, определяющие напряженное состояние и поле скоростей перемещений. Полученные соотношения позволяют определить предельное значение угловой скорости.

Пластическое течение быстровращающейся конической трубы при условии пластичности Губера–Мизеса было исследовано М.А. Задояном [1]. В настоящей работе исследуется пластическое состояние той же задачи при предположении, что материал трубы подчиняется закону полной пластичности $s_2 = s_3$, $s_1 = s_2 + 2k$, $k = const$, а касательные напряжения отличны от нуля $t_{rJ}, t_{rj}, t_{jJ} \neq 0$. Предполагается, что все компоненты не зависят от угла поворота j.

Таким образом, имеем быстровращающуюся коническую трубу (рис. 1) с углами конусообразности a_0, a_n. При заданных граничных условиях требуется найти поля напряжений, скоростей перемещений и соответствующее значение угловой скорости.

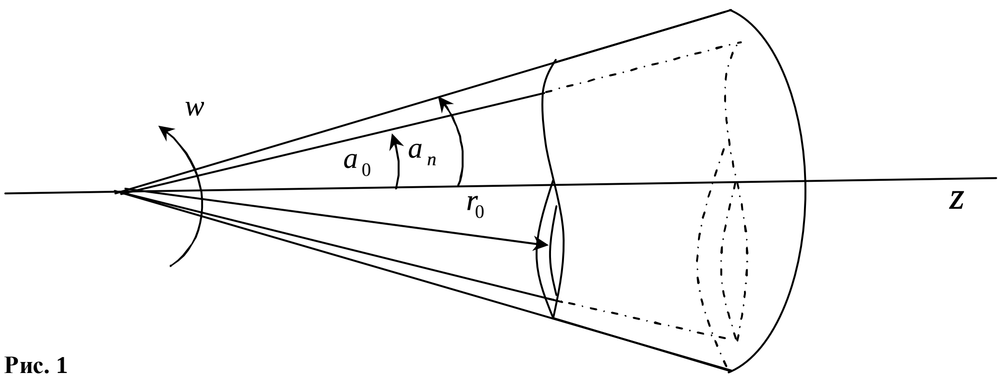

Рис. 1

Принимая $2k = 1$ уравнения равновесия в сферической системе координат с безразмерными напряжениями, можем записать:

$$\frac{\partial s_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{rJ}}{\partial J}+\frac{1}{r}\left(2s_r-s_J-s_j+t_{rJ}ctgJ\right)+nw^2r\sin^2 J=0,$$
$$\frac{\partial t_{rJ}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial s_J}{\partial J}+\frac{1}{r}\left[\left(s_J-s_j\right)ctgJ+3t_{rJ}\right]+nw^2r\sin J\cos J=0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial t_{rj}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{Jj}}{\partial J}+\frac{1}{r}\left[2t_{Jj}ctgJ+3t_{rj}\right]=0,$$

где $n=\dfrac{r}{2k}$, $r-$ масса единицы объема материала.

Из условий полной пластичности имеем:

$$s_r=s-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(1-\cos y\right),$$
$$s_J=s-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(1+\cos y\right)\cos^2 x,\; s_j=s-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(1+\cos y\right)\sin^2 x,$$
$$t_{rJ}=\frac{1}{2}\sin y\cos x,\; t_{rj}=\frac{1}{2}\sin y\sin x,\; t_{Jj}=\frac{1}{2}\left(1+\cos y\right)\sin x\cos x, \qquad (2)$$
$$s=\frac{1}{3}\left(s_r+s_\theta+s_j\right),$$

где y, x направляющие косинусы, определяющие ориентацию главного напряжения s_1 в системе координат $r\theta j$:

$$n_1=\sin\frac{y}{2},\; n_2=\cos\frac{y}{2}\cos x,\; n_3=\cos\frac{y}{2}\sin x. \qquad (3)$$

Подставляя (2) в (1) получим систему уравнений гиперболического типа [2,3,4]:

$$\frac{\partial s}{\partial r}+\frac{1}{2}\sin y\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{1}{2r}\cos y\cos x\frac{\partial y}{\partial J}-\frac{1}{2r}\sin y\sin x\frac{\partial x}{\partial J}+$$
$$+\frac{1}{2r}\left[1-2\cos y+\sin y\cos x ctgJ\right]+nw^2r\sin^2 J=0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial J}+\frac{1}{2}\cos y\cos x\frac{\partial y}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin y\cos^2 x\frac{\partial y}{\partial J}-\frac{1}{2}\sin y\sin x\frac{\partial x}{\partial r}-$$
$$-\frac{2}{r}\cos x\sin x\left(1+\cos y\right)\frac{\partial x}{\partial J}+\frac{1}{2r}\left[\sin y\cos x+\left(1+\cos y\right)\cos 2x ctgJ\right]+ \qquad (4)$$
$$+nw^2r\sin J\cos J=0,$$
$$\cos y\sin x\frac{\partial y}{\partial r}+\sin y\cos x\frac{\partial x}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin y\sin x\cos x\frac{\partial y}{\partial J}+$$
$$+\frac{1}{r}\left(1+\cos y\right)\cos 2x\frac{\partial x}{\partial J}+\frac{1}{r}\left[3\sin y\cos x+\left(1+\cos y\right)\sin 2x ctgJ\right]=0.$$

Добавим к (4) следующие соотношения:

$$\frac{\partial s}{\partial r}dr+\frac{\partial s}{\partial J}dJ=ds,$$
$$\frac{\partial x}{\partial r}dr+\frac{\partial x}{\partial J}dJ=dx, \qquad (5)$$
$$\frac{\partial y}{\partial r}dr+\frac{\partial y}{\partial J}dJ=dy.$$

(4) и (5) рассмотрим как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial s}{\partial r}, \frac{\partial s}{\partial J}, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial J}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial J}$. В характеристических линиях одновременно должно выполняться $\Delta = \Delta_i = 0,\ i = 1,..,6$. Из $\Delta = \Delta_6 = 0$ получим следующее характеристическое соотношение:

$$4\cos x\left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^3\left[\sin^2 x\sin^2 y - (1+\cos y)\cos y\cos 2y\right] +$$

$$+\left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^2\left[-2(1+\cos 2x+\cos 4x)\sin y + (3-\cos 4x)\sin 2y + (2+\cos 2x)(2\sin 3y + \sin 4y)\right] -$$

$$-4\cos x\cos^2\frac{y}{2}\frac{d\ln r}{dJ}\left[5-10\cos y+\cos 2x(1+3\cos y)-\cos 3y\right]-2\sin 2y = 0, \qquad (6)$$

а вдоль характеристических направлений (a, b, g) имеет место:

$$f_1(y,x)dy + 2f_2(y,x)ds + f_3(y,x)dx + f_4(y,x)dJ = 0, \qquad (7)$$

где приняты следующие обозначения:

$$f_1(y,x) = \left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^2\cos^2 x\sin 2y - \frac{d\ln r}{dJ}\cos x\sin^2 y\,(5+\cos 2x) - \sin 2y,$$

$$f_2(y,x) = \left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^2\sin 2x\sin y + 2\frac{d\ln r}{dJ}\cos y\sin x, \qquad (8)$$

$$f_3(y,x) = \left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^2\sin 2x - \frac{1}{2}\frac{d\ln r}{dJ}\sin 2y\sin 2x\cos x,$$

$$f_4(y,x) = 2\left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^3\Big(nw^2r^2\sin 2x\sin y\sin^2 J + \cos x\Big[\cos y\sin 2x\,(1+\cos y)\,ctgJ +$$

$$+\frac{3}{2}\cos x\sin 2y + \sin x\sin y\,(1-2\cos y) + \frac{1}{2}\sin 2x\sin^2 y\ ctgJ\Big]\Big) +$$

$$+\left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^2\Big[2\cos y\sin x - 4\cos^2 y\sin x - 4\sin y\sin 2x\ ctgJ - \frac{3}{2}\sin 2y\sin 2x\ ctgJ -$$

$$-\frac{1}{2}\sin 4x\sin y\,(1+\cos y) - 2\cos x\sin^2 y\left(3+6\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) +$$

$$+nw^2r^2\left(4\cos y\sin x\sin^2 J + \sin 2x\sin y\ ctgJ - \cos 2J\,ctgJ\sin 2x\sin y\right)\Big] +$$

$$+\frac{d\ln r}{dJ}\Big[2nw^2r^2\sin 2J\cos y\sin x + \cos y\,\big(-2(1+\cos y)\,ctgJ\sin x - 4(3+3\cos 2x-\sin 2x)\sin y\big)\Big].$$

Таким образом, имеем три характеристических соотношения, и при заданных граничных условиях можно численным методом интегрировать дифференциальные уравнения характеристик и, следовательно, определить напряженное состояние.

Граничные условия. Предположим, что имеют место следующие соотношения (рис. 2):

$$\begin{aligned} s_J &= p_1,\ t_{Jj} = q_1,\ J = a_0, \\ s_J &= p_2,\ t_{Jj} = q_2,\ J = a_n. \end{aligned} \qquad (9)$$

Численный метод решения задачи. Для решения поставленной задачи будем использовать численный метод, предложенный в [3; 4; 5].

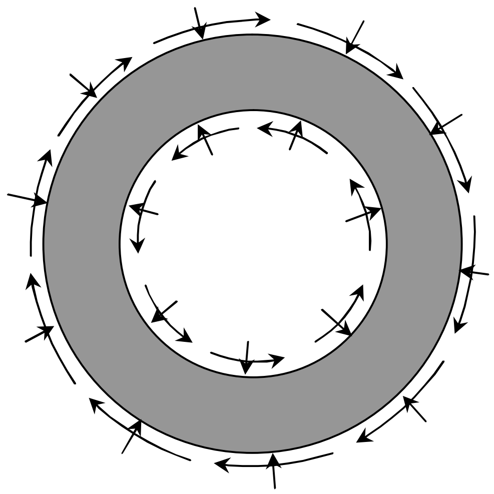

Рис. 2

Имеем три характеристические соотношения вдоль линий (a, b, g), определяемые из первого уравнения (7).

$$f_1(y, x)dy + f_2(y, x)ds + f_3(y, x)dx + f_4(y, x)dJ\big|_{a,b,g} = 0. \tag{10}$$

Систему (10) можем записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} f_1(y_i, x_i)(y_{i+1} - y_i) + f_2(y_i, x_i)(s_{i+1} - s_i) + \\ + f_3(y_i, x_i)(x_{i+1} - x_i) + f_4(y_i, x_i)(J_{i+1} - J_i)\big|_{a,b,g} = 0. \\ i = 0,..,n-1. \end{gathered} \tag{11}$$

Причем $J_0 = a_0, J_1 = a_0 + \frac{a_n - a_0}{n},.., J_i = a_0 + \frac{i}{n}(a_n - a_0),.., J_n = a_n$. Решаем уравнение (6) относительно $\left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)_{a,b,g}$, полученные значения подставляем в (11) и вместе с граничными условиями (9):

$$\begin{gathered} s_0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 + \cos y_0)\cos^2 x_0 = p_1, \ \frac{1}{2}(1 + \cos y_0)\sin x_0 \cos x_0, = q_1, \\ s_n - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 + \cos y_n)\cos^2 x_n = p_2, \ \frac{1}{2}(1 + \cos y_n)\sin x_n \cos x_n, = q_2, \end{gathered} \tag{12}$$

получаем $(3n+4)$ уравнений с $\{y_i, s_i, x_i, nw^2r^2, i = 0,..,n\}$, $(3n+4)$ неизвестными. С помощью интерполяционных многочленов можем интерполировать функции y, s, x, и, следовательно, получим аппроксимированные функции поля напряжений.

Для определения поле скоростей перемещений рассмотрим условие изотропии:

$$
\begin{gathered}
e_r + e_{rq}\frac{n_2}{n_1} + e_{rj}\frac{n_3}{n_1} = e_{rq}\frac{n_1}{n_2} + e_q + e_{qj}\frac{n_3}{n_2},\\
e_{rq}\frac{n_1}{n_2} + e_q + e_{qj}\frac{n_3}{n_2} = e_{rj}\frac{n_1}{n_3} + e_{qj}\frac{n_2}{n_3} + e_j,\\
e_{rj}\frac{n_1}{n_3} + e_{qj}\frac{n_2}{n_3} + e_j = e_r + e_{rq}\frac{n_2}{n_1} + e_{rj}\frac{n_3}{n_1}.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Для скоростей деформаций имеем:

$$
\begin{gathered}
e_r = \frac{\partial u}{\partial r},\ e_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{u}{r},\\
e_j = \frac{u}{r} + \frac{v}{r}\operatorname{ctg} q,\ e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial q}\right]\\
e_{\theta j} = \frac{1}{2}\frac{\sin q}{r}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{w}{\sin q}\right),\ e_{rj} = \frac{1}{2} r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right).
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Подставляя (14) в (13) увидим, что из них независимы только два. Предположим, что поле скоростей перемещений удовлетворяет условию несжимаемости:

$$
e_r + e_q + e_j = 0. \tag{15}
$$

Рассмотрим первые два уравнения (13), условие несжимаемости (15), туда подставим соотношения (14), получим систему уравнений, которые принадлежат к гиперболическому типу. Присоединим к ним следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial J}dJ = du,\\
\frac{\partial v}{\partial r}dr + \frac{\partial v}{\partial J}dJ = dv,\\
\frac{\partial w}{\partial r}dr + \frac{\partial w}{\partial J}dJ = dw.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Получим линейную алгебраическую систему относительно $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial J}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial J}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial J}$. Аналогичным образом из $\Delta = \Delta_6 = 0$ получим следующее характеристическое соотношение:

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^3 \frac{\left(n_1^2 - n_1 n_2 - n_2^2\right)n_3^2 - n_1^2 n_2^2 + n_2^4}{n_1 n_2} + \left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^2 \frac{n_1^3 - 5n_1 n_2^2 + 3n_1 n_3^2 - 2n_2 n_3^2}{n_1} -\\
-\frac{d\ln r}{dJ}\frac{\left(n_2^4 + n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2\right)n_3^2 - 5n_1^2 n_2^2}{n_1 n_2} + n_2^2 + n_3^2 - n_1^2 = 0,
\end{gathered}
\tag{17}
$$

а вдоль определяемых направлений $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{g}\right)$ имеет место:

$$
Adu + Bdv + Cdw - D(u,v,w)d\ln r = 0, \tag{18}
$$

где

$$A = B\frac{d\ln r}{dJ},\;\; B = \frac{d\ln r}{dJ}\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1n_2},\;\; C = \left(\left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^2 - 1\right)\frac{n_2^2-n_1^2+n_3^2}{4n_2n_3} - \frac{d\ln r}{dJ}\left(\frac{n_1}{n_3}-\frac{n_3}{2n_1}\right),$$

$$\begin{aligned} D(u,v,w) = {} & \frac{1}{4n_1n_2^2n_3}\left(\frac{d\ln r}{dJ}\right)^2\Big[(n_2^2-n_1^2)(n_1+n_2 ctgJ)n_2 w + \\ & + \big((v-w)(n_2^3-n_1^2)n_1 + 2(u+v ctgJ)(n_1^2-2n_2^2)n_2\big)n_3 + (n_1-n_2 ctgJ)n_2n_3^2 w\Big] + \\ & + \frac{1}{2n_1n_2n_3}\frac{d\ln r}{dJ}\Big[-2(n_1+n_2 ctgJ)n_1 w + \big((2w-v)n_1^2 + 6(u+v ctgJ)n_1n_2 + vn_2^2\big)n_3 + \\ & + (n_2+n_1 ctgJ)n_3^2 w\Big] + \frac{1}{4n_1n_2^2n_3}\Big[(n_1^2-n_2^2)(n_1+n_2 ctgJ)n_2 w + \\ & + \big((v-u)(n_1^2-n_2^2)n_1 - 2(3u+2v ctgJ)n_1^2n_2 + 2n_2^2 v ctgJ\big)n_3 + (n_2 ctgJ - n_1)n_2n_3^2 w\Big]. \end{aligned} \qquad (19)$$

Таким образом, имеем три характеристических соотношения, и при заданных граничных условиях можно численным методом интегрировать дифференциальные уравнения характеристик, и, следовательно, определить поле скоростей деформаций.

Кинематические граничные условия. Предположим, что на поверхности $r = r_0$ конической трубы имеет место следующие кинематические граничные условия (рис. 1):

$$u = v = w = 0, \qquad (20)$$

т. е. отмеченный край жестко защемлен.

Определение скоростей перемещений аналогичным образом приводится к решению $3(n+1)$ уравнений относительно $\{u_i, v_i, w_i, i = 0,..,n\}$, $3(n+1)$ неизвестных.

Решение ищем в интервале $[r_0, r_n]$, $r_1 = r_0 + \frac{r_n - r_0}{n}, ..., r_i = r_0 + \frac{i}{n}(r_n - r_0)$. Условие (20) на поверхности $r = r_0$ можем записать:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0. \qquad (21)$$

Характеристические соотношения будут:

$$A(u_{i+1}-u_i) + B(v_{i+1}-v_i) + C(w_{i+1}-w_i) - D(u_i, v_i, w_i)(\ln r_{i+1} - \ln r_i)\big|_{\bar a, \bar b, \bar g} = 0, \qquad (22)$$

$$i = 0,..,n-1.$$

Полученная система уравнений (21), (22) позволяет с помощью интерполяционных многочленов аппроксимировать поле скоростей перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Задоян, М. А.* Пластическое течение быстровращающейся конической трубы / М. А. Задоян // ДАН НАН РА. – 2001.– Т. 101. – № 2. – С. 122–127.

2. *Ивлев, Д. Д.* О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Докл. РАН. – 2000. – Т. 373. – № 1. – С. 39–41.

3. *Ишлинский, А. Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 1 : Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука. – 1986. – 360 с.

4. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 702 с.

5. *Горский, А. В.* Общие двумерные задачи теории идеальной пластичности : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / А. В. Горский. – Чебоксары, 2004.