ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

Зубчанинов В. Г.

О ГИПОТЕЗЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ, ПРИНЦИПЕ ГРАДИЕНТАЛЬНОСТИ И ПОСТУЛАТЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Тверской государственный технический университет)

В работе на основе гипотезы ортогональности и вытекающих из нее общих определяющих соотношений теории процессов упругопластического деформирования сплошных сред и обобщенного принципа градиентальности показано, что постулаты пластичности А.А. Ильюшина и Драккера имеют в математической теории пластичности более глубокое содержание и значение. Доказано, что выполнение этих постулатов является критерием достоверности не только классических определяющих соотношений теории течения, но и классических определяющих соотношений, обобщенных на сложное нагружение–разгружение теории упругопластических процессов.

1. Об активных и пассивных процессах и предельных поверхностях.

Макроскопическое состояние сплошной среды в механике в любой момент времени однозначно определяется процессом [6–9]. Процесс деформирования в частице тела определяется заданием шести компонент e_{ij} (i, j = 1, 2, 3) тензора деформаций как независимых функций времени t. Процесс нагружения в частице среды определяется заданием шести компонент s_{ij} тензора напряжений как независимых функций времени t.

Так как

$$e_{ij} = d_{ij}e_0 + Э_{ij}, \quad s_{ij} = d_{ij}s_0 + S_{ij},$$

где $e_0 = d_{ij}e_{ij}/3, \quad s_0 = d_{ij}s_{ij}/3, \quad q = d_{ij}e_{ij}$ – средние значения напряжений и деформаций и относительное изменение объема; $Э_{ij}$, S_{ij} – компоненты соответствующих тензоров-девиаторов, то процессы деформирования и нагружения в столь же общей форме могут быть заданы шестью компонентами $Э_{ij}(t)$ и $S_{ij}(t)$ тензоров-девиаторов, связанных условиями $Э_{ii} = 0$, $S_{ii} = 0$, а также инвариантами e_0, s_0 соответственно.

В векторных пятимерных евклидовых пространствах деформаций E_5 и напряжений Σ_5 указанные выше процессы деформирования и нагружения могут быть заданы траекториями деформирования $\bar{Э}(t)$ и нагружения $\bar{s}(t)$ [1–5]. Положение каждой точки K на траекториях определяется длинами дуг s и Σ соответственно. Для траектории деформирования в каждой ее точке K можно построить физические векторы $\bar{s}$, $d\bar{Э}$, $d\bar{s}$ и приписать к ней скалярные параметры e_0, $Э = |\bar{Э}|$, угол вида деформированного состояния формоизменения j, температуру T, другие нетермомеханические параметры c. Их совокупность в каждой точке K создает *образ процесса* деформирования. Мерой его сложности являются параметры внутренней геометрии траектории – параметры кривизны и кручения $æ_m$ (m = 1, 2, 3, 4) и углы J_m^0 ее излома. Аналогично строится образ процесса нагружения в Σ_5.

Пусть образ процесса до точки K траектории деформирования задан. Рассмотрим продолжение этого процесса из точки K по различным направлениям.

Процессом *мягкого нагружения* назовем такой, для которого приращение модуля вектора напряжений $ds > 0$, а процессом разгружения – такой, для которого $ds < 0$. Процессом *жесткого нагружения* назовем такой, для которого приращение модуля вектора деформаций $dЭ > 0$, а процессом разгружения – такой, для которого $dЭ < 0$. Для *локальных процессов* при мягком нагружении $dS_k > 0$, а разгружении $dS_k < 0$; при жестком локальном нагружении $d\acute{Y}_k > 0$, а разгружении $dЭ_k < 0$ $(k = 1, 2, \mathbf{K}, 5)$.

Элементарная работа деформирования

$$dA = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_0 d\theta + S_{ij} d\acute{Y}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где $dA_0 = s_0 dq$ – элементарная работа всестороннего растяжения–сжатия, $dA_Ф = S_{ij} dЭ_{ij}$ – элементарная работа формоизменения. Поскольку для большинства материалов энергия объемного расширения–сжатия обратима, т. е.

$$A = \oint s_0 dq = 0,$$

то к необратимому пластическому деформированию должно приводить приращение энергии формоизменения

$$dA_Ф = S_{ij} dЭ_{ij} = \bar{s} d\bar{Э} = s ds \cos J_1, \qquad (1.1)$$

где всегда $s > 0$, $ds > 0$, $0 \le J_1 \le p$. Угол J_1 называется *углом сближения* и определяется по формуле $\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1$, где $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$, $\hat{p}_1 = d\bar{Y}/ds$ – единичные векторы напряжений и касательной к траектории в текущей точке K.

Если $dA_Ф > 0$ $(J_1 < p/2)$, то процесс упругопластического деформирования назовем активным, а если $dA_Ф < 0$ $(J_1 > p/2)$, то – пассивным. При $dA_Ф = 0$ $(J_1 = p/2)$ процесс назовем условно нейтральным. Слово «условный» означает, что локальные процессы $S_k - Э_k$ не являются нейтральными.

Приращение элементарной работы напряжений (дополнительной работы) равно

$$dB = q ds_0 + Э_{ij} dS_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где $dB_0 = q ds_0$ – приращение дополнительной энергии всестороннего растяжения–сжатия;

$$dB_Ф = Э_{ij} dS_{ij} = \bar{Э} d\bar{s} = Э d\Sigma \cos J_1^* \qquad (1.2)$$

– приращение дополнительной энергии напряжений, для которой всегда $Э > 0$, $d\Sigma > 0$, $0 \le J_1^* \le p$. Угол J_1^* носит название *угла запаздывания*, причем $\cos \vartheta_1^* = \hat{Y} \cdot \hat{q}_1$, где $\hat{Y} = \bar{Y}/\acute{Y}$, $\hat{q}_1 = d\bar{\sigma}/d\Sigma$, Σ – длина дуги траектории нагружения в Σ_5.

Критерием определения состояния процесса нагружения является знак $dB_Ф$. Если $dB_Ф > 0$ $(J_1^* < p/2)$, то процесс нагружения считаем *активным*, если $dB_Ф < 0$ $(J_1^* > p/2)$ – *пассивным*, $dB_Ф = 0$ $(J_1^* = 0)$ – *условно нейтральным*.

В каждой точке K траекторий деформирования в E_5 либо нагружения в Σ_5 их продолжения можно разбить на два множества, разделенных *предельными поверхностями деформирования* $F(\overline{Э}) = 0$ *и нагружения* $f(\overline{s}) = 0$ соответственно. Эти поверхности могут быть включены в понятие образов процессов в E_5 и Σ_5 для каждой текущей точки K. Вне этих предельных поверхностей $dA_Ф = \overline{s}d\overline{Э} > 0$, $dB_Ф = \overline{Э}d\overline{s} > 0$, т. е. имеют место активные процессы полного и неполного упругопластического деформирования и нагружения соответственно. Внутри этих поверхностей $dA_Ф = \overline{s}d\overline{Э} < 0$, $dB_Ф = \overline{Э}d\overline{s} < 0$ и имеют место пассивные процессы нагружения или иначе происходит *упругая частичная сложная разгрузка*. В теории течения введена основополагающая упрощающая гипотеза о возможности разделения полных деформаций e_{ij} на упругую e_{ij}^e и пластическую e_{ij}^p части

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad Э_{ij} = Э_{ij}^e + Э_{ij}^p, \quad e_0 = e_0^e, \quad e_0^p = 0.$$

При этом считается, что упругие части подчиняются закону Гука

$$q = \frac{s_0}{K}, \quad Э_{ij}^e = S_{ij}/2G,$$

где $K = E/3(1-2m)$ – объемный модуль упругости, E – модуль Эйлера–Юнга, m – коэффициент Пуассона. При этом считается, что при полной разгрузке по линейному закону

$$d\overline{s} = 2Gd\overline{Э} \tag{1.3}$$

пластическая часть деформации остается неизменной, т. е. ее значение в момент начала разгрузки совпадает с остаточной деформацией. Элементарная работа пластического формоизменения

$$dA_Ф^p = \overline{s}d\overline{Э}^p = s\,ds_p \cos J_1^p. \tag{1.4}$$

При разгрузке $dA_Ф^p = 0$, что отвечает пассивному процессу пластического деформирования, т. е. упругой разгрузке. Во вне предельной поверхности изменяются обе части деформации и $dA_Ф^p > 0$, т. е. процесс пластического деформирования активен. При этом изменяются как упругая $\overline{Э}^e$, так и пластическая $\overline{Э}^p$ части вектора деформации.

Таким образом, в теории течения предельные поверхности разделяют процессы упругой простой разгрузки и активного пластического деформирования. Это сужает введенные нами выше понятия предельных поверхностей, разделяющих процессы сложного активного и пассивного деформирования и нагружения.

При сложном нагружении либо деформировании, при изломе траектории на углы $J_1^0 > p/2$, $J_1^* > p/2$ образуются нырки неполного упругого состояния (сложной разгрузки). Наши опыты с различными материалами показали, что на диаграмме деформирования на всем протяжении нырка процесс нагружения является пассивным $(dB_Ф < 0)$. В то же самое время на ниспадающей ветви нырка при частичной упругой разгрузке материала $dA_Ф < 0$, а на восходящей ветви – $dA_Ф > 0$. Минимальное значение s на нырке практически соответствует «протыканию» предельной поверхности $F(\overline{Э}) = 0$. На восходящей ветви нырка имеет место состояние *неполной упругости* или пластичности, которое отличается от понятия неполной пластичности, данное Хааром и Карманом [2]. Поэтому мы даем здесь другое название указанному выше состоянию как состоянию *неполной упругости* при сложном нагружении по криволинейным траекториям. Заметим также, как опытно подтвержденный факт, что всегда угол запаздывания J_1^* больше угла сближения J_1. Если вектор $\bar{s}$ стремится занять положение касательной к траектории деформирования $(J_1 \to 0)$, т. е. создать *скользящий образ процесса*, то вектор $\bar{Э}$ стремится совпасть по направлению с вектором $\bar{s}$ и создать *квазипростой образ процесса*.

2. Гипотеза ортогональности и определяющие соотношения теории пластичности.

В работах [2, 5] автором выдвинута гипотеза ортогональности вектора напряжений $\bar{s}$ к предельным поверхностям

$$\bar{s} = D \operatorname{grad} F(\bar{Э}) = L \operatorname{grad} f(\bar{s}), \tag{2.1}$$

где D, L – функционалы процессов деформирования и нагружения.

Данная гипотеза позволила получить дифференциально-нелинейные определяющие соотношения теории процессов упругопластического деформирования

$$d\bar{\sigma} = M_1 d\bar{Y} + ds(M\hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3), \tag{2.2}$$

где

$$M = \frac{ds}{ds} - M_1 \cos J_1 - M_3 \sin J_1 \sin J_2, \quad P = \frac{ds}{ds}\frac{1}{\cos J_1}, \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vartheta_1}{ds} + æ_1 \cos\vartheta_2 = \dfrac{1}{\sigma}(-M_1 \sin\vartheta_1 + M_3 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2), \\ \sin\vartheta_1\left(\dfrac{d\vartheta_2}{ds} + æ_2\right) = æ_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \dfrac{M_3}{\sigma}\cos\vartheta_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_1}{ds} + æ_1 \cos\theta_2 = -\dfrac{1}{\acute{Y}}\sin\theta_1, \\ \sin\theta_1\left(\dfrac{d\theta_2}{ds} + æ_2\right) = æ_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin\vartheta_2 \hat{p}_3), \\ \hat{Y} = \cos\theta_1 \hat{p}_1 + \sin\theta_1(\cos\theta_2 \hat{p}_2 + \sin\theta_2 \hat{p}_3) \end{cases} \tag{2.6}$$

– единичные векторы в репере Френе $\{\hat{p}_k\}$,

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{Y}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{æ_1}\frac{d^2\bar{Y}}{ds^2}, \quad æ_2 \hat{p}_3 = æ_1 \frac{d\bar{Y}}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{æ_1}\frac{d^2\bar{Y}}{ds^2}\right) \tag{2.7}$$

Функционалы

$$\begin{cases} M_k = M_k\{\acute{Y}, \varepsilon_0, \varphi, æ_1, æ_2, T, \chi\}_{s(t)}, \\ P = P\{\acute{Y}, \varepsilon_0, \varphi, æ_1, æ_2, T, \chi\}_{s(t)} \end{cases} \tag{2.8}$$

зависят от параметров процесса $s(t)$ либо от $Э(s)$, $e_0(s)$, $j(s)$, $æ_1(s)$, $æ_2(s)$, $T(s)$, $c(s)$.

Мерой сложности процесса являются параметры кривизны и кручения $æ_1$, $æ_2$ траектории деформирования, а также углы ее излома.

Вместо (2.2) в [2] была получена также вторая основная форма определяющего соотношения

$$d\bar{\sigma} = N_1 d\bar{Y} + ds(N_\sigma \hat{\sigma} + N_{\hat{Y}} \hat{Y}), \tag{2.9}$$

где

$$\begin{cases} N_Э = -M_3 A_0 / A_3, \quad N_1 = M_1 - M_3 A_1 / A_3, \\ N_s = M + M_3 / A_3 = \dfrac{ds}{ds} - N_1 \cos J_1 - N_Э \cos a, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = A_0 \hat{Y} + A_m \hat{p}_m \quad (m = 1{,}3), \\ A_0 = \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 / \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ A_3 = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 - A_0 \sin\theta_1 \sin\theta_2. \end{cases} \tag{2.11}$$

Из (2.9) следует определяющее соотношение вида

$$d\bar{s} = N_1 d\bar{Э} + (P - N_1)\frac{\bar{s}d\bar{Э}}{s^2}\bar{s} + dsN_Э \bar{n}, \tag{2.12}$$

где вектор

$$\bar{n} = \hat{n}\sin\alpha = \hat{Y} - \hat{\sigma}\cos\alpha$$

ортогонален вектору $\bar{s}$ и лежит в плоскости векторов $\bar{Э}$ и $\bar{s}$.

При пассивном процессе деформирования имеет место частичная упругая разгрузка на ниспадающей ветви нырка. При этом реализуется квазипростой образ упругого процесса разгружения, при котором $P = M_1 = 2G$, $M_3 = 0$. Из (2.2), (2.9), (2.12) следует закон частичной упругой разгрузки

$$d\bar{s} = 2Gd\bar{Э}, \tag{2.13}$$

который по форме совпадает с законом полной упругой линейной разгрузки при простом разгружении в теории процессов Ильюшина и теории течения. Если $M_3 = 0$, то из (2.2), (2.9), (2.12) следуют определяющие соотношения гипотезы компланарности [2, 4]

$$\begin{cases} d\bar{s} = M_1 d\bar{Э} + (P - M_1)\dfrac{\bar{s}d\bar{Э}}{s^2}\bar{s}, & (2.14) \\ d\bar{Э} = \dfrac{1}{M_1}d\bar{s} + \left(\dfrac{1}{P} - \dfrac{1}{M_1}\right)\dfrac{\bar{s}d\bar{s}}{s^2}\bar{s}, & (2.15) \end{cases}$$

где

$$P = \frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}d\bar{Y}} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{1}{\cos\vartheta_1}, \quad M_1 = \frac{\hat{v}d\bar{\sigma}}{\hat{v}d\bar{Y}} \quad (\hat{v} \perp \hat{\sigma})..$$

В дальнейшем, без снижения общности, в целях большей геометрической наглядности и возможности сравнения с аналогичными соотношениями в теории течения будем использовать определяющие соотношения (2.14), (2.15).

Рассмотрим вектор

$$d\bar{Э}^* = d\bar{Э} - \frac{ds}{M_1}, \tag{2.16}$$

который в теории течения $(M_1 = 2G)$ совпадает с $d\bar{Э}^p$. Из (2.14), (2.16) получаем

$$d\bar{Э}^* = \left(1 - \frac{P}{M_1}\right)\frac{\bar{s}d\bar{Э}}{s^2}\bar{s} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{M_1}\right)\frac{\bar{s}d\bar{s}}{s^2}\bar{s}. \tag{2.17}$$

С учетом соотношений (2.1) гипотезы ортогональности, из (2.17) следует

$$d\bar{Э}^* = D_1 \operatorname{grad} F(\bar{Э})ds, \tag{2.18}$$

$$d\overline{Э}^* = D_2 \operatorname{grad} f(\overline{s})d\Sigma, \tag{2.19}$$

где функционалы процесса

$$D_1 = D\left(1 - \frac{P}{M_1}\right)\frac{\overline{s}d\overline{Э}}{s^2 ds}, \quad D_2 = L\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{M_1}\right)\frac{\overline{s}d\overline{s}}{s^2 d\Sigma}.$$

Как видно из (2.17), (2.18), вектор $d\overline{Э}^*$ направлен по нормали к предельным поверхностям, как и вектор напряжений $\overline{s}$. Соотношения (2.18), (2.19) представляют собой *закон градиентальности* в теории процессов упругопластического деформирования в E_5 и Σ_5 и обобщают этот закон теории течения. При сложной разгрузке $P = M_1 = 2G$, $M_3 = 0$ и из (2.16) следует $d\overline{Э}^* = 0$ и закон частичной и полной разгрузки $d\overline{s} = 2Gd\overline{Э}$.

В теории течения $M_1 = 2G$, $d\overline{Э}^* = d\overline{Э}^p$ и из соотношений (2.18), (2.19) закона градиентальности в теории процессов следует закон градиентальности теории течения

$$\begin{cases} d\overline{Э}^p = D_1 \operatorname{grad} F(\overline{Э})ds, & (2.20) \\ d\overline{Э}^p = D_2 \operatorname{grad} f(\overline{s})d\Sigma, & (2.21) \end{cases}$$

где

$$D_1 = \frac{D}{s^2}\frac{\overline{s}d\overline{Э}^p}{ds}, \quad D_2 = \frac{L}{s^2}\frac{\overline{s}d\overline{Э}^p}{ds}.$$

Элементарная работа пластического формоизменения

$$dA_Ф^0 = \overline{s}d\overline{Э}^p = s\,ds^p \cos J_1^p$$

положительна при активном процессе и равна нулю при пассивном (разгрузке).

Общие соотношения теории течения Мелана–Прагера, как известно [2], имеют вид

$$\begin{cases} d\overline{Э}^p = d\overline{Э} - \dfrac{d\overline{s}}{2G} = \tilde{D}_2 \operatorname{grad} f(\overline{s})df, \\ df = \operatorname{grad} f(\overline{s}) \cdot d\overline{s} > 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

для активных процессов пластического течения и вид

$$d\overline{Э} = \frac{d\overline{s}}{2G}, \quad d\overline{Э}^p = 0, \quad df = \operatorname{grad} f(\overline{s})d\overline{s} = 0 \tag{2.23}$$

для пассивных процессов упругой разгрузки.

Законы Мелана–Прагера (2.22), (2.23) согласуются с (2.20), (2.21).

3. Постулат пластичности.

В соответствии с первым и вторым началом термодинамики необратимых процессов сплошных сред

$$\oint(dA - dQ) = 0, \quad s = \oint\frac{dQ}{T} \geq 0, \tag{3.1}$$

где dQ – приращение количества тепловой энергии, s – функция состояния среды, называемая ее *энтропией*, $dA = s_{ij}de_{ij}$ – внутренняя энергия деформации.

Знак равенства в (3.1) имеет место для обратимых процессов. Для изотерических процессов $(T = \mathrm{const})$ в необратимом процессе деформирования $dQ \geq 0$, $dA \geq 0$ и из (3.1) следует

$$A = \oint s_{ij}de_{ij} = \oint s_0 dq + \oint \overline{s}d\overline{Э} = \oint \overline{s}d\overline{Э} \geq 0, \tag{3.2}$$

так как

$$\oint s_0 dq = K\oint q dq \equiv 0.$$

Таким образом, работа вектора напряжений в E_5 на любой замкнутой траектории, начинающейся и заканчивающейся в текущей точке *K*, положительна и равна нулю, если деформация обратима [9].

Это положение известно в теории пластичности как постулат пластичности, который является следствием закона термодинамики необратимых процессов. Постулат пластичности впервые был выдвинут в теории течения сначала Драккером, а затем обобщен А.А. Ильюшиным [9]. Для случая простого нагружения–разгружения он очевиден.

Покажем, что постулат пластичности выполняется и в общей теории процессов упругопластического деформирования упрочняющихся сред, когда имеет место не только простая, но и сложная разгрузка. В общей теории процессов при сложном (непропорциональном) нагружении и разгружении не допускается разложение полной деформации на упругую и пластическую части, т. е. $\overline{Э} \neq \overline{Э}^e + \overline{Э}^p$. Однако при частичной сложной разгрузке по криволинейной траектории либо после ее излома имеет место квазипростой упругий процесс до момента «протыкания» предельной поверхности изнутри. В этом случае выполняется закон Гука для приращений напряжений и деформаций, т. е.

$$\Delta\overline{s} = 2G\Delta\overline{Э}, \quad d\overline{s} = 2Gd\overline{Э}. \tag{3.3}$$

Общее определяющее соотношение для активных процессов имеет вид [2]

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = M_1\hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3\hat{p}_3, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \cos\vartheta_1\hat{p}_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2\hat{p}_2 + \sin\vartheta_2\hat{p}_3), \\ M = (P - M_1)\cos\vartheta_1 - M_3\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2, \quad P = \dfrac{\overline{\sigma}d\overline{\sigma}}{dA_\Phi}, \\ \cos\vartheta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_1 = \dfrac{dA_\Phi}{\sigma ds}, \quad dA_\Phi = \overline{\sigma}d\overline{Y}. \end{cases} \tag{3.5}$$

При $M_1 = P = 2G$, $M_3 = 0$ из (3.4) следует закон разгрузки (3.3). Умножая (3.4) на $\hat{\sigma} = \overline{\sigma}/\sigma$ и учитывая (3.5), находим

$$dA_\Phi = \overline{s}d\overline{Э} = \frac{sds}{P}, \tag{3.6}$$

где функционал пластичности *P* удовлетворяет условию

$$0 \leq 2G_k \leq P \leq 2G, \tag{3.7}$$

а при частичной разгрузке $P = 2G$.

Из (3.6), в частности, следует, что для активных процессов нагружения $(ds > 0)$ элементарная работа формоизменения $dA_\Phi > 0$, а для пассивных $(ds < 0)$ процессов сложной частичной разгрузки – $dA_\Phi < 0$.

Рассмотрим теперь замкнутый по деформациям в E_5 процесс *MKPKM* из некоторой точки *M* внутри предельной поверхности [6]. В точке *K* на пересечении траектории деформирования и предельной поверхности $F(\overline{Э}) = 0$ процесс выходит на бесконечно малую величину $dЭ_k$ за пределы поверхности в точку *P*. Для прямого *MKP* и обратного

PKM путей вектор $\overline{Э}(s)$ одинаков в каждой точке, но приращение вектора $d\overline{Э}$ меняет знак на обратный. Поэтому работа *A* на замкнутом по деформациям пути

$$A_{Ф} = \oint \overline{s}\, d\overline{Э} = \int_{MK} (\overline{s}_{MK} - \overline{s}_{KM}) d\overline{Э} + \int_{KP} (\overline{s}_{KP} - \overline{s}_{PK}) d\overline{Э}. \qquad (3.8)$$

На основании (3.6), (3.7) из (3.8) следует

$$A_{Ф} = \oint \overline{s}\, d\overline{Э} = \oint \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G} \right) ds > 0 \qquad (3.9)$$

для необратимых процессов $(P < 2G)$. При упругой нагрузке $P = 2G$, $A_{Ф} = 0$.

Таким образом, *для любой замкнутой по деформациям траектории в* E_5 *работа вектора напряжений неотрицательна*. Следовательно, гипотеза ортогональности и вытекающий на ее основании обобщенный принцип градиентальности (2.18) приводят к выполнению постулата пластичности в E_5. Поскольку $\overline{Э}$ связано с $\overline{s}$ законом $\overline{Э} = \overline{Э}(\overline{s})$, то поверхность $F(\overline{Э}) = 0$ преобразуется в Σ_5 в предельную поверхность $f(\overline{s}) = 0$, так как $F(\overline{Э}) = F[\overline{Э}(\overline{s})] = f(\overline{s}) = 0$.

В силу изоморфизма образа процесса постулат пластичности можно применять и в пространстве напряжений Σ_5. Соответствующий закон градиентальности в Σ_5 имеет вид (2.19). Законы градиентальности (2.18), (2.19) утверждают, что вектор

$$d\overline{Э}^* = d\overline{Э} - \frac{d\overline{s}}{M_1}$$

ортогонален предельным поверхностям $F(\overline{Э}) = 0$, $f(\overline{s}) = 0$ и коллинеарен вектору напряжений $\overline{s}$. В теории течения $M_1 = 2G$ и $d\overline{Э}^* = d\overline{Э}^p$, т. е. вектор приращения $d\overline{Э}^p$ пластических деформаций ортогонален предельным поверхностям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубчанинов, В. Г.* Гипотеза ортогональности в теории пластичности / В. Г. Зубчанинов // Проблемы механики деформируемого твердого тела. – СПБ. : СПбГУ, 2002. – С. 137–140.
2. *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2003. – 300 с.
3. *Зубчанинов, В. Г.* Основы теории упругости и пластичности / В. Г. Зубчанинов. – М. : Высшая школа, 1990. – 368 с.
4. *Зубчанинов, В. Г.* Устойчивость и пластичность : в 3 т. Т. 3 : Доклады / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2006. – 399 с.
5. *Зубчанинов, В. Г.* Устойчивость и пластичность : в 3 т. Т. 1 : Устойчивость / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2006. – 400 с.
6. *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : МГУ, 1990. – 310 с.
7. *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : АН СССР, 1963. – 271 с.
8. *Ильюшин, А. А.* Труды. Т. 1 (1935–1945) / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 2003. – 350 с.
9. *Ильюшин, А. А.* Труды. Т. 2 (1946–1966) / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 2004. – 479 с.