ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

Максимова Л. А.

О СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СООТНОШЕНИЯХ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

(Московский государственный горный университет)

В работе рассматриваются статически определимые соотношения в рамках условия пластичности Мизеса.

Уравнения теории пластичности при условии пластичности Мизеса являются статически неопределимыми.

В самом деле, имеют место три уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial s_x}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial s_y}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial t_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial s_z}{\partial z}=0
\end{aligned}\qquad (1)$$

и условие пластичности Мизеса

$$\left(s_x-s_y\right)^2+\left(s_y-s_z\right)^2+\left(s_z-s_x\right)^2+6\left(t_{xy}^2+t_{yz}^2+t_{xz}^2\right)=6k^2,\quad k-const, \qquad (2)$$

где $s_x, t_{xy}\ldots$ – компоненты напряжений.

Система четырех уравнений (1), (2) относительно шести компонент напряжений s_{ij} является незамкнутой. Для определения замкнутой системы уравнений, вообще говоря, следует привлечь соотношения ассоциированного закона пластического течения.

Для определения статически определимых соотношений в рамках условия пластичности Мизеса (2) примем предположения.

Предположим, что

$$T=\sqrt{t_{xz}^2+t_{yz}^2}=T_0,\ T_0-const,\ T_0<k. \qquad (3)$$

Согласно (3), условие пластичности (2) примет вид

$$\left(s_x-s_y\right)^2+\left(s_y-s_z\right)^2+\left(s_z-s_x\right)^2+6t_{xy}^2=6\left(k^2-T_0^2\right). \qquad (4)$$

Система пяти уравнений (1), (3), (4) относительно шести компонент напряжений s_{ij} остается незамкнутой.

Предположим далее, что

$$s_z = \frac{1}{2}\left(s_x + s_y\right). \qquad (5)$$

Согласно (5), условие (4) примет вид

$$\left(s_x - s_y\right)^2 + 4t_{xy}^2 = 4\left(k^2 - T_0^2\right). \qquad (6)$$

Система шести уравнений (1), (3), (5), (6) является замкнутой, статически определимой системой уравнений.

Рассмотрим некоторые примеры.

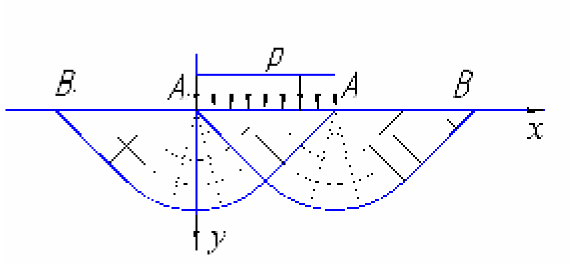

Рис. 1

Предположим, что компоненты напряжения не зависят от координаты z:

$$s_{ij} = s_{ij}(x, y), \; t_{xz} = t_{yz} = const. \qquad (7)$$

Согласно (1), (3), (6), (7) имеет место замкнутая система уравнений

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + = 0,$$
$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0, \qquad (8)$$

$$\left(s_x - s_y\right)^2 + 4t_{xy}^2 = 4K^2, \; K^2 = k^2 - T_0^2. \qquad (9)$$

Система уравнений (8) являются уравнениями плоской задачи теории идеальной пластичности с измененным пределом текучести, вызванном действием сдвигающих усилий T.

В качестве примера рассмотрим действие прандтлевского штампа (рис. 1) на идеальнопластическое полупространство при действии сдвигающих усилий (3).

Согласно (8), (9) предельное нормальное давление p определяется по формуле [1].

$$p = K(2 + p) = \sqrt{k^2 - T_0^2}\,(2 + p). \qquad (10)$$

Согласно (10) величина нормального давления зависит от величины сдвигающих усилий $T = T_0$ и не зависит от направления сдвигающих усилий T.

Соотношения (10) перепишем в виде

$$\frac{1}{(2 + p)^2} \cdot \left(\frac{p}{k}\right)^2 + \left(\frac{T_0}{k}\right)^2 = 1. \qquad (11)$$

Выражение (11) представляет собой уравнение эллипса (рис. 2) и определяет зависимость предельного усилия p от величины сдвига T_0 при фиксированном пределе текучести k.

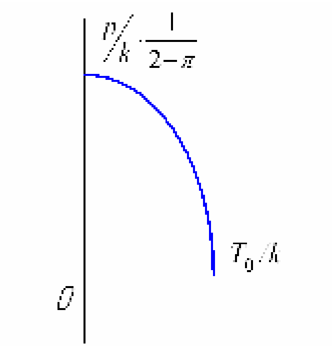

Рис. 2

Выражения (8), (9) являются соотношениями плоской задачи при измененном пределе текучести $K=\sqrt{k^2-T_0^2}$, вызванном действием сдвигающих усилий, поэтому выводы о независимости действия на напряженное состояние от направления сдвигающих усилий сохраняются в общем случае.

Приведем примеры статически допустимых распределений касательных сдвигающих усилий $T_0=\sqrt{t_{xz}^2+t_{yz}^2}$ для прандтлевского штампа (рис. 1). На рис. 3 показаны возможные статически допустимые распределения сдвигающих напряжений

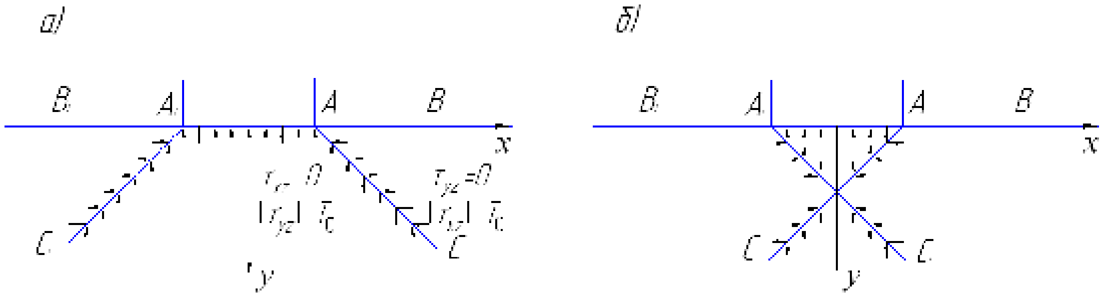

Рис. 3

На рис. 3 касательные сдвигающие усилия действуют вдоль штампа AA_1, поверхность $AB_1A_1B_1$ свободная от напряжений: линии $AC_1A_1C_1$ являются линиями разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Гостехтеоретиздат, 1957.