

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

(Тульский государственный университет)

Рассматривается задача механики разрушения для полос (балок), когда полоса изгибается в ее плоскости, заданной системой внешних нагрузок (постоянными изгибающими моментами, равномерно распределенным давлением и т. п.). Толщина полосы считается переменной.

Процессы разрушения реальных материалов имеют сложный характер и протекают для различных материалов по-разному. Это зависит от особенностей структуры материала, его химического состава, вида напряжения и других факторов. В настоящее время известны различные механизмы зарождения трещин [8]. Балки переменной толщины широко используются в технике и строительстве. Для практики исследование вопросов разрушение полос (балок) переменной толщины имеет важное значение.

Рассмотрим однородную изотропную полосу (балку) переменной толщины. Обозначим через $2c$ и $2h$ соответственно ширину и толщину полосы. Выбор системы декартовых координат и обозначения поясняются на рис. 1. Декартовы координаты xu в срединной плоскости полосы являются плоскостью симметрии. Полоса переменной толщины находится в обобщенном плоском напряженном состоянии.

По мере нагружения полосы силовой нагрузкой будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Будем полосу (балку) переменной толщины моделировать реальным хрупким телом. В процессе деформации в некоторых точках балки могут появляться зоны, в которых закон Гука не выполняется, т. е. в этих зонах напряжения превосходят предел упругости. Так как указанные зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной упругой частью полосы, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала, где материал балки деформируется за пределом упругости. Учет этих эффектов в задачах механики разрушения машин и конструкций представляет важную, но весьма трудную задачу.

Из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию пластических областей на ранних стадиях развития в виде узких слоев скольжения, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1–4, 7, 8].

Считается, что толщина полосы (балки) $2h(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2,$$

где h_1 и h_2 – соответственно, наименьшее и наибольшее значения толщины полосы.

Функция толщины может быть представлена в виде

$$h(x, y) = h_0 [1 + e\bar{h}(x, y)]. \quad (1)$$

Здесь принято, что $h_0 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$; $e = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$; $\bar{h}(x, y)$ – некоторая известная безразмерная непрерывная функция ($-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$).

Пусть на рассматриваемую полосу действуют внешние нагрузки (изгибающие моменты, равномерно распределенное по длине полосы давление или сосредоточенные силы), расположенные в срединной плоскости полосы. Грани полосы, параллельные плоскости xOy , приняты свободными от внешних напряжений.

В изучаемом случае возникновение трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений. Ось x системы координат Oxy совмещаем с линией зоны предразрушения ($a \leq x \leq b$). Считается, что в зоне предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении.

Задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния полосы (балки), а также в определении предельной нагрузки, по достижении которой произойдет появление трещины.

Запишем общие уравнения статического деформирования полосы: уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

закон Гука

$$N_x = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad N_y = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad N_{xy} = \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (3)$$

Здесь N_x , N_y , N_{xy} – соответственно, нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины; u , u – смещения; E – модуль упругости Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала пластины.

Граничное условие в зоне предразрушения будет

$$s_y = s_s; \quad t_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (4)$$

где s_s – предел текучести материала полосы на растяжение.

Решение системы уравнений статического деформирования пластины (2)–(3) ищем в виде разложений по малому параметру

$$N_x = N_x^{(0)} + eN_x^{(1)} + \mathbf{K}; \quad N_y = N_y^{(0)} + eN_y^{(1)} + \mathbf{K}; \quad N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + eN_{xy}^{(1)} + \mathbf{K}; \quad (5)$$

$$u = u_0 + eu_1 + \mathbf{K}; \quad u = u_0 + eu_1 + \mathbf{K}; \quad a = a_0 + ea_1 + \mathbf{K}; \quad b = b_0 + eb_1 + \mathbf{K}$$

Формулы (1)–(5) подставляем в уравнения (2) и (3) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра e . В полученных уравнениях уравнения нулевого приближения совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения классической плоской задачи теории упругости с объемной силой, определяемой, согласно [5]:

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}; \quad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}. \quad (6)$$

Аналогично определяются составляющие X_2 , Y_2 объемной силы для второго и последующих приближений.

Граничные условия задачи принимают соответственно вид:
для нулевого приближения

$$N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = N_s ; \quad \text{при } y = 0, \quad a_0 \leq x \leq b_0 ; \quad (7)$$

для первого приближения

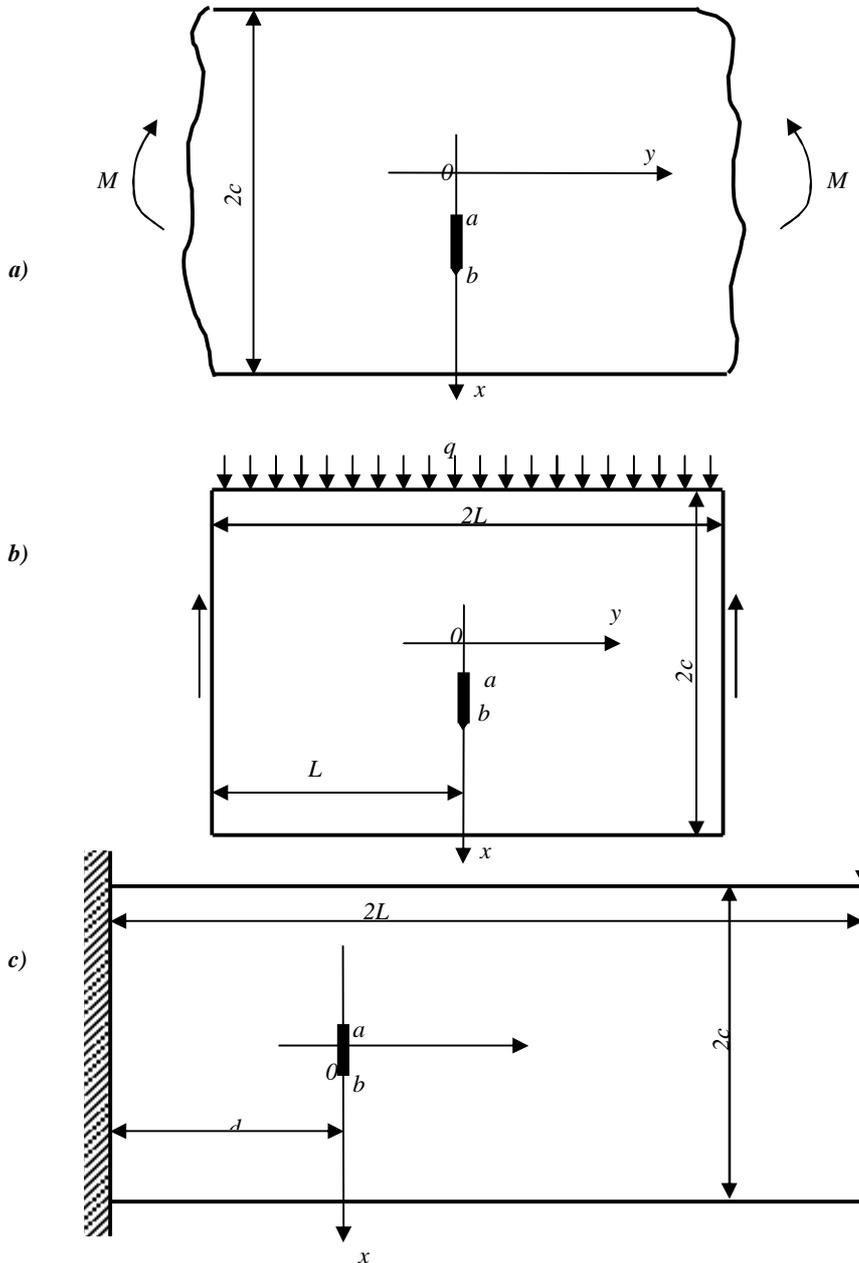


Рис. 1. Расчетная схема задачи

$$N_y^* - iN_{xy}^* = -\bar{h}(x,0)N_s; \quad \text{при } y = 0, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (8)$$

где $N_s = 2h_0 S_s$.

Здесь при выводе уравнений первого приближения были приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} N_x^* &= N_x^{(1)} - N_{x_0}^{(1)}; & N_{x_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_x^{(0)}; \\ N_y^* &= N_y^{(1)} - N_{y_0}^{(1)}; & N_{y_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_y^{(0)}; \\ N_{xy}^* &= N_{xy}^{(1)} - N_{xy_0}^{(1)}; & N_{xy_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_{xy}^{(0)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вначале рассмотрим решение для нулевого приближения. Как известно [6], компоненты N_x , N_y , N_{xy} тензора напряжений и компоненты u , v вектора смещений в условиях плоской задачи теории упругости выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$. Напряженно-деформированное состояние в окрестности зоны предразрушения определяем приближенно в том смысле [6], что будем удовлетворять граничным условиям задачи на контуре зоны предразрушения (условиям (7)–(8)), и требовать, чтобы на значительном расстоянии от полосы предразрушения напряженное состояние в полосе совпадало с напряженным состоянием, определяемым функциями

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi(z) &= \Phi_0(z) = A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3; \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega(z) &= \Omega_0(z) = B_0 z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Эти функции в зависимости от значений коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, 3$) определяют напряженное состояние в полосе (балке) без зоны предразрушения.

Например, полагая в формулах (10)

$$\begin{aligned} A_0 = 0; A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{M}{4I}; \quad A_3 = 0; \\ B_0 = 0; B_1 = 0; \quad B_2 = \frac{3M}{4I}; \quad B_3 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где I – момент инерции площади сечения полосы, можно убедиться, что в этом случае функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ дают решение задачи о чистом изгибе моментами M бесконечной полосы (балки) без полосы предразрушения (см. рис. 1, случай а)).

Аналогично, на основании формул

$$\begin{aligned} \frac{N_x^{(0)} + N_y^{(0)}}{2h_0} &= 2[\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)}]; \\ \frac{N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}}{2h_0} &= \Phi_0(z) + \Omega_0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)} \end{aligned} \quad (z = x + iy) \quad (12)$$

найдем, что при

$$\begin{aligned} A_0 = \frac{q}{24I}; \quad A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{q}{8I} \left(L^2 + \frac{3c^2}{5} \right); \quad A_3 = -\frac{qc^3}{12I}; \\ B_0 = \frac{7q}{24I}; \quad B_1 = 0; \quad B_2 = \frac{q}{8I} \left(3L^2 - \frac{11c^2}{5} \right); \quad B_3 = \frac{qc^3}{12I}, \end{aligned} \quad (13)$$

(см. рис. 1, случай б)).

Функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ дают решение задачи об изгибе балки длиной $2L$ без полосы предразрушения, когда балка нагружена равномерным давлением интенсивности q . При этом принято, что балка свободно расположена на двух опорах, а опорные реакции определяются как касательные усилия, приложенные к торцам балки.

Можно показать также на основании формул (12), (13) и (10), что если

$$\begin{aligned} A_0 = 0; \quad A_1 = -\frac{iQ}{8I}; \quad A_2 = -\frac{Q(2L-d)}{4I}; \quad A_3 = 0; \\ B_0 = 0; \quad B_1 = \frac{5iQ}{8I}; \quad B_2 = -\frac{3Q(2L-d)}{4I}; \quad B_3 = -\frac{iQc^2}{2I} \end{aligned} \quad (14)$$

(обозначения указаны на рис. 1), то функции $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ дают решение задачи об изгибе жестко заземленной консольной балки без полосы предразрушения под действием постоянной поперечной силы Q , приложенной на ее свободном конце.

Наличие в балке полосы предразрушения приведет к возмущению поля упругих напряжений в окрестности зоны предразрушения. Вдали от зоны предразрушения напряженно-деформированное состояние в балке для указанных нагрузок определяется формулами (10), (12), если значения коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, 3$) определены равенствами (11), (13), (14).

Следуя Н.И. Мусхелишвили [6], краевую задачу (7) сведем к задаче линейного сопряжения граничных условий функций $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Omega^{(0)}(z)$

$$\begin{aligned} [\Phi^{(0)}(t) + \Omega^{(0)}(t)]^+ + [\Phi^{(0)}(t) + \Omega^{(0)}(t)]^- = 2f(t) \\ [\Phi^{(0)}(t) - \Omega^{(0)}(t)]^+ - [\Phi^{(0)}(t) - \Omega^{(0)}(t)]^- = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $a_0 \leq t \leq b_0$; t – аффикс точек контура зоны предразрушения ($t = x$); $f(t) = S_S$.

Решив эту задачу (15), находим

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(z) = \frac{\sqrt{(z-a_0)(z-b_0)}}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a_0)(t-b_0)(t-z)}} + \sqrt{(z-a_0)(z-b_0)} P_n(z) + \\ + \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)]; \\ \Omega^{(0)}(z) = \frac{\sqrt{(z-a_0)(z-b_0)}}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a_0)(t-b_0)(t-z)}} + \sqrt{(z-a_0)(z-b_0)} P_n(z) - \\ - \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)], \end{aligned} \quad (16)$$

где функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ определяются равенствами (10), а полином $P_n(z)$ имеет вид

$$P_n(z) = D_n z^n + D_{n-1} z^{n-1} + \dots + D_0; \quad (17)$$

интегралы в (16) элементарно находятся.

Степень полинома (17) и его коэффициенты D_0, D_1, \dots, D_n определяются из условия поведения функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ окрестности точки $|z| = \infty$. Функции $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Omega^{(0)}(z)$ аналитичны в области вне зоны предразрушения и при больших значениях $|z|$ имеют вид

$$\Phi^{(0)}(z) = \Phi_0(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad \Omega^{(0)}(z) = \Omega_0(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (18)$$

Следовательно, для определения коэффициентов D_0, D_1, \dots, D_n и величин a_0, b_0 необходимо функцию $\Phi^{(0)}(z)$, представленную в (16), разложить в ряд по степеням z в окрестности точки $|z| = \infty$ и сопоставить это разложение с выражением (18). Учитывая предыдущие соотношения и осуществляя необходимые вычисления, для определения искомым коэффициентов D_0, D_1, \dots, D_n и величин a_0, b_0 , находим следующую систему уравнений

$$D_2 + \frac{1}{2}(A_0 - B_0) = A_0, \quad (19)$$

$$D_1 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_2 + \frac{1}{2}(A_1 - B_1) = A_1,$$

$$D_0 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_1 - \frac{1}{8}(a_0 - b_0)^2 D_2 + \frac{1}{2}(A_2 - B_2) = A_2,$$

$$-C_1 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_0 - \frac{1}{2}(a_0 - b_0)^2 D_1 + \frac{1}{2}(A_3 - B_3) = A_3,$$

$$\frac{1}{2}(a_0 + b_0)C_1 - C_2 - \frac{1}{8}(a_0 - b_0)^2 D_0 = 0,$$

$$D_n = 0, \quad n \geq 3.$$

$$\text{Здесь } C_1 = -\frac{\mathbf{S}_S}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{4}(a_0 + b_0)\mathbf{S}_S.$$

При чистом изгибе моментами M полосы с зоной предразрушения в нулевом приближении имеем

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{M}{4I}; \quad A_3 = 0; \quad B_0 = 0; \quad B_1 = 0; \quad B_2 = \frac{3M}{4I}; \quad B_3 = 0.$$

Из системы (19) находим

$$D_2 = 0; \quad D_1 = 0; \quad D_0 = \frac{M}{2I} \quad (20)$$

$$-\frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_0 = -\frac{\mathbf{S}_S}{2}; \quad -\frac{1}{2}(a_0 + b_0)\mathbf{S}_S = \frac{1}{8}(a_0 - b_0)^2 D_0.$$

Последние два уравнения служат для определения размера зоны предразрушения.

Аналогично рассматриваются и другие случаи изгиба полосы (балки) с зоной предразрушения.

При изгибе равномерным давлением интенсивности q в нулевом приближении имеем (13).

Из системы (19) получаем

$$D_2 - \frac{3q}{24I} = \frac{q}{24I},$$

$$D_1 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_2 = 0,$$

$$D_0 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_1 - \frac{1}{8}(a_0 - b_0)^2 D_2 - \frac{q}{8I} \left(L^2 - \frac{7c^2}{5} \right) = \frac{q}{8I} \left(L^2 + \frac{3c^2}{5} \right),$$

$$\frac{\mathbf{S}_S}{2} - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_0 - \frac{1}{2}(a_0 - b_0)^2 D_1 - \frac{qc^3}{12I} = -\frac{qc^3}{12I},$$

$$-\frac{S_s}{2}(a_0+b_0)-\frac{1}{8}(a_0-b_0)^2 D_0=0.$$

Решая ее, находим

$$D_2 = \frac{q}{6I}; \quad D_1 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)\frac{q}{6I}, \quad (21)$$

$$D_0 = \frac{1}{4}(a_0+b_0)^2 \frac{q}{6I} + \frac{1}{8}(a_0-b_0)^2 \frac{q}{6I} + \frac{q}{4I} \left(L^2 - \frac{2c^2}{5} \right),$$

$$-\frac{1}{2}(a_0+b_0)D_0 - \frac{1}{2}(a_0-b_0)^2 D_1 = -\frac{S_s}{2},$$

$$-\frac{S_s}{2}(a_0+b_0) = \frac{1}{8}(a_0-b_0)^2 D_0.$$

Последние два уравнения, как и в предыдущем случае, служат для определения размеров зоны предразрушения.

При изгибе консольной балки в нулевом приближении имеем (14).

Из системы с учетом (19) получаем

$$D_2 = 0; \quad D_1 = \frac{iQ}{4I}; \quad D_0 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)\frac{iQ}{4I} - \frac{Q}{2I}(2L-d), \quad (22)$$

$$\frac{S_s}{2} - \frac{1}{2}(a_0+b_0)D_0 - \frac{1}{2}(a_0-b_0)^2 D_1 + \frac{iQc^3}{4I} = 0,$$

$$-\frac{S_s}{2}(a_0+b_0) = \frac{1}{8}(a_0-b_0)^2 D_0.$$

И в этом случае последние два уравнения служат для определения размеров зоны предразрушения.

Перейдем к решению задачи в первом приближении. При наличии объемных сил решение представляется в виде суммы:

$$N_x^* = N_{x_0}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}; \quad N_y^* = N_{y_0}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}; \quad N_{xy}^* = N_{xy_0}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)}, \quad (23)$$

где $N_{x_0}^{(1)}$, $N_{y_0}^{(1)}$, $N_{xy_0}^{(1)}$ – частное решение уравнения плоской теории упругости при наличии объемной силы (6); $N_{x_1}^{(1)}$, $N_{y_1}^{(1)}$, $N_{xy_1}^{(1)}$ – общее решение уравнений плоской теории упругости при отсутствии объемных сил.

Согласно методу А.Г. Угодчикова [9], в первом приближении для усилий имеем следующие общие представления

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4 \operatorname{Re} \left[\Phi^{(1)}(z) - \frac{1}{2(1+\kappa_0)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right]; \quad (24)$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2 \left[\bar{z} \Phi^{(1)'}(z) + \Psi^{(1)}(z) + \frac{1}{2(1+\kappa_0)} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa_0 \bar{F}_1 - \bar{Q}_1) \right],$$

где $\kappa_0 = (3-\nu)/(1+\nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала полосы.

В эти соотношения входят две аналитические функции $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ и две функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F; \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F} \quad (25)$$

$$F = X_1 + iY_1 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + i \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}).$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Omega^{(1)}(z)$ получаем задачу линейного сопряжения

$$[\Phi^{(1)}(x) + \Omega^{(1)}(x)]^+ + [\Phi^{(1)}(x) + \Omega^{(1)}(x)]^- = 2f_1(t); \quad (26)$$

$$[\Phi^{(1)}(x) - \Omega^{(1)}(x)]^+ - [\Phi^{(1)}(x) - \Omega^{(1)}(x)]^- = 0, \quad (27)$$

где $a_1 \leq x \leq b_1$ – аффикс точек контура зоны предразрушения в первом приближении

$$f_1(t) = -\bar{h} s_s + f_0(x) \quad \text{при } a_1 \leq x \leq b_1 \quad (28)$$

$$f_0(x) = \frac{1}{1+\kappa_0} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\kappa_0)} \left(\kappa_0 \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial z} \right) \quad \text{при } y = 0. \quad (29)$$

Так как при больших $|z|$ функция $\Phi^{(1)}(z) - \Omega^{(1)}(z) = 0$, то общее решение краевой задачи (27) будет

$$\Phi^{(1)}(z) - \Omega^{(1)}(z) = 0.$$

Общее решение краевой задачи (26), исчезающее на бесконечности и ограниченное на концах a_1 и b_1 , будет

$$\Phi^{(1)}(z) = \Omega^{(1)}(z) = \frac{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)}(t-z)}. \quad (30)$$

Размеры зоны предразрушения в первом приближении определяются из условия разрешимости краевой задачи (26):

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)}} = 0; \quad \int_{a_1}^{b_1} \frac{t f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)}} = 0. \quad (31)$$

Как и в нулевом приближении, решение в первом приближении получено в замкнутом виде.

Для определения распределения напряжений и размеров зон предразрушения необходимо задать закон изменения толщины в полосе. Функцию $h(x, y)$ разложим в ряд Тейлора в начале координат и в этом разложении ограничимся двумя членами разложения, т. е.

$$h(x, y) = h_0 [1 + e(a_0^* x + b_0^* y)], \quad (32)$$

где $2h_0$ – толщина полосы в начале координат, a_0^* и b_0^* – некоторые коэффициенты.

Тогда выражения для составляющих объемной силы в первом приближении примут вид:

$$X_1 = a_0^* N_x^{(0)} + b_0^* N_{xy}^{(0)}; \quad Y_1 = a_0^* N_{xy}^{(0)} + b_0^* N_y^{(0)}. \quad (33)$$

С помощью формул

$$\frac{N_x^{(0)} + N_y^{(0)}}{2h_0} = 4 \operatorname{Re} \Phi^{(0)}(z); \quad \frac{N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}}{2h_0} = \Phi^{(0)}(z) + \Omega^{(0)}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi^{(0)'(z)}}$$

находятся компоненты напряжений $N_x^{(0)}$, $N_y^{(0)}$, $N_{xy}^{(0)}$.

Затем по формулам (33) определяем функцию $F = X_1 + iY_1$.

С помощью интегрирования уравнений (25) имеем:

$$F_1(z, \bar{z}) = \int dz \int \bar{z} F(z, \bar{z}) d\bar{z}; \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int dz \int \bar{z} \overline{F(z, \bar{z})} dz.$$

По найденным функциям $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$, согласно (29), находим функцию $f_0(x)$. Затем по полученным формулам (30), (31) находим решение в первом приближении.

Окончательно, получаем

$$N_y = N_y^{(0)} + eN_y^{(1)}; \quad N_x = N_x^{(0)} + eN_x^{(1)}; \quad N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + eN_{xy}^{(1)}$$

$$u = u_0 + eu_1; \quad v = v_0 + ev_1; \quad a = a_0 + ea_1; \quad b = b_0 + eb_1.$$

Для определения предельного состояния полосы (балки), при котором происходит появление трещины, используем критерий критического раскрытия берегов полосы предразрушения. Согласно этому критерию, зарождение трещины произойдет как только ее раскрытие достигнет предельного (для данного материала при заданных условиях) значения d_c :

$$2u_* = d_c. \quad (34)$$

Здесь $2u_*$ – расстояние между противоположными берегами зоны предразрушения.

Используя решения упругопластической задачи, вычислим смещения u на пластической линии скольжения (при $y = 0$, $a \leq x \leq b$)

$$u_0 = \frac{1 + \kappa_0}{4\mu m} \int_{a_0}^{b_0} \frac{[s_s + f_*(t)] F_2^0(t, x) dt}{X_0(t)}; \quad (35)$$

$$u_1 = \frac{1 + \kappa_0}{4\mu m} \int_{a_1}^{b_1} \frac{[f_0(t) - \bar{h}(t, 0) s_s] F_2^1(t, x) dt}{X_1(t)} \quad (36)$$

Здесь $f_*(t) = \Phi_0(t) + \Omega_0(\bar{t}) + (t - \bar{t})\Phi_0'(t)$; $X_1(t) = \sqrt{(b_1 - t)(t - a_1)}$;

$$X_0(t) = \sqrt{(b_0 - t)(t - a_0)}; \quad F_2^0(t, x) = X_0(x) + \frac{1}{2} X_0(t) \ln \frac{X_0(t) - X_0(x)}{X_0(t) + X_0(x)};$$

$$F_2^1(t, x) = X_1(x) + \frac{1}{2} X_1(t) \ln \frac{X_1(t) - X_1(x)}{X_1(t) + X_1(x)}.$$

Для определения критических внешних нагрузок, вызывающих появление трещины в полосе (балке), получаем следующее уравнение:

$$\frac{4}{\rho E} \int_{a_0}^{b_0} \frac{[s_s + f_*(t)] F_2^0(t, x) dt}{X_0(t)} + \frac{4e}{\rho E} \int_{a_1}^{b_1} \frac{[f_0(t) - \bar{h}(t, 0) s_s] F_2^1(t, x) dt}{X_1(t)} = d_c. \quad (37)$$

Очевидно, что разрыв межчастичных связей материала будет происходить в средней части зоны предразрушения. Уравнение (37) дает возможность (при заданных характеристиках материала) найти критическую внешнюю нагрузку, при которой происходит зарождение трещины в полосе (балке) переменной толщины.

Преобразуем уравнение (37) к виду, удобному для численного решения. Переходя к безразмерным переменным в интегралах и заменяя интегралы квадратурными формулами типа Гаусса по чебышевским узлам, уравнение (37) приведем к следующему виду

$$\frac{4}{EM} \sum_{m=1}^M [s_s + f_*(t_m^0)] F_2^0(t_m^0, x) + \frac{4e}{EM} \sum_{m=1}^M [f_0(t_m) - \bar{h}(t_m, 0) s_s] F_2^1(t_m, x) = d_c \quad (38)$$

Здесь $a \leq x \leq b$; $t_m^0 = \frac{b_0 + a_0}{2} + \frac{b_0 - a_0}{2} t_m$; $t_m = \frac{b_1 + a_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} t_m$;
 $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} p$, ($m = 1, 2, \dots, M$).

Преобразуем также систему уравнений (31), служащую для определения неизвестных параметров a_1 и b_1 :

$$\frac{p}{M} \sum_{m=1}^M f_1(t_m) = 0; \quad \frac{p}{M} \sum_{m=1}^M t_m f_1(t_m) = 0. \quad (39)$$

Система уравнений (19) (последние два уравнения, служащие для определения параметров a_0 и b_0), (39) и (38) при выбранном значении x ($x = 0$) и известном законе изменения толщины полосы (балки) решается численно методом итераций.

На рис. 2 представлен график зависимости длины полосы предразрушения от безразмерной нагрузки s_0/s_s для балки при чистом изгибе с толщиной, изменяющейся по закону (32). В расчетах было принято $\nu = 0,3$; $M = 30$. На рис. 3 приводится зависимость безразмерной предельной нагрузки $M_* = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{M}{h_0 c^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{E S_s d_c}}$ от относительной толщины полосы

h_1/h_0 , полученная в результате совместного решения уравнений (19), (39) и (38) при тех же значениях свободных параметров.

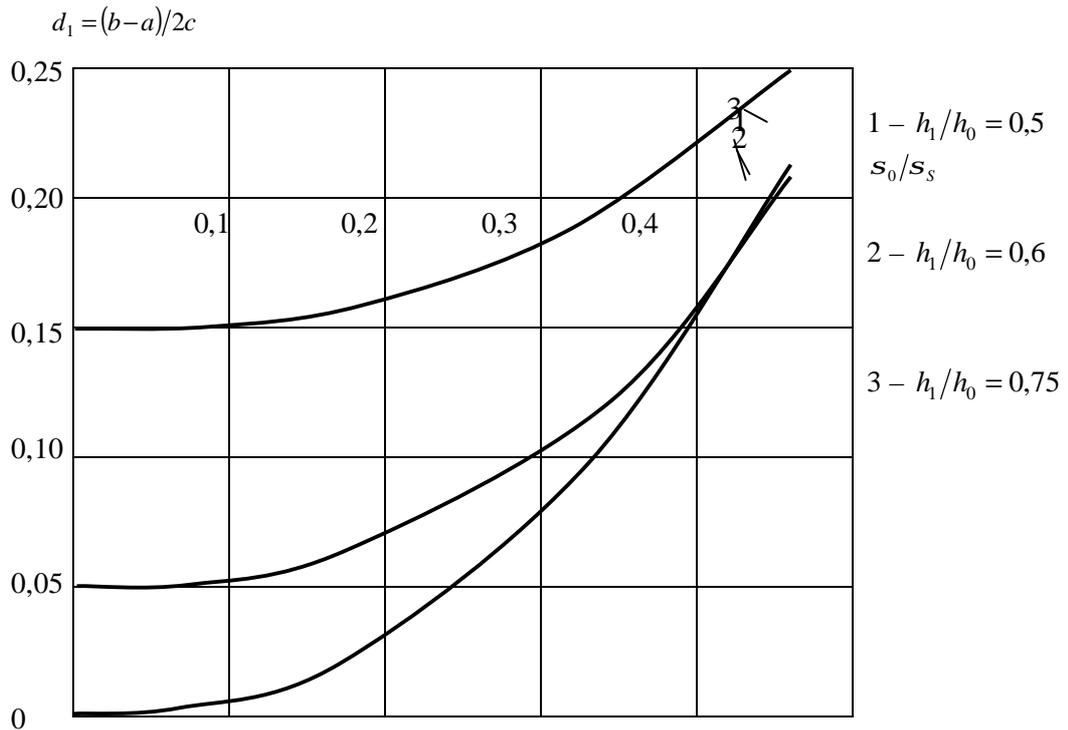


Рис. 2. Зависимости длины полосы предразрушения от безразмерной нагрузки S_0/S_S для балки при чистом изгибе

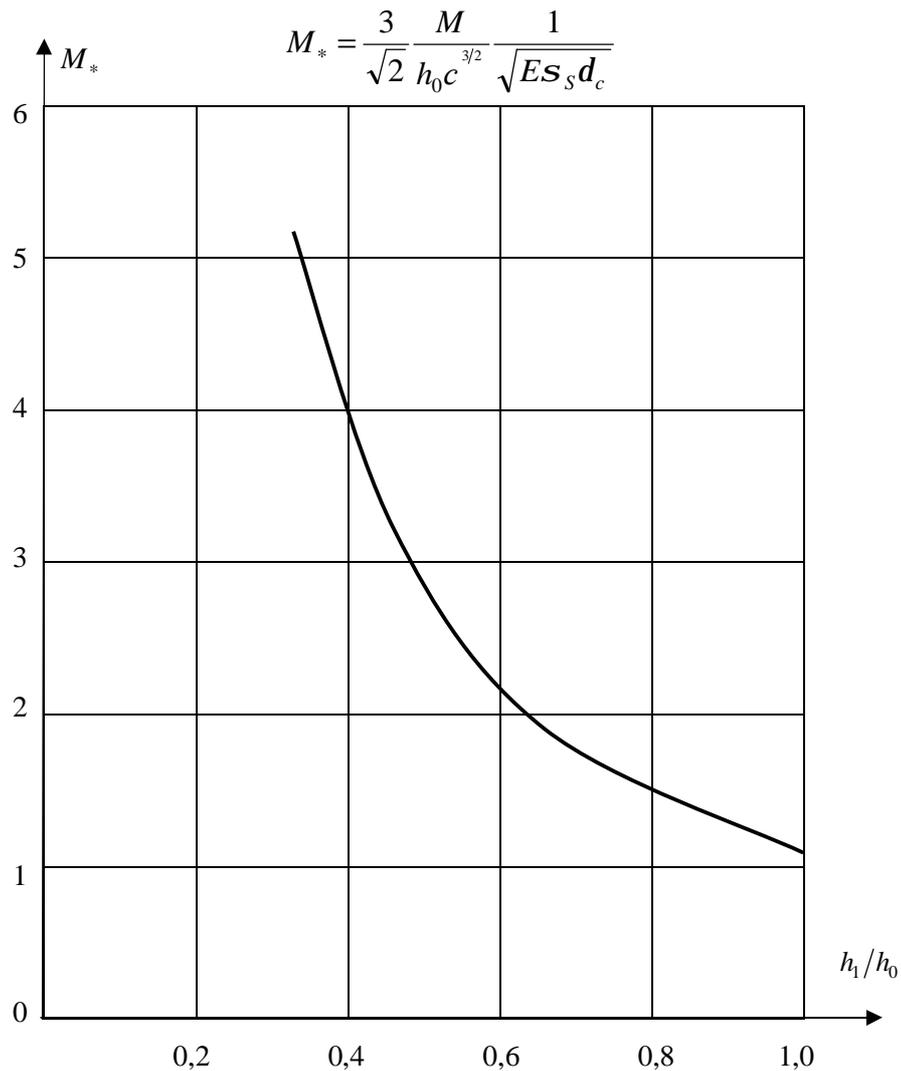


Рис. 3. Зависимость безразмерной предельной нагрузки M_* от относительной толщины полосы h_1/h_0

ЛИТЕРАТУРА

1. Витвицкий, П. М. Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения: Обзор / П. М. Витвицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–19.
2. Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2002. – Т. 2. – 448 с.
3. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
4. Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
5. Мирсалимов, В. М. Разрушение пластин переменной толщины / В. М. Мирсалимов // ФХММ. – 1996. – Т. 32. – № 3. – С. 46–54.
6. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
7. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : Мир, 1969. – Т. 2 – 864 с.
8. Панасюк, В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1991. – 416 с.
9. Угодчиков, А. Г. К решению плоской задачи теории упругости при произвольных объемных силах / А. Г. Угодчиков // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3. – № 7.