ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

Налимов А. В., Немировский Ю. В.

ТЕОРЕМЫ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

(Бийский технологический институт,
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН)

Задачи жесткопластического тела описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Решения таких задач удается построить только в частных случаях [6, 24], поэтому обычно на основе теорем предельного равновесия строят приближенные решения. Эти теоремы впервые были доказаны А. А. Гвоздевым [2] и позднее в [4, 9].

Большая часть исследований предельного равновесия жесткопластических тел посвящена тонкостенным конструкциям [3, 22, 29]. С целью исключения малых параметров (отношений толщины к радиусам кривизны) обычно принимают справедливость гипотез Кирхгофа–Лява [26]. Это позволяет понизить размерность задачи, а разрешающие уравнения формулируются в обобщенных напряжениях и скоростях [20].

Для задач предельного равновесия оболочек, сформулированных в обобщенных напряжениях и скоростях, обычно распространяют общие теоремы предельного равновесия и принимают справедливость ассоциированного закона течения для приближенных поверхностей [3, 22, 29]. Здесь следует отметить, что, как правило [23, 25, 27], решение задач предельного равновесия оболочек удается построить только при наличии ограничений. Такие ограниченные решения построены для точных [21] и приближенных [28] поверхностей текучести. Все эти решения были получены при наличии допустимых разрывов обобщенных скоростей [7, 17].Для цилиндрических оболочек однородного строения только в работе [1] были построены решения без каких-либо ограничений. Более того, в работе [1] показано, что для одной и той же задачи при реализации пластического течения во всем пролете оболочки наряду с непрерывными решениями существуют решения с разрывными обобщенными скоростями. Для оболочек вращения также удается построить решения, соответствующие реализации разных механизмов пластического течения [15]. Это возможно, поскольку полные системы уравнений для таких задач формулируются на одной из пластических областей [16], а в жестких областях всегда можно построить допустимые поля обобщенных величин [14]. Подобные ситуации при решении задач предельного равновесия, сформулированных в обобщенных величинах, возникали и раньше. Ю. Н. Работнов [20] истинное значение коэффициента запаса связывает с величиной, когда впервые конструкция приобретает дополнительные степени свободы.

Общие теоремы предельного равновесия оболочек не дают инструментов для выбора истинного из всех возможных решений. По всей видимости, в таких ситуациях эти теоремы имеют локальный характер, а именно они выполняются для каждого фиксированного механизма течения. Поскольку для задач, сформулированных в напряжениях и скоростях, эти теоремы однозначно определяют отношения точного и приближенных решений, а для задач в пространстве обобщенных величин это не так, то необходимо пересмотреть доказательства теорем с учетом особенностей процесса преобразования уравнений из пространства напряжений и скоростей в пространство соответствующих обобщенных величин. Это тем более важно, что возможные недочеты при формальном переносе условий теорем на такие задачи и построение внешне непротиворечивых решений являются почвой для формирования мнения о некорректности модели жесткопластического тела [18].

В работе доказываются теоремы предельного равновесия для осесимметричных оболочек с учетом преобразований соотношений из пространства напряжений и скоростей в соответствующие соотношения в пространство обобщенных величин. Доказано, что общие теоремы имеют локальный характер, а также справедливость предположения Ю. Н. Работнова и ассоциированного закона течения для приближенных поверхностей текучести. Показано, что путем выбора специального вида приближенных поверхностей текучести можно строить приближенные непрерывные решения задач предельного равновесия оболочек.

Пусть в теле, занимающем объем ω с границей $\partial\omega = \partial\omega_\sigma + \partial\omega_u + \partial\omega_{\sigma u}$ (на $\partial\omega_\sigma$ заданы напряжения; $\partial\omega_u$ – скорости перемещений и на $\partial\omega_{\sigma u}$ – напряжения и скорости перемещений), определено поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, удовлетворяющее уравнениям равновесия

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\beta = 0 \tag{1}$$

и некоторое поле скоростей перемещений $\dot{\mathbf{u}}$, которому соответствуют скорости деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha}\right). \tag{2}$$

Напряжения и скорости перемещений могут иметь разрывы, не противоречащие уравнениям равновесия (1) и условиям сплошности среды. Тогда уравнение скорости виртуальных работ записывается в виде [5]:

$$\int_\omega \boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,d\omega + \sum_\mu \int_{S_\mu} \sigma_{\alpha\beta} n_\beta \left[\dot{u}_\alpha\right] dS = \int_\omega \mathbf{f}\,\dot{\mathbf{u}}\,d\omega + \int_{\partial\omega} \mathbf{p}\,\dot{\mathbf{u}}\,dS, \tag{3}$$

где $S_\mu \subseteq \omega$ поверхности разрыва скоростей перемещений, $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности S_μ, $[\dot{\mathbf{u}}]$ – величина разрыва вектора скоростей перемещений, $\mathbf{f}$, $\mathbf{p}$ – плотности массовых и поверхностных сил. Уравнение (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (1)–(2) [7].

Напряжения всюду в теле ограничены кусочно-гладким условием пластичности:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \bigcup_k \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{f}_k(\mathrm{s}) = 0$ – гладкие функции, образующие условие пластичности.

В основе механики жесткопластического тела лежит принцип максимума Мизеса [7]: при любом данном значении скоростей деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ имеет место неравенство

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \ge \boldsymbol{\sigma}^*\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – действительные напряжения, соответствующие данным скоростям $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\boldsymbol{\sigma}^*$ – любые возможные напряжения, не превышающие предела пластичности $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \le 0$.

В соответствии с принципом Мизеса в каждой точке тела скорость диссипации энергии $D = \boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ достигает максимального значения. Учитывая связи, выраженные условиями пластичности, составляется выражение [7]:

$$D = \boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda_k \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}), \tag{6}$$

где $\lambda_k = \lambda_k(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ – неопределенные множители, постоянные для данных значений компонент скорости деформаций.

При варьировании в выражении (6) компоненты напряженного состояния, экстремум скорости диссипации D будет иметь место, если [7]

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \lambda_k \frac{\partial \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}. \tag{7}$$

Условие положительности скорости диссипации энергии записывается в виде неравенств, накладываемых на множители λ_k [7]:

$$\begin{aligned} &\lambda_k \geq 0 \text{ если } \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \text{ и } \quad d\mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) = 0; \\ &\lambda_k = 0 \text{ если } \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \text{ или } d\mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Соотношения (7) связывают скорости деформаций с напряжениями и определяют ассоциированный закон течения.

В соответствии с (7)–(8) скорость диссипации D является однородной функцией первой степени скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и определяется с точностью до постоянного множителя [20]. Обычно поверхность постоянной мощности диссипации нормируют, например, полагают [20]: $D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 1$. Если поверхность текучести всюду невогнутая, то и поверхность равного уровня скорости диссипации невогнутая. Из условия невогнутости поверхности постоянной диссипации следует неравенство [20]:

$$\boldsymbol{\sigma}^0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \geq \boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0, \tag{9}$$

где $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ – произвольное кинематически допустимое поле скоростей деформаций такое, что $D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0) = 1$, а $\boldsymbol{\sigma}^0$ – соответствующее поле напряжений; σ – заданное напряженное состояние.

Для тонкостенных оболочек вращения при гипотезах Кирхгофа–Лява скорости деформаций (2) в криволинейной системе координат (s, φ, γ) записываются в виде [26]:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \dot{\varepsilon}_{0\alpha} + 2\zeta\dot{\kappa}_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_{01} = \frac{d\dot{u}}{ds} + \frac{\dot{w}}{R_1}; \quad \dot{\kappa}_1 = -\frac{h}{2}\frac{d\dot{\vartheta}}{ds}; \quad \dot{\varepsilon}_{02} = \frac{(\dot{w}\cos\xi - \dot{u}\sin\xi)}{R}; \\ &\dot{\kappa}_2 = \frac{h}{2}\frac{\sin\xi}{R}\dot{\vartheta}; \quad \dot{\vartheta} = \frac{d\dot{w}}{ds} - \frac{\dot{u}}{R_1}; \end{aligned} \tag{11}$$

$\dot{\varepsilon}_{0\alpha}, \dot{\kappa}_{\alpha}$ – скорости деформации и изменения кривизны срединной поверхности вдоль меридиана и в тангенциальном направлениях; $\dot{u}, \dot{w}$ – скорости перемещения вдоль меридиана и нормали к срединной поверхности Σ; $s \in [s_1, s_2]$ – координата, отсчитываемая вдоль меридиана; R_i $(i = 1, 2)$ – главные радиусы кривизны; $R = R_2\cos\xi$ – расстояние от оси Z до Σ; $2h$ $(h/R_j = 1)$ – толщина оболочки; $\gamma = \zeta \cdot h$ $(\gamma \in [-h, h])$ координата, направленная по внешней нормали к срединной поверхности; ξ – угол между касательной к образующей и осью вращения Z оболочки; $dR = -\sin\xi ds$; $R_1 d\xi = ds$; $dZ = \cos\xi ds$.

Уравнения равновесия (1) с учетом (10)–(11) преобразуются к виду [26]:

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{ds} = \bar{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{Q}, N, s)\ s \in [s_0, s_1], \tag{12}$$

где

$$\bar{\mathbf{\Omega}} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)'; \ \bar{\mathbf{Q}} = (t_1, N, m_1)'; \ \mathbf{Q} = (t_1, t_2, m_1, m_2)';$$

$$\Omega_1 = \frac{\sin\xi}{R}(t_1 - t_2) - \frac{N}{R_1} - E_1; \ \Omega_2 = \frac{\sin\xi}{R}N + \left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2}\right) - E_n;$$

$$\Omega_3 = \frac{\sin\xi}{R}(m_1 - m_2) + \frac{2}{h}N;$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_1, \tilde{E}_n, 0)'; \ E_\alpha = \tilde{E}_\alpha / T_0 \ (\alpha = 1, n); \ \tilde{E}_\alpha = p_\alpha^+ + p_\alpha^- + \int_{-h}^{h} f_\alpha \, d\gamma;$$

$$t_j = \frac{1}{T_0}\int_{-h}^{h}\sigma_{jj} d\gamma; \ N = \frac{1}{T_0}\int_{-h}^{h}\sigma_{13} d\gamma; \quad m_j = \frac{2}{T_0 h}\int_{-h}^{h}\sigma_{jj}\gamma d\gamma; \ T_0 = 2\sigma_o h;$$

σ_0 –константа размерности напряжений; $p_1^\pm$, $p_n^\pm$ – касательная и нормальная нагрузки на внешней и внутренней поверхностях оболочки; f_1, f_n – объемные силы, действующие в направлении меридиана и нормали соответственно.

Подставим (10) в (3) и после интегрирования по координате γ с учетом принятых обозначений получим [26]:

$$\int_\Sigma \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}\, R_1 R\, ds\, d\varphi + \int_{\Phi_\mu} \bar{\mathbf{Q}}[\mathbf{U}]\, R\, d\varphi = \int_\Sigma \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{U}\, R_1 R\, ds\, d\varphi + (-1)^i \int_{\Gamma_i} \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{U}\, R\, d\varphi, \tag{13}$$

где $\dot{\mathbf{q}} = (\dot\varepsilon_{01}, \dot\varepsilon_{02}, \dot\kappa_1, \dot\kappa_2)'$; $\mathbf{U} = \left(\dot u, \dot w, -\frac{h}{2}\dot\vartheta\right)'$; $[\dot v] = 0$; $\varphi \in [0, 2\pi]$ – угол, определяющий меридиан поверхности вращения; $\Gamma_i\ (i = 1, 2)$ – граничные параллельные окружности; Φ_μ – линии разрыва обобщенных скоростей $\mathbf{U}$.

Первое слагаемое в левой части уравнения (13) представляет скорость диссипации механической энергии $\mathbf{D}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}})$ в теле при пластическом деформировании, второе – скорость диссипации энергии $\mathbf{T}(\mathbf{Q}, [\mathbf{U}])$ на линиях разрыва Φ_μ, а выражение в правой части (13) есть скорость изменения работы всех внешних сил $\mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U})$, где $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}, \mathbf{f}\}$ система нагрузок.

Условие пластического течения (4) в пространстве обобщенных напряжений $\mathbf{Q}$ представляет собой замкнутую невогнутую поверхность [13]

$$F(\mathbf{Q}, s) = 0, \tag{14}$$

образованную гиперповерхностями типа:

$$F_k(\mathbf{Q}, s) = 0 \ \left(k = \overline{1, L}\right). \tag{15}$$

Пусть $\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}$ – действительное распределение обобщенных напряжений и скоростей деформаций, $\mathbf{Q}^*$ – статически допустимые обобщенные напряжения, $\dot{\mathbf{q}}^0$ – кинематически допустимое поле скоростей и $\mathbf{Q}^0$ – соответствующее поле обобщенных напряжений. Подставим (10) в (5), (9) и после интегрирования получим:

$$\mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \ge \mathbf{Q}^*\dot{\boldsymbol{\varepsilon}};\quad \mathbf{Q}^0\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \ge \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0. \tag{16}$$

При реализации пластического течения вектор скоростей деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ортогонален поверхности текучести (14), а в угловых точках может принимать произвольное направление между нормалями к смежным гиперповерхностям [13]. Обобщенные напряжения $\mathbf{Q}$ и скорости деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ связаны ассоциированным законом течения:

$$\dot{\varepsilon}_i = \lambda_k \frac{\partial F_k\left(\mathbf{Q}, s\right)}{\partial Q_i}, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} &\lambda_k \ge 0 \text{ если } F_k = 0 \text{ и } \quad dF_k = 0;\\ &\lambda_k = 0 \text{ если } F_k < 0 \text{ или } dF_k = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Поскольку обобщенные напряжения не могут выходить за пределы поверхности текучести (14), то внешние силы, действующие на оболочку, не могут возрастать неограниченно. Пусть n_F коэффициент запаса такой, что нагрузка $n_F\mathbf{P}$ является предельной и обеспечивает появление в оболочке дополнительных степеней свободы и характеризуется одним из возможных механизмов течения. Этот механизм течения характеризуется выполнением пластического течения в некоторой части оболочки $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и реализацией на фиксированных поверхностях $\Phi_\nu \in \Sigma_0$ разрывов обобщенных скоростей $\mathbf{U}$. За пределами области пластического течения обобщенные напряжения $\mathbf{Q}$ удовлетворяют условию $F(\mathbf{Q}, s) \le 0$, а обобщенные скорости равны нулю с точностью до перемещений оболочки как жесткого целого [14,16].

При реализации этого заданного механизма течения, аналогично [7,20], определим статический и кинематический множители $n_F^*,\ n_F^0$. Отношения коэффициента запаса n_F, статически n_F^* и кинематически n_F^0 допустимых множителей определяются следующими теоремами.

Теорема I. *При заданном механизме течения коэффициент запаса* n_F *является наибольшим статически допустимым множителем* $n_F \ge n_F^*$.

Доказательство.

Пусть $\mathbf{Q}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{U}$ – действительное единственное при заданном механизме течения распределение обобщенных напряжений и скоростей, соответствующее предельным нагрузкам $n_F\mathbf{P}$, а $\mathbf{Q}^*$ – статически допустимое поле обобщенных напряжений, соответствующее системе нагрузок $n_F^*\mathbf{P}$.

Составим уравнения скоростей виртуальных работ для истинного и допустимого состояния, где в качестве виртуальных скоростей примем истинные значения

$$\mathbf{D}\left(\mathbf{Q}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) + \mathbf{T}\left(\mathbf{Q}, [\mathbf{U}]\right) = n_F \mathbf{N}\left(\mathbf{P}, \mathbf{U}\right);\ \mathbf{D}\left(\mathbf{Q}^*, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) + \mathbf{T}\left(\mathbf{Q}^*, [\mathbf{U}]\right) = n_F^* \mathbf{N}\left(\mathbf{P}, \mathbf{U}\right). \tag{19}$$

Вычитая второе уравнение (19) из первого в соответствии с (16) получим:

$$\left(n_F - n_F^*\right) \times \mathbf{N}\left(\mathbf{P}, \mathbf{U}\right) \ge \mathbf{T}\left(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*, [\mathbf{U}]\right). \tag{20}$$

Скорость работы внешних сил $\mathbf{N}(\mathbf{P},\mathbf{U})$ всегда положительна и для заданного механизма течения приращение скорости диссипации энергии на фиксированных поверхностях разрыва неотрицательно $\mathbf{T}\left(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^{*},[\mathbf{U}]\right)\geq 0$ или

$$\int\limits_{\Phi_{v}}\left\{\left(t_1-t_1^{*}\right)[\dot{u}]-\frac{h}{2}\left(m_1-m_1^{*}\right)\left[\dot{\vartheta}\right]\right\}R\,d\varphi\geq 0. \tag{21}$$

Таким образом, из (20) следует:

$$n_F\geq n_F^{*}. \tag{22}$$

Теорема II. *При заданном механизме течения кинематически допустимый множитель* n_F^0 *не ниже коэффициента запаса* $n_F\leq n_F^0$.

Доказательство.

Пусть $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0,\mathbf{U}^0$ – кинематически допустимое поле обобщенных скоростей деформаций и перемещений, а $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^0$ – действительное и соответствующее скоростям $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ поле обобщенных напряжений. В общем случае напряжения $\mathbf{Q}^0$ не удовлетворяют уравнениям равновесия (12).

В соответствии с принципом виртуальных работ (13) имеет место:

$$\mathbf{D}\left(\mathbf{Q}^0,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0\right)+\mathbf{T}\left(\mathbf{Q}^0,\left[\mathbf{U}^0\right]\right)=n_F^0\mathbf{N}\left(\mathbf{P},\mathbf{U}^0\right);\quad \mathbf{D}\left(\mathbf{Q},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0\right)+\mathbf{T}\left(\mathbf{Q},\left[\mathbf{U}^0\right]\right)=n_F\mathbf{N}\left(\mathbf{P},\mathbf{U}^0\right). \tag{23}$$

Вычитая из первого равенства (23) второе, учитывая (16), получим:

$$\left(n_F^0-n_F\right)\times\mathbf{N}\left(\mathbf{P},\mathbf{U}^0\right)\geq\mathbf{T}\left(\mathbf{Q}^0-\mathbf{Q},\left[\mathbf{U}^0\right]\right). \tag{24}$$

Скорость работы внешних сил $\mathbf{N}\left(\mathbf{P},\mathbf{U}^0\right)$ положительна, а при заданном механизме течения величина мощности пластического формоизменения на фиксированных поверхностях разрыва неотрицательна $\mathbf{T}\left(\mathbf{Q}^0-\mathbf{Q},\left[\mathbf{U}^0\right]\right)\geq 0$ или

$$\int\limits_{\Phi_{v}}\left\{\left(t_1^0-t_1\right)\left[\dot{u}^0\right]-\frac{h}{2}\left(m_1^0-m_1\right)\left[\dot{\vartheta}^0\right]\right\}R\,d\varphi\geq 0. \tag{25}$$

Таким образом, из (24) при заданном механизме течения, следует неравенство:

$$n_F^0\geq n_F. \tag{26}$$

Замечание.

Наличие различных механизмов течения оболочки обозначает, что существует несколько решений задачи предельного равновесия. Можно доказать утверждение Ю. Н. Работнова [20] и показать, что истинным является механизм, доставляющий наименьшее значение коэффициента запаса.

Кинематически допустимый множитель n_F^0 *не ниже наименьшего коэффициента запаса* $n_F\leq n_F^0$, *обеспечивающего реализацию в оболочке дополнительных степеней свободы.*

Пусть в оболочке может реализоваться два различных механизма. Для каждого из этих механизмов коэффициенту запаса $n_F^{(\kappa)}$ соответствуют поля обобщенных скоростей $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\kappa)},\mathbf{U}^{(\kappa)}$ и напряжений $\mathbf{Q}^{(\kappa)}$.

Предположим, что истинным является первый механизм и $n_F^{(1)} > n_F^{(2)}$. Тогда $\dot{\mathbf{q}}^{(2)}, \mathbf{U}^{(2)}$ есть кинематически допустимые поля скоростей, а $\mathbf{Q}^{(2)}$ – соответствующее поле напряжений. Согласно (16) и (23) в данном случае имеем: $\mathbf{Q}^{(2)}\dot{\mathbf{q}}^{(2)} \geq \mathbf{Q}^{(1)}\dot{\mathbf{q}}^{(2)}$;

$$\mathbf{D}\left(\mathbf{Q}^{(2)}, \dot{\mathbf{q}}^{(2)}\right) + \mathbf{T}\left(\mathbf{Q}^{(2)}, \left[\mathbf{U}^{(2)}\right]\right) = n_F^{(2)}\mathbf{N}\left(\mathbf{P}, \mathbf{U}^{(2)}\right);$$

$$\mathbf{D}\left(\mathbf{Q}^{(1)}, \dot{\mathbf{q}}^{(2)}\right) + \mathbf{T}\left(\mathbf{Q}^{(1)}, \left[\mathbf{U}^{(2)}\right]\right) = n_F^{(1)}\mathbf{N}\left(\mathbf{P}, \mathbf{U}^{(2)}\right).$$

В соответствии с теоремой II в этом случае имеем $n_F^{(2)} \geq n_F^{(1)}$, что противоречит принятым предположениям.

Таким образом, истинным является механизм, доставляющий минимальное значение коэффициента запаса. Или истинным коэффициентом запаса является такое значение, когда оболочка впервые приобретает дополнительные степени свободы [20].

Следствие А. *Если для оболочек из материалов с поверхностями текучести* $F^{(\pm)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ *при действии предельных нагрузок действительные механизмы течения совпадают, то коэффициент запаса* $n_F^{(+)}$ *для оболочки из материала с внешней поверхностью текучести* $F^{(+)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ *не меньше коэффициента запаса* $n_F^{(-)}$ *для оболочки из материала с вписанной* $F^{(-)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ *поверхностью текучести.*

Рассмотрим две оболочки из материалов с поверхностями текучести $F^{(\pm)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ и обозначим символом $\Sigma_F^{(\pm)}$ $\left(\Sigma_F^{(+)} \supseteq \Sigma_F^{(-)}\right)$ множества всех статически допустимых полей обобщенных напряжений. Каждому из элементов множества $\Sigma_F^{(\pm)}$ соответствуют статически допустимый множитель $n^*_{F^{(\pm)}}$. Согласно первой теореме предельного равновесия при заданных механизмах течения для этих оболочек имеем:

$$n_F^{(\pm)} = \sup_{\mathbf{Q}^* \in \Sigma_F^{(\pm)}} \left(n^*_{F^{(\pm)}}\right).$$

Если для обеих оболочек действительные механизмы течения совпадают, то имеет место:

$$n_F^{(+)} \geq n_F^{(-)}.$$

Здесь важным является совпадение механизмов течения. В частности, в [11] построены решения для точной и приближенных поверхностей при реализации различных механизмов течения, где коэффициент запаса для внешней поверхности меньше точного значения.

Следствие В. *Если к части оболочки, ограниченной параллельными окружностями* Γ_i*, добавить материал и действительный механизм течения не изменится, то предельная нагрузка не может понизиться.*

Если к оболочке добавить материал, то поверхность текучести $F^{(+)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ для этой оболочки будет внешней по отношению к исходной поверхности текучести $F(\mathbf{Q}, s) = 0$ [11,13]. Согласно следствию А, имеет место:

$$n_F^{(+)} \geq n_F.$$

Следствие С. *Если от части оболочки, ограниченной параллельными окружностями* Γ_i, *удалить часть материала, то при неизменном действительном механизме течения предельная нагрузка не может увеличиться.*

Утверждение следует из предыдущего.

Следствие D. *Увеличение предела текучести в некоторых частях оболочки при неизменном действительном механизме течения не может понизить предельную нагрузку* $n_F \mathbf{P}$.

Утверждение следует из следствия А.

Следствие Е. *Уменьшение предела текучести в некоторых частях оболочки при неизменном действительном механизме течения не может увеличить предельную нагрузку* $n_F \mathbf{P}$.

Утверждение следует из следствия А.

Теорема единственности. *Для строго выпуклых условий текучести при заданном механизме течения и действии предельных нагрузок распределение обобщенных напряжений* $\mathbf{Q}$ *единственно в областях, где скорости* $\dot{\mathbf{q}}$ *отличны от нуля.*

Доказательство.

Пусть имеют место два различных решения $\mathbf{Q}^{(1)}, \dot{\mathbf{q}}^{(1)}, \mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{Q}^{(2)}, \dot{\mathbf{q}}^{(2)}, \mathbf{U}^{(2)}$ одной и той же задачи. Тогда разность $\left(\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\right)$ удовлетворяет уравнениям равновесия (12), а обобщенные скорости $\left(\dot{\mathbf{q}}^{(1)} - \dot{\mathbf{q}}^{(2)}\right)$ соответствуют по формулам (11) скоростям перемещений $\left(\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(2)}\right)$. Используя уравнение скорости виртуальных работ (13), будем иметь:

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}\left(\left(\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\right), \left(\dot{\mathbf{q}}^{(1)} - \dot{\mathbf{q}}^{(2)}\right)\right) + \mathbf{T}\left(\left(\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\right), \left[\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(2)}\right]\right) = \\ &= \mathbf{N}\left(\left(\mathbf{P}^{(1)} - \mathbf{P}^{(2)}\right), \left(\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(2)}\right)\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Поскольку на поверхности Σ выполняется равенство $\left(\dot{\mathbf{E}}^{(1)} - \dot{\mathbf{E}}^{(2)}\right) = 0$, а на краях оболочки Γ_j на ортогональных направлениях заданы обобщенные напряжения $\bar{\mathbf{Q}}$ или нулевые скорости $\mathbf{U}$ [22, 26, 29], то выражение в правой части (27) равно нулю. Из первого слагаемого левой части уравнения (27) для строго выпуклых поверхностей получим (16)

$$\mathbf{D}\left(\left(\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\right), \left(\dot{\mathbf{q}}^{(1)} - \dot{\mathbf{q}}^{(2)}\right)\right) = \mathbf{D}\left(\left(\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\right), \dot{\mathbf{q}}^{(1)}\right) + \mathbf{D}\left(\left(\mathbf{Q}^{(2)} - \mathbf{Q}^{(1)}\right), \dot{\mathbf{q}}^{(2)}\right) > 0, \tag{28}$$

второе слагаемое (27) при заданном механизме течения также неотрицательно

$$\mathbf{T}\left(\left(\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\right), \left[\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(2)}\right]\right) \geq 0. \tag{29}$$

Следовательно, правая часть равенства (27) положительна. Из полученного противоречия следует, что решения $\mathbf{Q}^{(1)}, \dot{\mathbf{q}}^{(1)}, \mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{Q}^{(2)}, \dot{\mathbf{q}}^{(2)}, \mathbf{U}^{(2)}$ совпадают.

В случае невогнутых поверхностей знак строго неравенства в (28) нужно заменить на больше или равно. В этом случае обобщенные напряжения $\mathbf{Q}^{(1)}$ è $\mathbf{Q}^{(2)}$ могут отличаться на вектор, лежащий на соответствующем участке невогнутости поверхности текучести [7].

Теорема доказана.

Замечание.

В оболочках различным механизмам течения соответствуют разные краевые задачи [16]. Приведенные выше теоремы справедливы для каждой из таких задач. Истинное решение определяется действительным механизмом течения. Этот механизм, а следовательно и соответствующее решение, можно определить в соответствии с [20], где принимается, что истинным механизмом течения из всех возможных является механизм, обеспечивающий наименьшее значение предельных нагрузок.

Существенным ограничением применимости изложенных теорем является выполнение условий (20), (24), (29).

Это ограничение состоит из двух частей:

– формулировки краевых условий для действительного механизма течения;

– фиксирование схемы поверхностей разрывов $\Phi_\nu \subseteq \Sigma$.

Эти ограничения снимаются, если реализация линий разрывов (пластических шарниров) сопровождается выполнением гиперповерхностей, описываемых однородными функциями не менее второй степени [12]

$$F_k\left(t_1, m_1, s\right) = 0 \tag{30}$$

переменных t_1, m_1.

В оболочках вращения реализация пластических шарниров сопровождается выполнением условий [16]:

$$\frac{[\dot{\varepsilon}_{02}]}{[\dot{\chi}_2]} = \frac{\partial F_k\left(t_1, m_1, s\right)}{\partial t_1} \bigg/ \frac{\partial F_k\left(t_1, m_1, s\right)}{\partial m_1}.$$

Из последнего, (10) и равенства $t_1 \dfrac{\partial F_k}{\partial t_1} + m_1 \dfrac{\partial F_k}{\partial m_1} = \beta F_k$, $\beta \geq 2$ следует:

$$\mathbf{T}\left(\mathbf{Q}, [\mathbf{U}]\right) = 0 \tag{31}$$

или

$$\mathbf{T}\left(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*, [\mathbf{U}]\right) = 0;\ \mathbf{T}\left(\mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}, \left[\mathbf{U}^0\right]\right) = 0;\ \mathbf{T}\left(\left(\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\right), \left[\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(2)}\right]\right) = 0.$$

В этом случае, в оболочке скорость диссипации энергии на линиях разрыва Φ_μ равна нулю, решения непрерывные и механизм пластического течения распространяется на всю оболочку. Следовательно, действительный механизм определяется единственным способом, а теоремы предельного равновесия и единственности для оболочек аналогичны общим теоремам теории предельного равновесия [7].

При решении нерегулярных задач вводят штрафные функции [8] или искусственную вязкость [10], сглаживающие разрывные решения. Последовательность таких непрерывных решений строят так, что они асимптотически сходятся к решению, удовлетворяющему общим соотношениям, например, принципу виртуальных работ. Следует отметить, что введение элементов вязкости или штрафных функций часто делается формально, и модель жесткопластического тела подменяется другой, например, моделью вязкопластического тела. Это приводит к крайне трудоемким доказательствам, если они возможны, отношений асимптотически полученных решений и решений соответствующих задач жесткопластического тела [10].

В рамках жесткопластического тела сходящуюся последовательность приближенных гладких решений можно строить на основе аппроксимаций поверхности текучести, например [12], и гиперповерхностей (30) в виде однородных потенциалов. Но такой физически ясный подход требует обоснования. Дело в том, что в теории оболочек для приближенных поверхностей без доказательства принимается справедливость ассоциированного закона течения, например [25,28], где для приближенных поверхностей текучести удается построить только ограниченные решения.

Докажем сейчас, что в предельном состоянии ассоциированный закон течения выполняется для приближенных невогнутых поверхностей.

Теорема: *Пусть невогнутая кусочно-гладкая поверхность* $\tilde{F} = 0$ *является вписанной по отношению к точной поверхности текучести* $F = 0$. *Тогда для оболочки с поверхностью* $\tilde{F} = 0$ *максимальное значение коэффициента запаса* $n_{\tilde{F}}$ *с необходимостью достигается при заданном механизме течения и реализации таких статически допустимых напряжений, что соответствующее поле скоростей является кинематически допустимым.*

Доказательство.

Пусть n_F^* – коэффициент запаса, определенный на статически допустимом поле напряжений $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_F$ и $n_F = \max\limits_{\mathbf{Q}\in\Sigma_F}\left(n_F^*\right)$. Подмножество всех статически допустимых полей напряжений, не превосходящих поверхность $\tilde{F} = 0$, обозначим символом $\Sigma_{\tilde{F}}$.

Определим условия достижения максимального значения величины $n_{\tilde{F}} = \max\limits_{\mathbf{Q}\in\Sigma_{\tilde{F}}}\left(n_{\tilde{F}}^*\right)$ для оболочки с вписанной поверхностью $\tilde{F} = 0$. Для этой оболочки выполняются уравнения равновесия (12), краевые условия в напряжениях и предельные соотношения для обобщенных напряжений.

Обратим $\tilde{F}(\mathbf{Q}, s) = 0$ относительно m_2:

$$m_2 = \bar{F}\left(t_1, t_2, m_1, s\right). \tag{32}$$

Кусочно-гладкие поверхности $\tilde{F} = 0$, образованные гиперповерхностями $\tilde{F}_j = 0$ $\left(j = \overline{1,K}\right)$, представим в виде:

$$\tilde{F} = \tilde{\lambda}_j \tilde{F}_j, \tag{33}$$

где

$$\tilde{\lambda}_j \tilde{F}_j = 0,\ \sum_{i=1}^{K} \tilde{\lambda}_j = const \geq 0. \tag{34}$$

С учетом (33)–(34) равенство (32) можно записать следующим образом:

$$m_2 = \bar{\lambda}_j \bar{F}_j\left(t_1, t_2, m_1, s\right), \tag{35}$$

где

$$\tilde{\lambda}_j\left(m_2 - \bar{F}_j\right) = 0;\ \bar{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j / \tilde{\lambda}_k;\ \sum_{k=1}^{K} \bar{\lambda}_k = 1.$$

Подставляя (35) в (12), получим систему трех дифференциальных уравнений с неизвестным коэффициентом $n_{\tilde{F}}^*$ и функцией $t_2(s)$.

Теперь условие достижения максимального значения коэффициента запаса $n_{\tilde{F}}^*$ можно сформулировать следующим образом:

Найти допустимую функцию $t_2(s) \in \Sigma_{\tilde{F}}$, удовлетворяющую уравнениям равновесия (12) и предельным соотношениям (33), обеспечивающую достижение максимального значения коэффициента запаса $n^*_{p\%}$. Задачу определения функции $t_2(s)$, обеспечивающей достижение максимального значения $n^*_{p\%}$, можно сформулировать в терминах теории оптимального управления:

Найти такое кусочно-непрерывное управление $\boldsymbol{\mu}(s) = \left(t_2, n_{p\%}\right)'$, $s \in [s_0, s_1]$, чтобы объект, описываемый уравнениями (37), двигаясь из многообразия $\Delta_0 = \left\{\mathbf{z} \in E^4, \mathbf{A}_0\mathbf{z}(s_0) = \mathbf{B}_0\right\}$, перешел на многообразие $\Delta_1 = \left\{\mathbf{z} \in E^4, \mathbf{A}_1\mathbf{z}(s_1) = \mathbf{B}_1\right\}$ так, чтобы функционал (36) принимал наименьшее значение [19].

$$\boldsymbol{\Phi}_* = \inf_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{z}); \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{z}) = \int_{s_o}^{s_1} \Omega_0(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu})\, ds,\ \Omega_0(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{\mu_2}{(s_0 - s_1)},$$

при условиях:

$$\frac{d\mathbf{z}}{ds} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu});\ \mathbf{A}_i\mathbf{z}(s_i) = \mathbf{B}_i\ \ (i = 0,1), \tag{37}$$

где $\mathbf{z} = (t_1, N, m_1, s)'$; $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)'$; $\Omega_4(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = 1$; $\mathbf{A}_i\mathbf{z}(s_i) = \mathbf{B}_i$, $(i = 0,1)$ есть статические краевые условия [25–26], дополненные равенством $z_4(s_0) = s_0$.

При наибольшем значении коэффициента запаса $n_{p\%} = \mu_2$ функционал (36) принимает наименьшее значение, что обеспечивается его строением. Для определения необходимых условий достижения минимума функционала (36) при ограничениях (37) воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина [19], который для рассматриваемой задачи формулируется следующим образом:

Пусть $\{\boldsymbol{\mu}(o), \mathbf{z}(o)\}$, $s \in [s_0, s_1]$ – решение задачи (36), (37). Тогда с необходимостью существует вектор функция $\boldsymbol{\psi}(s) = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)'$, где $\psi_0 = const$, такая, что:

1. $\psi_0 \le 0$; $(\boldsymbol{\psi}(s) \ne 0)$ $s \in [s_0, s_1]$.

2. $\boldsymbol{\psi}(s)$ является решением следующей сопряженной системы уравнений, соответствующей рассматриваемому решению $\{\boldsymbol{\mu}(o), \mathbf{z}(o)\}$, $s \in [s_0, s_1]$:

$$\frac{d\psi_i}{ds} = -\left(\boldsymbol{\psi}, \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial z_i}\right), \left(i = \overline{0,4}\right), \tag{38}$$

где

$$\frac{dz_0}{ds} = \Omega_0(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}).$$

3. При любом $s \in [s_0, s_1]$ гамильтониан

$$\mathrm{G}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}))$$

переменного $\boldsymbol{\mu}$ достигает в точке $\boldsymbol{\mu}(o)$ максимальное значение и

$$\max_{\boldsymbol{\mu}} \mathrm{G}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}) = C = const. \tag{39}$$

4. На краях $s = s_i$, $(i = 0{,}1)$ выполняются условия трансверсальности [19], т. е. векторы $\boldsymbol{\psi}(s_i)$ направлены по нормали к касательным плоскостям к многообразиям Δ_i, $(i = 0{,}1)$.

Формально условия трансверсальности записываются следующим образом [19]:

Для любого вектора $\mathbf{z}(s_i) \in E^4, (i = 0{,}1)$ такого, что: $a_{\alpha,\beta}^{(i)} \cdot z_\alpha(s_i) = 0 \; \left(\alpha, \beta = \overline{1,4}\right)$, имеет место:

$$\psi_k(s_i) z_k(s_i) = 0 \; \left(k = \overline{1,4}\right). \tag{40}$$

Сравнивая уравнения (11), (17), (38), и учитывая, что условия трансверсальности (40) для оболочек всегда выполняются [26], видим, что вектор $\bar{\boldsymbol{\psi}} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)'$ с точностью до обозначений совпадает с $\mathbf{U}Rh$.

Таким образом, с необходимостью коэффициент запаса $n_{\tilde{F}}^*$ на статически допустимом поле обобщенных напряжений $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_{\tilde{F}}$ достигает максимального значения при условии, когда величины $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ удовлетворяют кинематическим соотношениям (11), (17) и кинематическим краевым условиям.

Теперь еще необходимо показать, что скорость диссипации энергии неотрицательная для невогнутой поверхности $\tilde{F} = 0$. Эти условия выполняются, если множители $\tilde{\lambda}_i$ (33) удовлетворяют соотношениям типа (18) [7]. Частично соотношения (18) выполнены при построении поверхности $\tilde{F} = 0$ (34), а остальные можно объединить в равенство:

$$\tilde{\lambda}_j d\tilde{F}_j = 0. \tag{41}$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим условие (39), обеспечивающее достижение максимального значения $n_{\tilde{F}}$, которое с учетом принятых обозначений записывается в виде:

$$\left(\mathbf{U}, \bar{\boldsymbol{\Omega}}\right) + \varphi\left(\mathbf{Q}^*, N, \mathbf{U}, n_{\tilde{F}}, s\right) = C, \tag{42}$$

где

$$\frac{d\varphi}{ds} = Rh\tilde{\lambda}_i \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial s} - \left(\mathbf{U}, \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial s}\right). \tag{43}$$

Интегрируя по частям уравнение (41) с учетом (11)–(12), (17) получим соотношения (42)–(43).

Таким образом, для любой вписанной невогнутой поверхности $\tilde{F} = 0$ максимальное значение статически допустимого коэффициента запаса $n_{\tilde{F}} = \max\limits_{\mathbf{Q} \in \Sigma_{\tilde{F}}} \left(n_{\tilde{F}}^*\right)$ с необходимостью достигается при реализации таких статически допустимых обобщенных напряжений $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_{\tilde{F}}$, что соответствующие скорости $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ являются кинематически допустимыми. Если механизмы течения для оболочек с поверхностями $\tilde{F} = 0$ и $F = 0$ совпадают, то в соответствии со статической теоремой имеем $n_F \geq n_{\tilde{F}} \geq n_{\tilde{F}}^*$.

Что и требовалось доказать.

Справедливость ассоциированного закона течения можно показать и для описанной невогнутой поверхности $\breve{F} = 0$. Для этого рассмотрим оболочку из некоторого фиктивного материала с поверхностью текучести $G = 0$ такой, что $\breve{F} = 0$ является вписанной по отношению к $G = 0$. Для этих поверхностей определим множества статически допустимых полей обобщенных напряжений $\Sigma_{\tilde{F}} \subset \Sigma_F \subset \Sigma_{\breve{F}} \subset \Sigma_G$. Согласно приведенной теореме, получим, что в предельном состоянии в оболочке из жесткопластического материала с любой из перечисленных поверхностей выполняется ассоциированный закон течения, а при условии реализации в этих оболочках одинаковых механизмов течения соответствующие коэффициенты запаса удовлетворяют неравенствам $n_{\tilde{F}} \le n_F \le n_{\breve{F}} \le n_G$.

Таким образом, при решении задач предельного равновесия оболочек вращения в пространстве обобщенных напряжений можно использовать любые невогнутые приближенные предельные поверхности текучести. Для этих поверхностей выполняется ассоциированный закон течения. Решения для таких поверхностей, как правило, определяются неединственным способом, а для каждого из этих решений при реализации одинаковых механизмов течения выполняются теоремы предельного равновесия. Определение истинного решения связано с выбором механизма, обеспечивающего наименьшее значение коэффициента запаса. Можно построить приближенные невогнутые поверхности текучести так, что в оболочке реализуется один механизм течения, характеризуемый непрерывными обобщенными скоростями [1]. В таких случаях теоремы предельного равновесия применимы без ограничений. Эти вписанные и описанные поверхности можно строить асимптотически сходящимися [11], а следовательно, получать сходящиеся оценки коэффициента запаса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вохмянин, И. Т,* Несущая способность гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек / И. Т. Вохмянин, Ю. В. Немировский // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3. – Вып. 1. – С. 18–23.

2. *Гвоздев, А. А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного нагружения / А. А. Гвоздев. – М. : Стройиздат, 1949. – 280 с.

3. *Дехтярь, А. С.* Несущая способность тонкостенных конструкций / А. С. Дехтярь, А. О. Рассказов. – Киев : Будивэльнык, 1990. – 153 с.

4. *Друккер, Д.* Расширенные теоремы о предельном равновесии для сплошной среды / Д. Друккер, В. Прагер, Г. Гринберг // Механика : сб. пер. – М. : ИЛ, 1953. – № 1(17). – С. 96–106.

5. *Жермен, П.* Механика сплошных сред / П. Жермен. – М. : Мир, 1965. – 480 с.

6. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 1. – 448 с.; М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Т. 2. – 448 с.

7. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

8. *Киндерлерер, Д.* Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. – М. : Мир, 1983. – 256 с.

9. *Койтер, В. Т.* Общие теоремы упругопластических сред. Серия Механика / В. Т. Койтер. – М. : ИЛ, 1961. – 80 с.

10. *Мосолов, П. П.* Механика жесткопластических сред / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. – М. : Наука, 1981. – 208 с.

11. *Налимов, А. В.* Универсальная аппроксимация поверхностей текучести для жесткопластических цилиндрических оболочек / А. В. Налимов // Ползуновский вестник. – 2006. – № 2–2. – С. 90–94.

12. *Налимов, А. В.* Проблемы численного решения задач предельного анализа оболочек / А. В. Налимов, Ю. В. Немировский // Ползуновский вестник. – 2006. – № 2–2. – С. 95–100.

13. *Немировский, Ю. В.* Предельное равновесие многослойных армированных осесимметрических оболочек / Ю. В. Немировский // Известия АН СССР. МТТ. – 1969. – № 6. – С. 80–89.

14. *Немировский, Ю. В.* Предельное равновесие армированных оболочек нулевой гауссовой кривизны / Ю. В. Немировский, А. В. Налимов // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25. – Вып. 9. – С. 72–79.

15. *Немировский, Ю. В.* Неединственность решений задач статики жесткопластического тела / Ю. В. Немировский, А. В. Налимов // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : труды XVIII Межреспубликанской конференции. – Новосибирск : Нонпарель, 2003. – С. 115–121.
16. *Немировский, Ю. В.* Полные решения задач предельного равновесия армированных осесимметрических оболочек / Ю. В. Немировский, А. В. Налимов // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. – 2004. – № 1. – С. 4–13.
17. *Онат, Е. Т.* Предельное равновесие пологих конических оболочек / Е. Т. Онат // Механика : сб. пер. – М. : ИЛ, 1961. – № 4 (68). – С. 105–115.
18. *Панагиотопулос, П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос. – М. : Мир, 1989. – 494 с
19. *Понтрягин, Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1983. – 392 с.
20. *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1979. – 774 с.
21. *Работнов, Ю. Н.* Приближенная техническая теория упругопластических оболочек / Ю. Н. Работнов // ПММ. – 1951. – Т. XV. – С. 167–174.
22. *Ржаницын, А. Р.* Предельное равновесие пластинок и оболочек / А. Р. Ржаницын. – М. : Наука, 1983. – 288 с.
23. *Савчук, А.* О пластическом анализе оболочек / А. Савчук // Механика деформируемого твердого тела. Направления развития. – М. : Мир, 1983. – С. 274–309.
24. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 493 с.
25. *Ходж, Ф. Г.* Краевые задачи теории пластичности / Ф. Г. Ходж // Серия Механика. Пластичность и термопластичность. – М. : ИЛ, 1962. – С. 7–69.
26. *Чернина, В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения / В. С. Чернина. – М. : Наука, 1968. – 455 с.
27. *Cinquini, C.* Limit analysis of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure / C. Cinquini, D. O. Lamblin, G. Guerlement // J. Struct. Mech. – 1984. – Vol. 12. – N. 3. – P. 263–278.
28. *Hodge, P. G.* Automatic piecewise linearization in ideal plasticity / P. G. Hodge // Comp. Meth. in Appl. Eng. – 1977. – Vol. 10. – N. 3. – P. 249–272.
29. *Save, M.* Limit analysis of plates and shells: Research over two decades / M. Save // J. Struct. Mech. – 1985. – Vol. 13. – N. 3–4. – P. 343–370.