ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

УДК 539

Непершин Р. И.

ПЛАСТИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ КОЛЬЦА ПЛОСКИМ ИНСТРУМЕНТОМ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ

(Московский государственный технический университет «СТАНКИН»)

Приведена приближенная модель пластического сжатия идеально пластического кольца плоским инструментом с однородным упрочнением материала в процессе сжатия, учитываемым по величине средней накопленной пластической деформации. Расчетная зависимость силы деформирования кольца от перемещения инструмента хорошо согласуется с экспериментальными данными при холодной деформации упрочняющегося металла.

Приближенная модель сжатия идеально пластического кольца плоским инструментом (рис. 1) основана на трех допущениях [2].

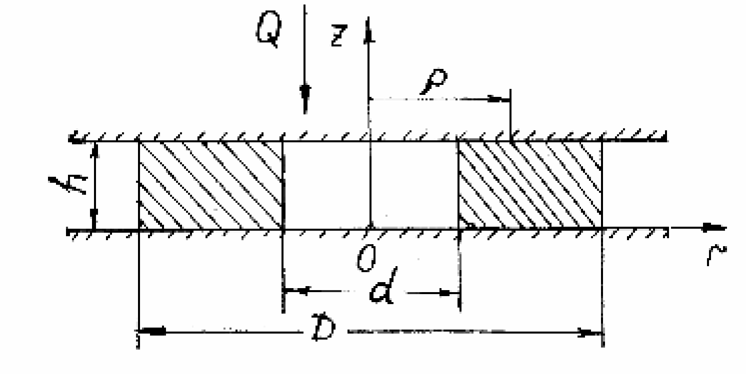

Рис. 1

(1) Рассматривается дифференциальное уравнение равновесия элемента равного толщине кольца h. (2) Радиальное нормальное напряжение усредняется по толщине h (3). Вследствие изменения знака касательного напряжения на границах контакта с инструментом среднее касательное напряжение по толщине h принимается равным нулю, используется условие полной пластичности кольцевого элемента для нормальных напряжений [3; 4].

Эти допущения приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению для изменения напряжений в радиальном направлении. Допущения приближенной модели пластического деформирования элемента конечной толщины широко используются на практике для моделирования многих технологических процессов и удовлетворительно согласуются с экспериментами [5; 1].

Ниже рассматриваются безразмерные напряжения, отнесенные к напряжению текучести материала кольца σ_s. На границах контакта кольца с инструментом задается коэффициент пластического трения μ, представляющий безразмерное касательное напряжение, изменяющееся в пределах $0 < \mu < ½$.

В случае идеально гладкого инструмента ($\mu = 0$) задача имеет простое точное решение – однородное напряженное состояние осевого сжатия с линейным изменением скоростей пластического течения при положительной радиальной скорости V_r во всей пластической области. В этом случае внутренний и наружный диаметры увеличиваются при сжатии кольца и определяются соотношением подобия $D_0/d_0 = D/d$ между начальными D_0, d_0 и текущими D, d значениями диаметров.

При наличии контактного трения ($\mu > 0$) пластическая область разделяется радиусом ρ на внутреннюю зону, где $V_r < 0$, и на наружную зону, где $V_r > 0$. В этом случае в процессе сжатия кольца внутренний диаметр d уменьшается, а наружный диаметр D увеличивается. Дифференциальные уравнения равновесия кольцевого элемента толщиной h в цилиндрических координатах $\{r, z, \theta\}$ и соответствующие условия полной пластичности для внутренней и наружной пластических зон с противоположными направлениями скорости V_r и контактного трения μ имеют следующий вид:

$$\frac{ds_r}{dr} + \frac{s_r - s_q}{r} = -2\frac{m}{h} \tag{1}$$

$$\sigma_r - \sigma_z = 1, \quad \sigma_z = \sigma_\theta \tag{2}$$

при $d/2 \le r \le \rho$, $V_r < 0$ и

$$\frac{ds_r}{dr} + \frac{s_r - s_q}{r} = 2\frac{m}{h} \tag{3}$$

$$\sigma_r - \sigma_z = 1, \quad \sigma_r = \sigma_\theta \tag{4}$$

при $\rho \le r \le D/2$, $V_r > 0$.

Из (1)–(4) следуют дифференциальные уравнения для давления на инструмент $p = -\sigma_z$

$$\frac{dp}{dr} = 2\frac{m}{h} + \frac{1}{r}, \quad d/2 \le r \le \rho, \tag{5}$$

$$\frac{dp}{dr} = -2\frac{m}{h}, \quad \rho \le r \le D/2. \tag{6}$$

Интегрирование уравнений (5) и (6) с граничными условиями $p = 1$ при $r = d/2$ и $r = D/2$, приводит к распределениям давления на инструмент в виде

$$p = 1 + \ln\frac{2r}{d} + \frac{m}{h}(2r - d), \quad d/2 \le r \le \rho, \tag{7}$$

$$p = 1 + \frac{m}{h}(D - 2r), \qquad \rho \le r \le D/2. \tag{8}$$

Из условия непрерывности давления при $r = \rho$ из уравнений (7) и (8) получаем трансцендентное уравнение для границы раздела пластических зон ρ

$$\ln\frac{2r}{d} + \frac{4m}{h}r = \frac{m}{h}(D + d). \tag{9}$$

Уравнение (9) при заданных значениях величин μ, D, d и h удобно решать итерационным методом Ньютона.

После определения ρ из уравнения (9) находим среднее давление на инструмент q интегрированием распределений давления (7) и (8)

$$q = 1 + \frac{1}{R_1^2 - R_0^2}\left[\begin{array}{l} \dfrac{R_0^2 - r^2}{2} + r^2 \ln\dfrac{r}{R_0} + \\ \dfrac{2m}{h}\left(\dfrac{1}{3}\left(R_1^3 + R_0^3 + 4r^3\right) - r^2\left(R_1 + R_0\right)\right) \end{array}\right], \quad (10)$$

где $R_0 = d/2$ и $R_1 = D/2$ – радиусы внутренней и наружной границ, которые в процессе сжатия кольца на величину dh определяются дифференциальными соотношениями, следующими из условия несжимаемости

$$\left.\begin{array}{l} dR_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{dh}{h}\dfrac{\left(r^2 - R_0^2\right)}{R_0} \\ \\ dR_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{dh}{h}\dfrac{\left(r^2 - R_1^2\right)}{R_1} \end{array}\right\}. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (11) показывают, что изменение диаметров кольца d и D определяется коэффициентом трения μ, который можно оценить сравнением экспериментальных и расчетных значений диаметров при сжатии кольца для заданных условий эксперимента.

Размерная величина силы сжатия кольца Q в зависимости от толщины h определяется формулой

$$Q(h) = p\left(R_1^2 - R_0^2\right)s_s(e_p)q(h), \quad (12)$$

где $q\,(h)$ определяется уравнениями (9)–(11); $\sigma_s\,(e_p)$ – заданная кривая упрочнения; накопленная средняя пластическая деформация e_p определяется интегралом [1]

$$e_p\,(h) = -\int_{h0}^{h} q(h)\frac{dh}{h}. \quad (13)$$

Уравнение (12) можно использовать для определения экспериментальной кривой упрочнения при записи зависимости $Q(h)$ на испытательной машине при сжатии кольцевого образца плоскими плитами с малым коэффициентом трения. Такое испытание позволяет получить кривую упрочнения для больших пластических деформаций, которую можно использовать для моделирования технологических процессов осадки кольцевых заготовок при холодной деформации.

На рис. 2 светлыми кружками показана экспериментальная кривая упрочнения алюминиевого сплава АД-31 при сжатии кольцевого образца с начальными размерами D_0 = 27 мм, d_0 = 21 мм и h_0 = 6.5 мм до конечной толщины h = 2.9 мм, полученная по приведенным уравнениям при μ = 0.1. При этом конечные расчетные значения диаметров кольца d = 19.4 мм и D = 31.2 мм удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Экспериментальная кривая упрочнения, показанная на рис. 2, имеет начальный участок, на котором происходит быстрое возрастание напряжения текучести, средний участок, на котором продолжается более медленное нелинейное упрочнение, и конечный участок при больших деформациях, на котором наблюдается почти линейное упрочнение с малым углом наклона касательной к кривой упрочнения материала.

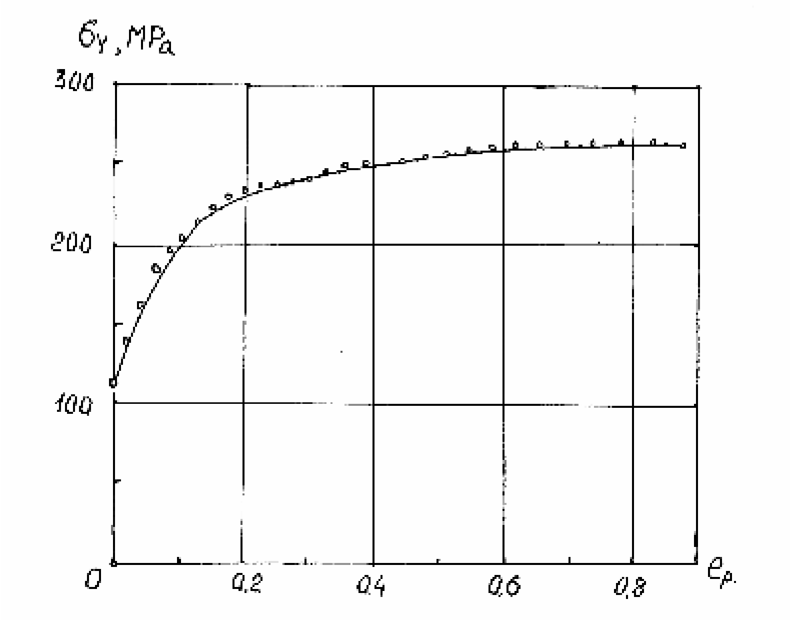

Рис. 2

Экспериментальная кривая упрочнения хорошо аппроксимируется квадратично-линейной зависимостью, показанной на рис. 2 сплошной кривой.

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\sigma_s = \sigma_0 \,(1 + C_1\, e_p + C_2\, e_p^2), & 0 < e_p \le e_p^* \\
\sigma_s = \sigma_0 \,(C_3 + C_4\, e_p + C_5\, e_p^2), & e_p^* \le e_p \le e_p^{**} \\
\sigma_s = \sigma_0 \,(C_6 + C_7\, e_p), & e_p \ge e_p^{**}
\end{array}
\right\} \qquad (14)
$$

с параметрами материала σ_0 = 358.6 МПа, C_1 = 1.89, C_2 = –1.33, C_3 = 0.92, C_4 = 2.13, C_5 = –1.19, C_6 = 1.61, C_7 = 0.31, e_p^* = 0.29 и e_p^{**} = 0.83.

На рис. 3 светлыми кружками и сплошной кривой показаны экспериментальная и расчетная зависимости силы Q от перемещения $s = h_0 - h$ инструмента при сжатии указанного выше образца из сплава АД-31. Расчетная зависимость получена из уравнения (12) при численном интегрировании уравнений (11) и (13) с использованием аппроксимации (14) кривой упрочнения. Вследствие точной аппроксимации экспериментальной кривой упрочнения расчетная и экспериментальная зависимости практически совпадают.

При сжатии кольца по схеме, показанной на рис. 1, конечные значения наружного и внутреннего диаметров зависят от контактного трения, которое на практике трудно регулировать с заданной точностью. Ниже рассмотрены две другие схемы сжатия кольца, в которых наружный или внутренний диаметры не зависят от контактного трения и определяются кинематическими ограничениями инструментом и условием несжимаемости материала кольца при пластической деформации.

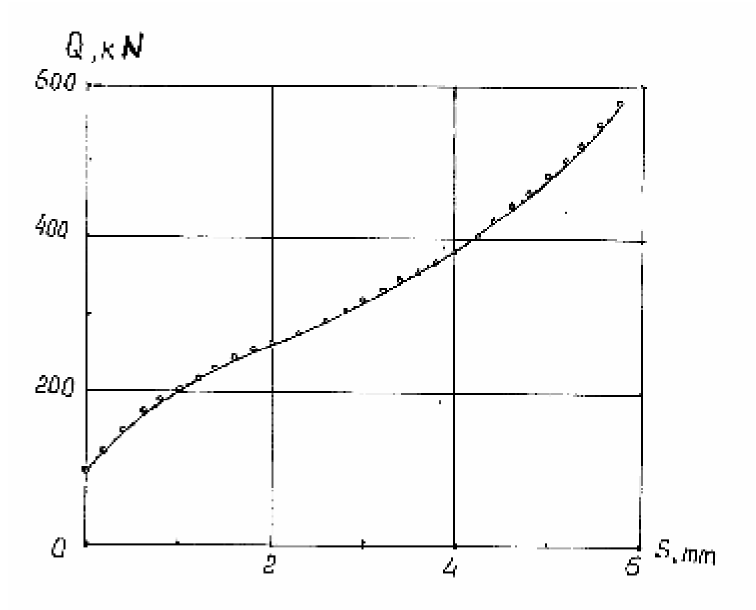

Рис. 3

На рис. 4 показана схема сжатия кольца плоским инструментом с кинематическим ограничением внутреннего диаметра d оправкой. В этом случае при наличии контактного трения диаметр d остается постоянным, равным диаметру оправки, а наружный диаметр D определяется условием несжимаемости в зависимости от h

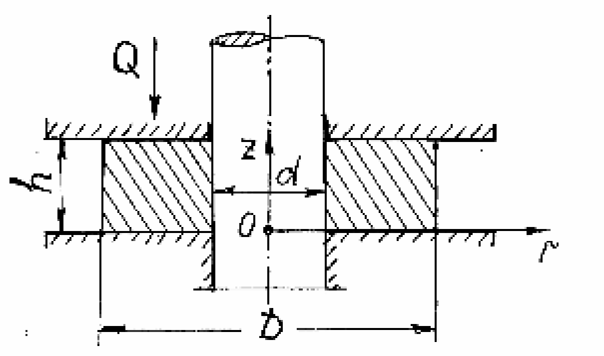

Рис. 4

$$D^2 = d^2 + \frac{h_0}{h}\left(D_0^2 - d^2\right),\; d = \text{const.} \tag{15}$$

В этом процессе при $\mu > 0$ и $V_r > 0$ распределение давления на инструмент определяется формулой (8), и на границе контакта кольца с оправкой возникает радиальное давление на оправку $p_m = -\sigma_r$, которое определяется из первого соотношения (4) условия полной пластичности и из (8) при $r = d/2$

$$p_m = \frac{m}{h}\,(D - d). \tag{16}$$

Интегрирование распределения давления (8) на границе контакта $d/2 \le r \le D/2$ приводит к выражению для среднего давления q на плоский инструмент

$$q = 1 + \frac{m}{h}\left(D - \frac{2\left(D^3 - d^3\right)}{3\left(D^2 - d^2\right)}\right). \qquad (17)$$

Зависимость силы сжатия кольца $Q(h)$ определяется формулой (12) для заданной кривой упрочнения $\sigma_s\ (e_p)$, пластической деформацией e_p, определяемой интегралом (13), и зависимостью $q(h)$, определяемой соотношениями (15) и (17).

На рис. 5 показана схема сжатия кольца плоским инструментом с ограничением перемещения наружного диаметра D стенкой контейнера. В этом случае внутренний диаметр кольца d определяется условием несжимаемости

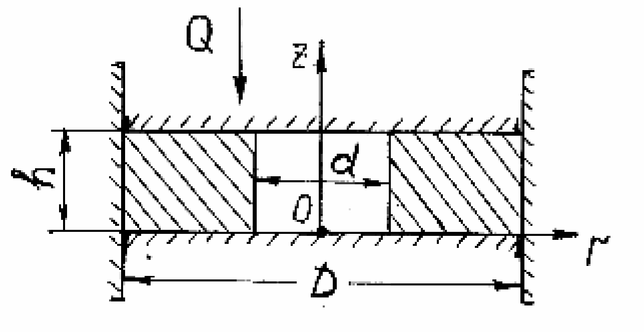

Рис. 5

$$d^2 = D^2 - \frac{h_0}{h}\left(D^2 - d_0^2\right), \; D = \text{const}. \qquad (18)$$

Пластическое течение направлено к оси z, и распределение давления на плоский инструмент определяется выражением (7). На стенку контейнера действует радиальное давление $p_c = -\sigma_r$, определяемое из первого соотношения (2) условия полной пластичности и из (7) при $r = D/2$

$$p_c = \ln\frac{D}{d} + \frac{m}{h}(D - d). \qquad (19)$$

Интегрирование распределения давления (7) по границе контакта кольца с плоским инструментом приводит к выражению для среднего давления q в виде

$$q = \frac{1}{2} + \frac{D^2}{D^2 - d^2}\ln\frac{D}{d} + \frac{m}{h}\left[\frac{2\left(D^3 - d^3\right)}{3\left(D^2 - d^2\right)} - d\right]. \qquad (20)$$

Зависимость силы сжатия кольца $Q(h)$ определяется формулой (12) для заданной кривой упрочнения $\sigma_s\ (e_p)$, пластической деформацией e_p определяемой интегралом (13), и зависимостью $q(h)$, определяемой соотношениями (18) и (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гоффман, О.* Введение в теорию пластичности для инженеров / О. Гоффман, Г. Закс. – М. : Машгиз, 1957. – 280 с.
2. *Друянов, Б. А.* Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.
3. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
4. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
5. *Целиков, А. И.* Основы теории прокатки / А. И. Целиков. – М. : Металлургия, 1965. –248 с.