

**ТРЕХМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ**

(Самарский государственный университет)

Рассматривается напряженно-деформированное состояние жесткопластического тела с рассеянным анизотропным полем микроповреждений. Поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга, главные оси которого совпадают с главными осями тензора напряжений. Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе относительно приращений главных напряжений, главных скоростей пластических деформаций и приращений перемещений, что наиболее удобно для представления и анализа уравнений связанной задачи. Рассмотрен случай плоской пластической деформации и осесимметричной деформации, и показано, что система основных соотношений относится к гиперболическому типу, что позволяет обобщить понятие поля скольжения на случай связанных состояний.

1. Математическая модель анизотропного распределения поврежденности

В представляемой работе рассматривается связанная задача математической теории пластичности. Связанная постановка задач необходима в механике деформируемого твердого тела для того, чтобы учесть искажение пластического течения полем повреждений, и одновременно возрастание повреждений в процессе накопления пластических деформаций. Эта задача значительно сложнее с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к их интегрированию, по сравнению с традиционными уравнениями теории идеальной пластичности. Актуальным также представляется учет анизотропии распределения поврежденности в основных уравнениях математической теории пластичности. Цель работы состоит в том, чтобы дать вывод основных соотношений связанной задачи¹ и указать случаи их гиперболичности, обобщив тем самым понятие поля скольжения на случай связанных состояний. Математическое моделирование пластического течения, сопровождающегося накоплением повреждений, подразумевает описание разупрочнения и соответствующую нетривиальную модификацию инкрементальных соотношений теории пластичности.

¹ Используя для этого преимущества триортогональной изостатической системы координат.

Математическое моделирование анизотропной поврежденности являлось предметом интенсивных исследований на протяжении последних десятилетий [2], [5]–[7], [11]–[13]. Классические представления о поврежденности связаны с так называемым геометрическим подходом, позволяющим довольно просто учесть анизотропию состояния поврежденности. При помощи этого подхода эффект возрастания внутренних напряжений в среде с повреждениями представляется с помощью понятия эффективного напряжения. Тензор эффективных напряжений строится как произведение тензора напряжений Коши и соосного ему обратного тензора сплошности. Условие соосности выполняется, если в процессе нагружения можно пренебречь влиянием упругой деформации на состояние поврежденности.

Под поврежденностью, следуя [10], понимается сокращение обратимого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микроповреждений, которые при пластическом течении проявляются в форме распределения дислокаций. В рамках математической модели поврежденности, как правило, представляется специальной тензорной переменной – тензором поврежденности. Тензорная мера анизотропной поврежденности является мерой сокращения, вследствие распределения микроповреждений, реально несущей нагрузку площади двумерного элемента тела в зависимости от его ориентации. В идеально пластическом теле сокращение эффективной площади происходит в основном вследствие шейкообразования (см. рис. 1, 2).

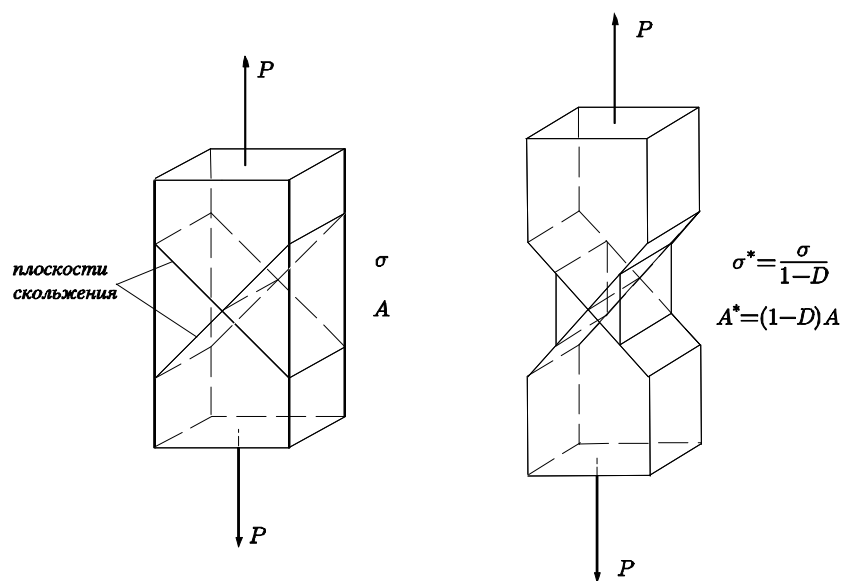
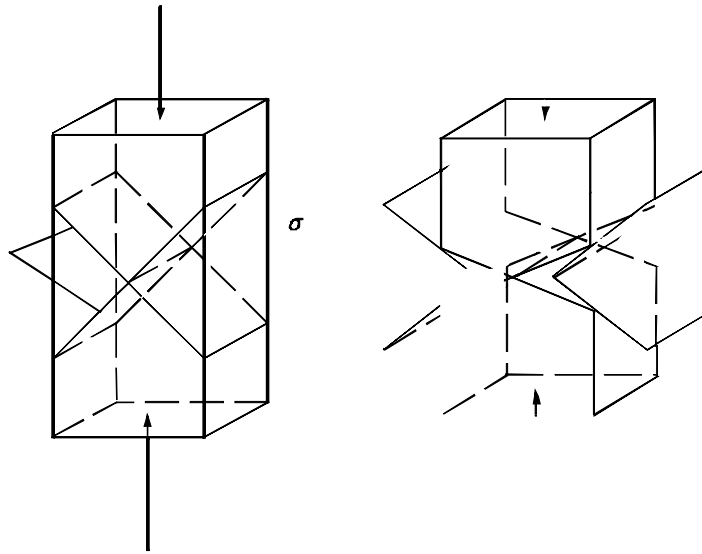


Рис. 1. Математическая модель сокращения эффективной площади вследствие скольжения при одноосном растяжении жесткопластического образца (схема Оната–Прагера [3]). Скольжение происходит вдоль двух изолированных плоскостей



\mathbf{n} от той точки, тонкую структуру поврежденности в окрестности которой предполагается исследовать. Конечные точки векторов \mathbf{n} образуют тогда единичную сферу (сферу единичных направлений).

Значения этой функции суть поврежденности, измеренные для каждого данного направления. Ясно, что вычислить поврежденности можно в результате анализа тонкой структуры поврежденности, задавшись при этом определенной мерой поврежденности. Возможные варианты – разнообразны. Выбор определяется, конечно же, преобладающим механизмом зарождения и развития поврежденности: образование и развитие полей взаимовлияющих микротрещин – характерный механизм деградации упругого тела, пластическое течение сопровождается зарождением и распространением дислокаций, ползучесть металлов – образованием и ростом пор. Можно ввести также общие меры поврежденности, абстрагируясь от конкретного типа микродефектов. Одной из таких мер является сокращение эффективной площади плоского элемента нормального вектору \mathbf{n} .

Для актуального состояния поврежденности, вследствие распределенных микродефектов передающая нагрузку от одной части тела на другую эффективная площадь элемента $dA^*(\mathbf{n})$ оказывается меньше, чем площадь этого элемента без учета его микроструктуры поврежденности $dA(\mathbf{n})$. Таким образом, можно определить функцию ориентации

$$V(\mathbf{n}) = \frac{dA^*(\mathbf{n})}{dA(\mathbf{n})} \quad (1.1)$$

как отношение указанных площадей.

Переменную V будем называть ориентационным распределением поврежденности (заметим, что правильнее было бы называть V ориентационной сплошностью).

Подчеркнем, что принятая интерпретация значений распределения $V = V(\mathbf{n})$ – лишь одна из многих возможных. Можно, например, связать значения V с плотностью распределения микротрещин или задать ориентационным распределением сколь угодно тонкую структуру состояния поврежденности.

Для дальнейшего принципиально важным является только то, что поврежденность локально может быть описана некоторым скалярным полем, определенным на поверхности единичной сферы.

Ориентационное распределение поврежденности выражается формулой

$$V = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{C} есть симметричный положительно определенный тензор второго ранга.

Тензор \mathbf{C} может быть интерпретирован как тензор деформации Фингера (см. [14]), градиент \mathbf{G} которой должен удовлетворять следующему уравнению:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})}. \quad (1.3)$$

Следуя концепции, предложенной в [11], можно представить, что поврежденность материального элемента может быть элиминирована посредством его некоторой дополнительной деформации, так что тензор \mathbf{G} преобразует поврежденный материальный элемент в неповрежденный.

В силу уравнения (1.3), можно заключить, что ортогональный множитель в полярном разложении Коши тензора \mathbf{G} не изменяет ориентационного распределения поврежденности, поэтому тензор \mathbf{G} можно считать симметричным.

Представим тензор поврежденности второго ранга посредством следующего соотношения

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{C}}. \quad (1.4)$$

Ориентационное распределение поврежденности тогда можно представить в следующем виде:

$$V = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]}. \quad (1.5)$$

Учитывая уравнения (1.3), (1.4), получаем

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})} \quad (1.6)$$

В работах [2], [12] с самого начала тензорная мера анизотропной поврежденности вводится как симметричный тензор второго ранга \mathbf{D} . Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Будучи симметричным тензором второго ранга, тензор поврежденности \mathbf{D} имеет три взаимно ортогональных главных направления (главные оси поврежденности) и три соответствующих собственных значения (главные поврежденности). Векторы ортонормированного базиса из собственных векторов тензора \mathbf{D} будем обозначать через \mathbf{d}_a , а собственные значения – через D_a . В дальнейшем будет предполагаться, что базис $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ ориентирован точно так же, как и базис из собственных векторов тензора напряжений $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$. Это положение нуждается в обосновании, поскольку, вообще говоря, оно может и не выполняться.

Для содержательной интерпретации тензор поврежденности удобно представлять в форме спектрального разложения

$$\mathbf{D} = \sum_{a=1}^3 D_a \mathbf{d}_a \otimes \mathbf{d}_a. \quad (1.7)$$

Рассмотрим произвольно ориентированный поврежденный плоский элемент PQR , опирающийся на главные оси поврежденности в точке O текущей конфигурации K , так что образуется тетраэдр $OPQR$ (см. рис. 3).

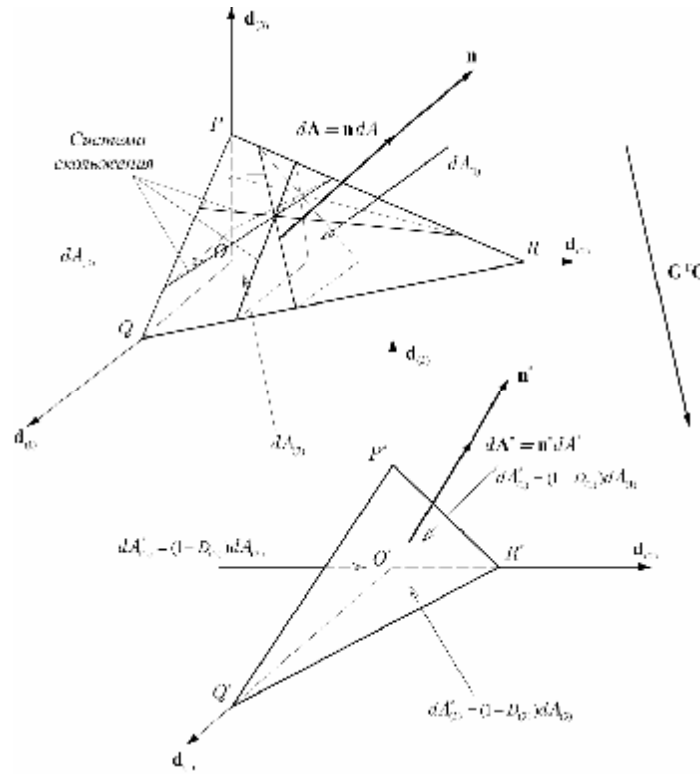


Рис. 3. Трансформация поврежденного объемного элемента, опирающегося на главные оси поврежденности, в эквивалентное неповрежденное состояние.

Эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$ получается в результате преобразования тетраэдра $OPQR$ линейным оператором $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$.

В силу уравнений (1.1) векторные элементы $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{A}^*$ связаны следующим соотношением:

$$d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D})d\mathbf{A} \quad (1.8)$$

подставляя в которое спектральное разложение (1.7), получим

$$d\mathbf{A}^* = \sum_{a=1}^3 (1 - D_{(a)}) dA_{(a)} \mathbf{d}_{(a)}, \quad (1.9)$$

где $dA_{(a)} = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{(a)}$ есть площади граней тетраэдра $OPQR$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Умножая обе части уравнения (1.9) скалярно на вектор $\mathbf{d}_{(b)}$, получим (см. [2]):

$$dA_b^* = (1 - D_b) dA_b \quad (\text{по } b \text{ не суммировать}), \quad (1.10)$$

где $dA_{(a)}^* = d\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{d}_{(a)}$ есть площади граней эквивалентного неповрежденного тетраэдра $O^*P^*Q^*R^*$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Последнее уравнение позволяет дать механическую интерпретацию собственных значений тензора поврежденности: главные поврежденности выражают сокращение несущей нагрузки площади элементов, нормальных главным осям поврежденности, так как это определяется простыми формулами (1.10).

Формула (1.10) в простейшей форме выражает количественно эффект сокращения эффективной площади элементов континуума с внутренним распределением повреждений.

Возможна также и другая интерпретация главных поврежденностей через сокращение линейных размеров тетраэдра $OPQR$ при его трансформации в эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$.

Действительно, поскольку тензоры $\mathbf{I} - \mathbf{D}$ и $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ соосны, то справедливы соотношения

$$\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} \mathbf{d}_{(a)} = L_{(a)}^D \mathbf{d}_{(a)} \quad (\text{по } a \text{ не суммировать, } a = 1, 2, 3) \quad (1.11)$$

где $L_{(a)}^D$ есть фиктивные удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное неповрежденное состояние.

Воспользовавшись уравнениями (1.6), (1.11), находим соотношения, связывающие главные поврежденности с главными фиктивными удлинениями:

$$1 - D_{(a)} = \frac{L_{(1)}^D L_{(2)}^D L_{(3)}^D}{L_{(a)}^D}. \quad (1.12)$$

Разрешив последние уравнения относительно $L_{(a)}^D$ (собственных значений тензора $\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$), находим также

$$\begin{aligned} L_{(1)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(2)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(1)})}}, \\ L_{(2)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(2)})}}, \\ L_{(3)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(2)})}{(1 - D_{(3)})}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, главные поврежденности $D_{(a)}$ определяют удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное состояние \mathbf{K}^* в соответствии с формулами (1.13) и позволяют вычислить приведенные длины поврежденности. При этом, очевидно, что при переходе в эквивалентное состояние объем элемента может изменяться, т. е. поврежденность может иметь ненулевую объемную меру.

2. Основные соотношения связанной задачи

Ниже разрабатывается математическая модель трехмерного связанного состояния, базирующаяся на инкрементальных уравнениях относительно триортогональной изостатической координатной системы, включающих уравнения равновесия, обобщенное условие пластичности, уравнения совместности приращений деформаций и приращений поворотов, соотношения Коши, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения с учетом микроповреждений, а также уравнения, определяющие изменение главных поврежденностей в зависимости от главных приращений деформаций.

2.1. Уравнения равновесия в триортогональной криволинейной сетке изостат

Рассмотрим уравнения равновесия в трижды ортогональной криволинейной сетке изостат, известные как уравнения Ламе (см., например, [1, с. 230–232]; [4, с. 42, 43]; [8, р. 91]).

Спектральное разложение тензора напряжений Коши имеет вид:

$$\mathbf{s} = s_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + s_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + s_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

где s_1, s_2, s_3 – главные нормальные напряжения; $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ – базисные орты, направленные вдоль главных осей напряжений.

Уравнение равновесия в инвариантной форме есть

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Обозначим через d_k производную вдоль направления изостатической траектории с номером k

$$d_k \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\text{по } k \text{ не суммировать } (k = 1, 2, 3)), \quad (2.3)$$

где x^k – триортогональные криволинейные изостатические координаты; g_{ij} – компоненты метрического тензора.

Вводя кривизны k_{ij} (где k_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{l}} k_{23} &= -\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{m}], & k_{32} &= -\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{n}], \\ \dot{\mathbf{m}} k_{13} &= -\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{l}], & k_{31} &= -\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{n}], \\ \dot{\mathbf{n}} k_{12} &= -\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{l}], & k_{21} &= -\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{m}], \end{aligned} \quad (2.4)$$

приведем уравнения Ламе (2.2) к виду (ср. [4, с. 43, уравнение (20)])

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{l}} d_1 s_1 + k_{23} (s_1 - s_2) + k_{32} (s_1 - s_3) &= 0, \\ \dot{\mathbf{m}} d_2 s_2 + k_{31} (s_2 - s_3) + k_{13} (s_2 - s_1) &= 0, \\ \dot{\mathbf{n}} d_3 s_3 + k_{12} (s_3 - s_1) + k_{21} (s_3 - s_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

где значения кривизн k_{ij} вдоль изостат можно, пользуясь деривационными формулами [9], связать уравнениями

$$\begin{aligned}
d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 + k_{13} k_{31} &= 0, \\
d_1 k_{23} + d_2 k_{13} + k_{23}^2 + k_{13}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\
d_2 k_{31} + d_3 k_{21} + k_{31}^2 + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\
d_2 k_{12} &= k_{13} (k_{21} - k_{12}), \\
d_3 k_{23} &= k_{21} (k_{32} - k_{23}), \\
d_1 k_{31} &= k_{32} (k_{13} - k_{31}),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

или, что эквивалентно, – уравнениями

$$\begin{aligned}
d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 + k_{13} k_{31} &= 0, \\
d_1 k_{23} + d_2 k_{13} + k_{23}^2 + k_{13}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\
d_2 k_{31} + d_3 k_{21} + k_{31}^2 + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\
d_3 k_{13} &= k_{12} (k_{31} - k_{13}), \\
d_1 k_{21} &= k_{23} (k_{12} - k_{21}), \\
d_2 k_{32} &= k_{31} (k_{23} - k_{32}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Чаще всего оказывается удобнее использовать формулировку уравнений относительно приращений напряжений. Приращение тензора напряжений $d\mathbf{S}$ соответствуют малому изменению параметра нагружения вдоль действительной траектории нагружения. Уравнение равновесия в приращениях имеет вид

$$\mathring{\mathbf{N}} \cdot (d\mathbf{S}) = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

При дифференцировании спектрального разложения тензора напряжений (2.1) вдоль действительного процесса нагружения необходимо дифференцировать также и базисные векторы \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} , поскольку, вообще говоря, они будут поворачиваться при нагружении. С целью описания поворота главных осей напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} при малом догружении введем вектор $d\mathbf{w}$ такой, что

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{w} \times \mathbf{l}, \quad d\mathbf{m} = d\mathbf{w} \times \mathbf{m}, \quad d\mathbf{n} = d\mathbf{w} \times \mathbf{n}. \tag{2.9}$$

Здесь $d\mathbf{w}$ следует рассматривать как единый символ, обозначающий вектор, определяемый согласно (2.9), а не приращение вектора, стоящего под знаком дифференциала.²

Разложим вектор $d\mathbf{w}$ по ортонормированному собственному локальному базису тензора напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} :

$$d\mathbf{w} = \mathbf{l} dw_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} dw_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n} dw_{\langle 3 \rangle}. \tag{2.10}$$

Заметим, что $dw_{\langle j \rangle}$ есть физические компоненты вектора $d\mathbf{w}$ по отношению к изостатической координатной сетке. Они не являются действительными приращениями. Поэтому $dw_{\langle j \rangle}$ также следует трактовать как единый символ. Для простоты мы в дальнейшем будем использовать более короткое обозначение dw_j , опуская треугольные скобки.³

² Это обстоятельство мы не отражаем в нашей системе обозначений, чтобы не усложнять запись уравнений. Ясно, что при этом мы создаем ряд неудобств, затрудняющих понимание работы. Так, например, $d\mathbf{S}$ является действительным приращением тензора напряжений при догружении, в то время как $d\mathbf{w}$ приращением не является.

³ Мы используем треугольные скобки для указания физических компонент векторных и тензорных величин.

Изменение ориентаций базисных векторов на основании (2.9) и (2.10) вычисляется как

$$d\mathbf{l} = -\mathbf{n}dw_2 + \mathbf{m}dw_3, \quad d\mathbf{m} = \mathbf{n}dw_1 - \mathbf{l}dw_3, \quad d\mathbf{n} = -\mathbf{m}dw_1 + \mathbf{l}dw_2. \quad (2.11)$$

Дифференцируя спектральное разложение тензора напряжений (2.1) вдоль процесса нагружения и учитывая (2.11), получим

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} ds_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} ds_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} ds_1 + \\ & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} (s_1 - s_2) dw_3 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} (s_3 - s_1) dw_2 + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} (s_1 - s_2) dw_3 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} (s_2 - s_3) dw_1 + \\ & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} (s_3 - s_1) dw_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} (s_2 - s_3) dw_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В дальнейшем будут необходимы следующие соотношения:

$$\tilde{\mathbf{N}} \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{l}) + (\mathbf{l} \times \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{n}, \quad (2.13)$$

а также

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{j} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{l}) + \mathbf{j} (\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{n}. \quad (2.14)$$

Учитывая (2.12)–(2.14), находим уравнения равновесия в приращениях (2.8) относительно линий главных напряжений:

$$\left\{ \begin{aligned} d_1 ds_1 + k_{23}(ds_1 - ds_2) + k_{32}(ds_1 - ds_3) + (2k_{13} + k_{31} + d_2)[(s_1 - s_2)dw_3] + \\ + (2k_{12} + k_{21} + d_3)[(s_3 - s_1)dw_2] = 0, \\ d_2 ds_2 + k_{31}(ds_2 - ds_3) + k_{13}(ds_2 - ds_1) + (2k_{23} + k_{32} + d_1)[(s_1 - s_2)dw_3] + \\ + (2k_{21} + k_{12} + d_3)[(s_2 - s_3)dw_1] = 0, \\ d_3 ds_3 + k_{12}(ds_3 - ds_1) + k_{21}(ds_3 - ds_2) + (2k_{32} + k_{23} + d_1)[(s_3 - s_1)dw_2] + \\ + (2k_{31} + k_{13} + d_2)[(s_2 - s_3)dw_1] = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.15)$$

где ds_1, ds_2, ds_3 – приращения главных напряжений.⁴

Заметим, что второе и третье уравнения в системе (2.15) получаются из первого циклической перестановкой индексов.

2.2. Уравнения совместности приращений малых деформаций в криволинейной сетке изостат

Сформулируем далее уравнения совместности приращений малых деформаций в триортогональной криволинейной сетке x^1, x^2, x^3 .

Уравнение совместности малых деформаций в приращениях, как известно, имеет вид [1]

$$-d\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{N}} \times d\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

где тензор второго ранга $d\mathbf{P}$ есть транспонированный вихрь тензора приращений полных деформаций

$$d\mathbf{P} = (\tilde{\mathbf{N}} \times d\mathbf{e})^T. \quad (2.17)$$

Тензор несовместности $d\mathbf{S}$ симметричен:

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{S})^T. \quad (2.18)$$

⁴ Эти величины представляют собой действительные приращения главных напряжений s_1, s_2, s_3 при малом догружении.

Тензор $d\mathbf{P}$ антисимметричен, поскольку:

$$(\tilde{\mathbf{N}} \times d\mathbf{e})^T = -(d\mathbf{e} \times \tilde{\mathbf{N}}). \quad (2.19)$$

Физические компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ в триортогональной криволинейной координатной сетке вычисляются в форме [9]:

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{h_2} \left[\frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 32 \rangle})}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle})}{\partial x^2} \right] \right\} + \\ & + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 12 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \left\} - \\ & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \frac{1}{h_3} \left[\frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle})}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle})}{\partial x^2} \right] \right\} - \\ & - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 32 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \left\} + \\ & + \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \left[\frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle})}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle})}{\partial x^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \left[\frac{d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 11 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right] - \\ & - \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \left[\frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle})}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle})}{\partial x^3} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \left[\frac{d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 13 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 11 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \right], \quad (2.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dS_{\langle 12 \rangle} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{h_1} \left[\frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle})}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle})}{\partial x^3} \right] \right\} - \\ & - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 11 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \left\} - \\ & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle})}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle})}{\partial x^3} \right] + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right\} + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \left[\frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle})}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle})}{\partial x^2} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \left[\frac{d\mathbf{e}_{\langle 12 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle}}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \right] + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \left[\frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle})}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle})}{\partial x^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \left[\frac{d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 11 \rangle}}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \left[\frac{\partial(h_1 de_{\langle 31 \rangle})}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 de_{\langle 32 \rangle})}{\partial x^1} \right] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \left[\frac{de_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} - \frac{de_{\langle 21 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \right], \quad (2.21)$$

где $h_a = \sqrt{g_{aa}}$ (по a не суммировать) – параметры Ламе; $de_{\langle ij \rangle}$ – физические компоненты тензора de в изостатической системе координат:

$$\begin{aligned} de = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} de_{\langle 11 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} de_{\langle 12 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} de_{\langle 13 \rangle} + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} de_{\langle 22 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} de_{\langle 21 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} de_{\langle 23 \rangle} + \\ & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} de_{\langle 33 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} de_{\langle 31 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} de_{\langle 32 \rangle}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}$, $dS_{\langle 33 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.20).

Компоненты $dS_{\langle 23 \rangle}$, $dS_{\langle 31 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.21).

Здесь представляется уместным еще раз упомянуть о том, что ни $dS_{\langle ij \rangle}$, ни $de_{\langle ij \rangle}$ не являются действительными приращениями величин, находящихся под знаком дифференциала.

Опираясь на приведенные формулы, запишем уравнение совместности для приращений пластических деформаций в изостатической сетке. Мы будем пренебрегать упругими деформациями: $de = de^P$. Поскольку тензоры S и de^P соосны, то в сетке изостат матрица тензора de^P диагональна и в физических компонентах имеем

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & -d_2 d_2 de_3 - d_3 d_3 de_2 + (k_{21}^2 - k_{31}^2)(de_3 - de_2) + \\ & + d_3 [k_{21}(de_3 - de_2)] - d_2 [k_{31}(de_3 - de_2)] - \\ & - k_{23} k_{32} (de_2 + de_3 - 2de_1) - k_{31} d_2 de_3 - \\ & - k_{21} d_3 de_2 - k_{32} d_1 de_2 - k_{23} d_1 de_3, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} dS_{\langle 12 \rangle} = & d_2 d_1 de_3 + d_2 [k_{32}(de_3 - de_1)] + k_{31} d_1 (de_3 - de_2) - \\ & - k_{23} d_2 de_3 + k_{31} (de_3 - de_1)(k_{32} - k_{23}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $de = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} de_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} de_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} de_3$.

Как и прежде, компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}$, $dS_{\langle 33 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.23). Компоненты $dS_{\langle 23 \rangle}$, $dS_{\langle 31 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.24).

В случае плоской сжимаемой⁵ пластической деформации имеется всего одно соотношение

$$dS_{\langle 33 \rangle} = 0, \quad (2.25)$$

или

$$\begin{aligned} -dS_{\langle 33 \rangle} = & d_1 d_1 de_2 + d_2 d_2 de_1 + \\ & + (de_2 - de_1)(d_1 k_2 - d_2 k_1 + k_2^2 - k_1^2) + \\ & + k_2 d_1 (2de_2 - de_1) - k_1 d_2 (2de_1 - de_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

⁵ В отличие от теории идеальной пластичности в поврежденной среде пластическая деформация, вообще говоря, сжимаемая.

2.3. Условие совместности для приращений поворотов

Сформулируем далее уравнения совместности для приращений поворотов в триортogonalной криволинейной сетке $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$.

Вектор поворота $d\mathbf{W}$ определяется как половина вихря вектора приращений перемещений

$$2d\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{N}} \times d\mathbf{u}. \quad (2.27)$$

Из данного определения следует уравнение совместности для поворотов в приращениях

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot d\mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

В изостатической системе координат уравнение совместности для приращений поворотов (2.28) примет вид

$$(k_{23} + k_{32})d\Omega_1 + (k_{13} + k_{31})d\Omega_2 + (k_{12} + k_{21})d\Omega_3 + d_1d\Omega_1 + d_2d\Omega_2 + d_3d\Omega_3 = 0, \quad (2.29)$$

где $d\Omega_j$ – физические компоненты вектора $d\mathbf{W}$ в изостатической системе координат и, следовательно, они не являются действительными приращениями.

2.4. Соотношения Коши для плоской задачи в изостатической сетке координат

Соотношения Коши в приращениях имеют вид

$$2de = (\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u}) + (\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u})^T. \quad (2.30)$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам ортонормированного базиса \mathbf{l}, \mathbf{m} :

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle}. \quad (2.31)$$

Заметим, что величины $du_{\langle j \rangle}$ не являются действительными приращениями, а представляют собой компоненты разложения вектора $d\mathbf{u}$ по базису \mathbf{l}, \mathbf{m} . Тем не менее о величинах $du_{\langle j \rangle}$ мы будем говорить как о приращениях перемещений, помня, что они таковыми не являются.

Оператор Гамильтона, как нетрудно видеть, имеет форму (h_1, h_2 – параметры Ламе)

$$\tilde{\mathbf{N}} = h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial}{\partial x^2}. \quad (2.32)$$

Оператор $\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u}$ вычисляется в виде:

$$\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u} = \mathbf{l} \otimes \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 2 \rangle} + (du_{\langle 1 \rangle})\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{l} + (du_{\langle 2 \rangle})\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{m}. \quad (2.33)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 1 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^2}, \\ \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 2 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \mathbf{m}, & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \mathbf{m}, & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \mathbf{l}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

приходим к формулам

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{I} &= -h_1^{-1}(d_2 h_1) \mathbf{I} \otimes \mathbf{m} + h_2^{-1}(d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \\ \tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{m} &= h_1^{-1}(d_2 h_1) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - h_2^{-1}(d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{I}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Используя (2.34) и (2.36), градиент приращений перемещений (2.33) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \left[h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 2 \rangle}) \right] + \\ &+ \mathbf{I} \otimes \mathbf{m} \left[-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{I} \left[-h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 2 \rangle}) \right].\end{aligned}\quad (2.37)$$

Транспонировав уравнение (2.37), получаем

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u})^T &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \left[h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 2 \rangle}) \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{I} \left[-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{I} \otimes \mathbf{m} \left[-h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 2 \rangle}) \right].\end{aligned}\quad (2.38)$$

Подставляя выражения (2.37) и (2.38) в соотношение Коши (2.30), приходим к

$$\begin{aligned}d\mathbf{e} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \left[h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 2 \rangle}) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 1 \rangle}) - h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 2 \rangle}) \right] \mathbf{I} \otimes \mathbf{m} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 1 \rangle}) - h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 2 \rangle}) \right] \mathbf{m} \otimes \mathbf{I}.\end{aligned}\quad (2.39)$$

В силу того, что $d\mathbf{e} = d\mathbf{e}^P$, а также ассоциированного закона течения, из которого следует соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, из формулы Коши (2.39) вытекают три соотношения

$$d\mathbf{e}_1^P = h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \quad (2.40)$$

$$d\mathbf{e}_2^P = h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \quad (2.41)$$

$$-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} = 0. \quad (2.42)$$

Вводя кривизны изостатических траекторий $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ согласно

$$\begin{aligned}d_2 h_1 &= h_1 \mathbf{k}_1, \\ d_1 h_2 &= h_2 \mathbf{k}_2\end{aligned}\quad (2.43)$$

в соотношения (2.40)–(2.42), получим

$$d\mathbf{e}_1^P = \mathbf{k}_1 du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \quad (2.44)$$

$$d\mathbf{e}_2^P = \mathbf{k}_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \quad (2.45)$$

$$d_1 du_{\langle 2 \rangle} - \mathbf{k}_1 du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \mathbf{k}_2 du_{\langle 2 \rangle} = 0. \quad (2.46)$$

Приведем также матричную форму двумерных соотношений Коши:

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{e}_1 \\ d\mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

2.5. Трехмерные соотношения Коши в триортогональной изостатической координатной сетке

Соотношения Коши в приращениях есть

$$2de = (\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u}) + (\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u})^\top. \quad (2.48)$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам ортонормированного базиса на плоскости \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} :

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n}du_{\langle 3 \rangle}. \quad (2.49)$$

Здесь величины $du_{\langle j \rangle}$ не являются действительными приращениями.

Трехмерный оператор Гамильтона, как нетрудно видеть, в триортогональной изостатической системе координат есть

$$\tilde{\mathbf{N}} = h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial}{\partial x^2} + h_3^{-1}\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial x^3}. \quad (2.50)$$

Оператор $\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u}$ вычисляется в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{l} \otimes \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 3 \rangle} + \\ &+ (du_{\langle 1 \rangle})\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{l} + (du_{\langle 2 \rangle})\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{m} + (du_{\langle 3 \rangle})\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 1 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^2} + h_3^{-1}\mathbf{n} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^3}, \\ \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 2 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^2} + h_3^{-1}\mathbf{n} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^3}, \\ \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 3 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial x^2} + h_3^{-1}\mathbf{n} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (2.52)$$

или

$$\begin{aligned} \nabla du_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 1 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 2 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 3 \rangle}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \mathbf{m} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} \mathbf{n} = -(d_2 h_1) \mathbf{m} - (d_3 h_1) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \mathbf{m} = (d_1 h_2) \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^3} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \mathbf{n} = (d_1 h_3) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \mathbf{l} = (d_2 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \mathbf{n} = -(d_1 h_2) \mathbf{l} - (d_3 h_2) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^3} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \mathbf{n} = (d_2 h_3) \mathbf{n}, \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^1} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} \mathbf{l} = (d_3 h_1) \mathbf{l}, \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^2} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \mathbf{m} = (d_3 h_2) \mathbf{m},
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^3} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \mathbf{m} = -(d_1 h_3) \mathbf{l} - (d_2 h_3) \mathbf{m},$$

приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{l} &= -\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\
\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{m} &= \frac{1}{h_1} (d_2 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\
\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{n} &= \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Используя (2.53) и (2.51), соотношение (iv) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right].
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Транспонировав уравнение (2.58), получаем

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u})^T = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right]. \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.58) и (2.59) в соотношение Коши (2.48), получим

$$\begin{aligned}
de = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right].
\end{aligned}$$

Тензор de симметричен.

В силу того, что в приближении жесткопластического анализа $de = de^P$, а также ассоциированного закона течения, из которого следует соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, полученная формула приводит к шести соотношениям:

$$de_1^P = \frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle}, \quad (2.60)$$

$$de_2^P = \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle}, \quad (2.61)$$

$$de_3^P = \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle}, \quad (2.62)$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} = 0, \quad (2.63)$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} = 0, \quad (2.64)$$

$$-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} = 0. \quad (2.65)$$

Вводя кривизны в соотношения (2.60)–(2.65) согласно

$$\begin{aligned} d_1h_3 &= h_3k_{32}, & d_1h_2 &= h_2k_{23}, & d_2h_3 &= h_3k_{31}, \\ d_2h_1 &= h_1k_{13}, & d_3h_2 &= h_2k_{21}, & d_3h_1 &= h_1k_{12}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

получим

$$de_1^P = k_{13}du_{\langle 2 \rangle} + k_{12}du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle}, \quad (2.67)$$

$$de_2^P = k_{23}du_{\langle 1 \rangle} + k_{21}du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle}, \quad (2.68)$$

$$de_3^P = k_{32}du_{\langle 1 \rangle} + k_{31}du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle}, \quad (2.69)$$

$$-k_{13}du_{\langle 1 \rangle} - k_{23}du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} = 0, \quad (2.70)$$

$$-k_{12}du_{\langle 1 \rangle} - k_{32}du_{\langle 3 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} = 0, \quad (2.71)$$

$$-k_{21}du_{\langle 2 \rangle} - k_{31}du_{\langle 3 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} = 0. \quad (2.72)$$

Эти соотношения компактно представляются в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} de_1^P \\ de_2^P \\ de_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & k_{13} & k_{12} \\ k_{23} & d_2 & k_{21} \\ k_{32} & k_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -k_{13} + d_2 & -k_{23} + d_1 & 0 \\ -k_{12} + d_3 & 0 & -k_{32} + d_1 \\ 0 & -k_{21} + d_3 & -k_{31} + d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0.$$

В случае плоской деформации $du_{\langle 3 \rangle} = 0$, $de_3^P = 0$, $k_1 = k_{13}$, $k_2 = k_{23}$ матричные соотношения упрощаются и принимают вид

$$\begin{pmatrix} de_1^P \\ de_2^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & k_1 \\ k_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -k_1 + d_2 & -k_2 + d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

В случае осесимметричного состояния $du_{\langle 2 \rangle} = 0$, $d_2 = 0$, $k_{31} = 0$, $k_{13} = 0$ соотношения Коши примут вид:

$$\begin{pmatrix} de_1^P \\ de_2^P \\ de_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & k_{12} \\ k_{23} & 0 & k_{21} \\ k_{32} & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_{23} + d_1 & 0 \\ -k_{12} + d_3 & 0 & -k_{32} + d_1 \\ 0 & -k_{21} + d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0.$$

2.6. Эффективные напряжения

Рассмотрим призматический образец, растягиваемый силой P . Обозначим через A и A^* соответственно площадь поперечного сечения образца в начальном неповрежденном и текущем поврежденном состояниях соответственно (рис. 1, 2). В силу того, что параметр поврежденности D представляет собой относительное сокращение эффективной площади, то для параметра D имеет место следующее простое соотношение:

$$1 - D = \frac{A^*}{A}. \quad (2.73)$$

Вызванное внутренним распределением повреждений сокращение эффективной площади, сразу же приводит к важнейшему представлению об эффекте возрастания внутренних напряжений в теле с распределенными повреждениями. Действительно, наряду с напряжениями

$$s = \frac{P}{A}, \quad (2.74)$$

очевидно, следует рассмотреть эффективные напряжения

$$s^* = \frac{P}{A^*}, \quad (2.75)$$

которые в силу формулы (2.73) можно также представить в виде:

$$s^* = \frac{s}{1 - D} \quad (2.76)$$

или в общем случае, учитывая соосность тензора напряжений и тензора поврежденности,

$$s_j^* = \frac{s_j}{1 - D_j} \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}). \quad (2.77)$$

Ясно, что $s_j^* > s_j$, если поврежденность ненулевая.

2.7. Обобщенное условие текучести Кулона–Треска для микроповрежденного тела

Понятие эффективного напряжения позволяет весьма просто произвести обобщение критериев текучести изотропных тел так, чтобы учесть возможную их повреждаемость. Действительно, рассматривая условие текучести изотропного тела в наиболее общей форме

$$f(s_1, s_2, s_3) = 0,$$

мы переформулируем его в терминах эквивалентных напряжений

$$f(s_1^{\vartheta}, s_2^{\vartheta}, s_3^{\vartheta}) = 0.$$

В пространстве главных напряжений классическое условие текучести Треска изображается поверхностью шестигранной призмы с ребрами

$$s_1 \pm 2k = s_2 = s_3, \quad s_1 = s_2 \pm 2k = s_3, \quad s_1 = s_2 = s_3 \pm 2k, \quad (2.78)$$

где k – предел текучести при чистом сдвиге.

Для напряженного состояния, соответствующего грани призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы главные напряжения были связаны соотношением

$$s_1 - s_2 = 2k. \quad (2.79)$$

Для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$s_1 = s_2 = s_3 \pm 2k. \quad (2.80)$$

Последнее условие означает, что главное нормальное напряжение s_3 является либо наименьшим, либо наибольшим.

Перепишем классическое условие Треска для грани (2.79) и ребра (2.80) с учетом соотношений (2.77), выражающих увеличение внутренних напряжений вследствие повреждений, заменяя главные напряжения эквивалентными, и получим обобщенное условие текучести Треска для тела с микроповреждениями.

Обобщенное условие текучести для грани призмы Треска (2.79) имеет форму:

$$s_1^{\vartheta} - s_2^{\vartheta} = 2k \quad (2.81)$$

или

$$\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_2}{1-D_2} = 2k. \quad (2.82)$$

Обобщенное условие текучести для ребра призмы Треска (2.80) примет вид:

$$s_1^{\vartheta} = s_2^{\vartheta} = s_3^{\vartheta} \pm 2k \quad (2.83)$$

или (ограничиваясь выбором положительного знака)

$$\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_3}{1-D_3} = 2k, \quad \frac{s_2}{1-D_2} - \frac{s_3}{1-D_3} = 2k. \quad (2.84)$$

2.8. Закон накопления повреждений

Закон накопления повреждений принимая во внимание соосность тензора напряжений и тензора поврежденности, примем в простейшей форме:

$$dD_j = K_j \operatorname{sgn}(de_j^p) de_j^p \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}), \quad (2.85)$$

где K_j – определяющие функции ($K_j > 0$). Здесь dD_j представляют собой действительные приращения главных поврежденностей D_j , а de_j^P действительными приращениями не являются.⁶

Закон накопления повреждений, также можно представлять в виде обобщенной степенной зависимости

$$dD_j = K_j (\text{sgn}(de_j^P) de_j^P)^a \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}), \quad (2.86)$$

или в общей линейной форме

$$dD_j = K_{js} \text{sgn}(de_s^P) de_s^P, \quad (2.87)$$

где a – постоянный показатель; определяющие функции K_j и K_{js} не зависят от приращений dS_j , de_j^P , dD_j .

Следует также заметить, что в соответствии с представлениями, положенными в основу рассматриваемой математической модели связанного состояния, поврежденность возрастает в процессе деформации сжатия, поэтому в соотношениях (2.85)–(2.87), определяющих закон накопления повреждений, используется модуль главных приращений пластических деформаций $\text{sgn}(de_s^P) de_s^P$.⁷

2.9. Обобщенный ассоциированный закон течения тела с микроповреждениями

Мы сохраним традиционную форму ассоциированного с условием пластичности

$$f(S_1^s, S_2^s, S_3^s) = 0$$

закона течения тела с микроповреждениями, приняв соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, и три соотношения

$$de_j^P = d\Lambda \frac{\partial f}{\partial S_j},$$

где $d\Lambda$ – множитель пропорциональности.

Рассмотрим соотношения ассоциированного с условием пластичности Треска закона течения. Нас будет интересовать определяющая зависимость главных приращений пластической деформации от приращений главных напряжений в поврежденной среде.

1. Предположим, что напряженное состояние соответствует грани призмы Треска (2.82). Согласно ассоциированному закону течения определяющие зависимости для грани (2.82) есть

$$de_1^P = \frac{d\Lambda}{1 - D_1}, \quad de_2^P = -\frac{d\Lambda}{1 - D_2}, \quad de_3^P = 0. \quad (2.88)$$

⁶ Мы используем термин *главные приращения пластических деформаций* для указания на величины de_j^P .

⁷ Это означает, что независимо от процесса, всегда $dD_j \geq 0$. Закон накопления повреждений в случае, когда при деформации сжатия не происходит рост поврежденности, очевидно, имеет следующий вид (по j не суммировать):

$$dD_j = \begin{cases} K_j \text{sgn}(de_j^P) de_j^P, & de_j^P > 0; \\ 0, & de_j^P \leq 0. \end{cases}$$

Множитель $d\Lambda$ без труда исключается с помощью уравнения, устанавливающего непрерывность нагружения:

$$d\left(\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_2}{1-D_2}\right) = 0. \quad (2.89)$$

Учитывая, что приращения главных поврежденностей и главные приращения пластических деформаций связаны определяющими зависимостями вида

$$dD_1 = K_1 \operatorname{sgn}(de_1^P) de_1^P, \quad dD_2 = K_2 \operatorname{sgn}(de_2^P) de_2^P, \quad dD_3 = 0, \quad (2.90)$$

где определяющие функции⁸ не зависят от приращений главных напряжений и главных приращений пластических деформаций, находим

$$d\Lambda = \frac{(1-D_1)^2 [(b-1)ds_2 - ds_1]}{K_1 \operatorname{sgn}(de_1^P) s_1 + (b-1)^3 K_2 \operatorname{sgn}(de_2^P) s_2}, \quad (2.91)$$

$$b-1 = \frac{1-D_1}{1-D_2},$$

и, таким образом,

$$\frac{de_1^P}{F} = (b-1)ds_2 - ds_1. \quad (2.92)$$

Здесь F не зависит от приращений и определяется как

$$F = \frac{1-D_1}{K_1 \operatorname{sgn}(de_1^P) s_1 + (b-1)^3 K_2 \operatorname{sgn}(de_2^P) s_2}. \quad (2.93)$$

Заметим, что на основании $s_j de_j^P \geq 0$ вдоль всего процесса нагружения $d\Lambda \geq 0$, следовательно, при течении на грани призмы Треска

$$\operatorname{sgn}(de_1^P) = +1, \quad \operatorname{sgn}(de_2^P) = -1.$$

В силу ассоциированного закона течения на грани (2.88) выполняется соотношение

$$de_2^P = -(b-1)de_1^P, \quad (2.94)$$

поэтому

$$\begin{cases} \frac{de_1^P}{F} = (b-1)ds_2 - ds_1, \\ \frac{de_2^P}{F} = -(b-1)^2 ds_2 + (b-1)ds_1. \end{cases} \quad (2.95)$$

Заметим также, что условие разупрочнения при накоплении повреждений

$$\frac{\partial f}{\partial s_j} ds_j < 0$$

в случае течения на грани призмы Треска эквивалентно неравенству $(b-1)ds_2 - ds_1 > 0$, которое гарантирует выполнение неравенства диссипации $d\Lambda > 0$.

⁸ В первом приближении их можно считать постоянными. В случае течения на грани призмы Треска главное приращение de_2^P не может быть положительным. Накопление поврежденности D_2 при этом не может быть значительным и с хорошим приближением, поэтому можно полагать, что $K_2 = 0$.

Упрочнение $\frac{\partial f}{\partial s_j} ds_j > 0$ при накоплении повреждений никогда не реализуется,

поэтому условие $(b-1)ds_2 - ds_1 < 0$ вдоль действительного процесса никогда не выполняется.

Процессы, характеризуемые условием $(b-1)ds_2 - ds_1 = 0$, происходят, как это следует из соотношений ассоциированного закона течения на грани, при нулевых главных скоростях пластических деформаций и не сопровождаются ростом главных поврежденностей.⁹

2. Рассмотрим далее соотношения между главными приращениями пластических деформаций и приращениями главных напряжений при течении на ребре призмы Треска.

Ребро образовано пересечением граней и всегда можно считать, что оно задается уравнениями (2.84). Согласно ассоциированному закону течения, определяющие зависимости для ребра (2.84) есть

$$de_1^P = \frac{d\Lambda_1}{1-D_1}, \quad de_2^P = \frac{d\Lambda_2}{1-D_2}, \quad de_3^P = -\frac{d\Lambda_1}{1-D_3} - \frac{d\Lambda_2}{1-D_3}. \quad (2.96)$$

Неравенство диссипации

$$s_j de_j^P = 2k(d\Lambda_1 + d\Lambda_2) \geq 0$$

должно выполняться вдоль всего процесса нагружения.

Множители $d\Lambda_1$, $d\Lambda_2$ без труда исключаются с помощью уравнения, устанавливающего непрерывность нагружения, и закона накопления повреждений

$$dD_1 = K_1 \operatorname{sgn}(de_1^P) de_1^P, \quad dD_2 = K_2 \operatorname{sgn}(de_2^P) de_2^P, \quad dD_3 = K_3 \operatorname{sgn}(de_3^P) de_3^P.$$

Мы приводим соответствующие формулы для случая $de_1^P \geq 0$, $de_2^P \geq 0$, $de_3^P \leq 0$:

$$\begin{aligned} d\Lambda_1 = & \left[(1-D_1)^2 \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right] \left[(b_1-1) ds_3 - ds_1 \right] + \right. \\ & \left. + (1-D_2)^2 (b_1-1)^3 s_3 K_3 \left[(b_2-1) ds_3 - ds_2 \right] \right] \times \\ & \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\ d\Lambda_2 = & \left[(1-D_2)^2 \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right] \left[(b_2-1) ds_3 - ds_2 \right] + \right. \\ & \left. + (1-D_1)^2 (b_2-1)^3 s_3 K_3 \left[(b_1-1) ds_3 - ds_1 \right] \right] \times \\ & \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$b_1 - 1 = \frac{1-D_1}{1-D_3}, \quad b_2 - 1 = \frac{1-D_2}{1-D_3}.$$

Главные приращения пластических деформаций de_1^P и de_2^P выражаются через приращения главных напряжений определяющими зависимостями вида

$$\begin{aligned} \frac{de_1^P}{S_1} &= ds_3 - E_{12} ds_2 - E_{11} ds_1, \\ \frac{de_2^P}{S_2} &= ds_3 - E_{22} ds_2 - E_{21} ds_1, \end{aligned} \quad (2.97)$$

⁹ При таких процессах, однако, может происходить поворот триэдра главных напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} .

в которых

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left[(1-D_1)(b_1-1) \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right] + (1-D_2)^2 (1-D_1)^{-1} (b_1-1)^3 (b_2-1) s_3 K_3 \right] \times \\
&\quad \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\
S_2 &= \left[(1-D_2)(b_2-1) \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right] + (1-D_1)^2 (1-D_2)^{-1} (b_2-1)^3 (b_1-1) s_3 K_3 \right] \times \\
&\quad \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\
S_1 E_{11} &= \frac{(1-D_1) \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right]}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_2 E_{22} &= \frac{(1-D_2) \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right]}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_1 E_{12} &= \frac{(1-D_2)^2 (1-D_1)^{-1} (b_1-1)^3 s_3 K_3}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_2 E_{21} &= \frac{(1-D_1)^2 (1-D_2)^{-1} (b_2-1)^3 s_3 K_3}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}.
\end{aligned}$$

Для главного приращения de_3^P имеем формулу (обобщенный закон сжимаемости микроповрежденного тела)

$$-de_3^P = (b_1-1)de_1^P + (b_2-1)de_2^P \quad (2.98)$$

или

$$\begin{aligned}
-\frac{de_3^P}{S_1 S_2} &= \left[\frac{b_1-1}{S_2} + \frac{b_2-1}{S_1} \right] dS_3 - \left[\frac{b_1-1}{S_2} E_{12} + \frac{b_2-1}{S_1} E_{22} \right] dS_2 - \\
&\quad - \left[\frac{b_1-1}{S_2} E_{11} + \frac{b_2-1}{S_1} E_{21} \right] dS_1.
\end{aligned} \quad (2.99)$$

Соотношения ассоциированного закона течения для ребра (2.97), (2.99) справедливы, лишь когда наблюдается активное разупрочнение:

$$\begin{aligned}
(b_1-1)dS_3 - dS_1 &\geq 0, \\
(b_2-1)dS_3 - dS_2 &\geq 0.
\end{aligned} \quad (2.100)$$

Режим нагружения

$$\begin{aligned}
(b_1-1)dS_3 - dS_1 &= 0, \\
(b_2-1)dS_3 - dS_2 &= 0
\end{aligned} \quad (2.101)$$

характеризуется тем, что $de_j^P = 0$ и $dD_j = 0$.¹⁰

Уравнения ассоциированного закона течения для грани (2.95) и ребра (2.97), (2.99) не позволяют, в силу линейной зависимости правых частей, найти обратные соотношения, т. е. выразить приращения главных напряжений через главные приращения пластических деформаций.

¹⁰ При таких режимах течения, однако, может происходить поворот главных осей напряжений, т. е. поворот триэдра \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} .

3. Связанное плоское деформированное состояние

Плоское деформированное состояние характеризуется условием $de_3 = 0$. В плоскости течения x_1, x_2 имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое – номером 2. Если считать, что s_1 – наибольшее главное напряжение, то обобщенное условие пластичности Треска в состоянии плоской деформации выражается уравнением

$$\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_2}{1-D_2} = 2k, \quad (3.1)$$

где k , по-прежнему, есть предел текучести при сдвиге.

Обозначая через q угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$k_1 = k_{13} = -d_1q, \quad k_2 = k_{23} = d_2q.$$

Единственное деривационное соотношение в этом случае имеет форму

$$d_1k_2 + d_2k_1 + k_1^2 + k_2^2 = 0.$$

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе–Максвелла

$$d_1s_1 + k_2(s_1 - s_2) = 0,$$

$$d_2s_2 + k_1(s_2 - s_1) = 0.$$

Пренебрегая упругими деформациями, приведем основные соотношения для приращений.

Уравнения равновесия в приращениях

$$\begin{cases} d_1ds_1 + k_2(ds_1 - ds_2) + (2k_1 + d_2)[(ds_1 - ds_2)dw] = 0, \\ d_2ds_2 + k_1(ds_2 - ds_1) + (2k_2 + d_1)[(ds_1 - ds_2)dw] = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $dw = dw_3$ определяет малый поворот главных осей напряжений в плоскости течения при догружении.

Формулы Коши, связывающие главные приращения пластических деформаций с приращениями перемещений, в случае плоской деформации имеют следующий вид (см. (2.44), (2.45)):

$$\begin{aligned} de_1^P &= k_1 du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \\ de_2^P &= k_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Условие соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций (см. (2.46)) приводит к соотношению

$$d_1 du_{\langle 2 \rangle} - k_1 du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - k_2 du_{\langle 2 \rangle} = 0. \quad (3.4)$$

Условие совместности для приращений поворотов (2.29) в случае плоской связанной задачи удовлетворяется тождественно.

Уравнение совместности (упругими деформациями пренебрегаем $de_j = de_j^P$)

$$\begin{aligned} -d_2 d_2 de_1 - (b-1)d_1 d_1 de_1 - ((1+b)k_2 + 2d_1 b)d_1 de_1 + \\ + (1+b)k_1 d_2 de_1 + (d_1 d_1 b + k_2 d_1 b - \\ - k_1 d_2 b - b d_1 k_2 + b d_2 k_1 - b k_2^2 + b k_1^2) de_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При плоском пластическом течении главные приращения пластических деформаций имеют разные знаки:

$$de_1^P \geq 0, \quad de_2^P \leq 0.$$

Ассоциированный закон течения

$$\begin{cases} (b-1)de_1 + de_2 = 0, \\ \frac{de_1}{F} = (b-1)ds_2 - ds_1, \end{cases} \quad (3.6)$$

где F не зависит от приращений

$$F = \frac{(1-D_1)}{K_1s_1 - (b-1)^3K_2s_2}, \quad (3.7)$$

$$b-1 = \frac{1-D_1}{1-D_2}.$$

Закон накопления повреждений есть (K_1, K_2 – положительные постоянные)

$$\begin{cases} dD_1 = K_1de_1^p, \\ dD_2 = -K_2de_2^p. \end{cases} \quad (3.8)$$

Полученная система соотношений замкнута, например, относительно пяти приращений $ds_1, ds_2, dw, de_1, de_2$, поскольку для их определения имеется ровно пять уравнений.

Уравнение совместности (3.5) относительно главного приращения de_1 можно формально рассматривать независимо от остальных соотношений плоской задачи. Главная часть этого уравнения есть:

$$\frac{1}{g_{22}}\partial_2\partial_2de_1 - \frac{1}{g_{11}}(b-1)\partial_1\partial_1de_1 + \mathbf{K} = 0. \quad (3.9)$$

Характеристическое уравнение, которое получается по главной части (3.9), указывает на его гиперболичность. Характеристики плоской связанной задачи

$$\frac{\sqrt{g_{11}}dx^1}{\sqrt{g_{22}}dx^2} = \pm \sqrt{\frac{1-D_1}{1-D_2}} \quad (3.10)$$

совпадают с линиями максимального касательного напряжения только в случае изотропного в плоскости течения распределения поврежденности $D_1 = D_2$.

4. Связанное осесимметричное состояние

Связанное осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона–Треска, можно разделить на следующие два типа:¹¹

1) эквивалентное тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным эквивалентным напряжением, а эквивалентные меридиональные главные напряжения равны;

2) эквивалентное напряжение равно одному из меридиональных главных эквивалентных напряжений, эквивалентное максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k .

¹¹ Эквивалентное тангенциальное напряжение всегда будет главным эквивалентным напряжением при связанном осесимметричном состоянии.

Второй случай – обобщенное состояние «полной пластичности» Хаара–Кармана. Если присвоить эквивалентному тангенциальному главному напряжению второй номер и обозначить через s_3^{ϑ} наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных эквивалентных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему обобщенное состояние «полной пластичности»:

$$s_1^{\vartheta} = s_2^{\vartheta} = s_3^{\vartheta} \pm 2k,$$

где k – предел текучести при чистом сдвиге.

В случае осесимметричной деформации удобно ввести цилиндрическую систему координат r, j, z .

Обобщенное условие пластичности Треска в состоянии осесимметричной деформации примем в виде

$$\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_3}{1-D_3} = 2k, \quad \frac{s_2}{1-D_2} - \frac{s_3}{1-D_3} = 2k. \quad (4.1)$$

В плоскости $j = \text{const}$ имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий, соответствующих первому и третьему главным направлениям. Введем угол c так, чтобы наклон (к горизонтальной оси) траектории первого семейства был равен $p - c$.

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$d_2 = 0, \quad k_{23} = \frac{\cos c}{r}, \quad k_{21} = \frac{\sin c}{r}, \quad k_{31} = 0, \quad k_{13} = 0.$$

Деривационные соотношения выражаются либо группой уравнений

$$\begin{aligned} d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 &= 0, \\ d_1 k_{23} + k_{23}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\ d_3 k_{21} + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\ d_3 k_{23} &= k_{21} (k_{32} - k_{23}), \end{aligned}$$

либо группой уравнений

$$\begin{aligned} d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 &= 0, \\ d_1 k_{23} + k_{23}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\ d_3 k_{21} + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\ d_1 k_{21} &= k_{23} (k_{12} - k_{21}). \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений можно задать в форме

$$\begin{aligned} s_{\langle rr \rangle} &= p + t \cos 2c, \\ s_{\langle zz \rangle} &= p - t \cos 2c, \\ s_{\langle jj \rangle} &= s_2, \\ s_{\langle rz \rangle} &= -t \sin 2c, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(s_1 + s_3), \\ t &= \frac{1}{2}(s_1 - s_3). \end{aligned}$$

Главные напряжения определяются как

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2}(s_{\langle rr \rangle} + s_{\langle zz \rangle}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(s_{\langle rr \rangle} - s_{\langle zz \rangle})^2 + 4s_{\langle rz \rangle}^2}. \quad (4.3)$$

Уравнения равновесия, сформулированные относительно изостатической сетки, есть

$$\begin{aligned} d_1 s_1 + k_{23}(s_1 - s_2) + k_{32}(s_1 - s_3) &= 0, \\ d_3 s_3 + k_{12}(s_3 - s_1) + k_{21}(s_3 - s_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} k_{12} &= \frac{\text{ctg} c}{r} d_1 r + d_1 c - \frac{\cos c \text{ctg} c}{r} = d_1 c, \\ k_{32} &= \frac{\text{tg} c}{r} d_3 r - d_3 c - \frac{\sin \text{ctg} c}{r} = -d_3 c, \end{aligned}$$

уравнения равновесия (4.4) можно представить в форме

$$\begin{aligned} d_1 s_1 + \frac{\cos c}{r} (s_1 - s_2) - (s_1 - s_3) d_3 c &= 0, \\ d_3 s_3 + \frac{\sin c}{r} (s_3 - s_2) - (s_1 - s_3) d_1 c &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнения равновесия в приращениях главных напряжений, сформулированные в изостатической сетке, можно получить в следующем виде:

$$\begin{cases} d_1 ds_1 + k_{23}(ds_1 - ds_2) + k_{32}(ds_1 - ds_3) + (2k_{12} + k_{21} + d_3)(s_3 - s_1)dw = 0, \\ d_3 ds_3 + k_{12}(ds_3 - ds_1) + k_{21}(ds_3 - ds_2) + (2k_{32} + k_{23} + d_1)(s_3 - s_1)dw = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $dw = dw_2$ – поворот главных осей напряжений 1 и 3 (в плоскости $j = \text{const}$) при догрузении.

Компоненты осесимметричного тензора приращения деформации можно задать в форме

$$\begin{aligned} de_{\langle rr \rangle} &= dl + dm \cos 2c, \\ de_{\langle jj \rangle} &= de_2, \\ de_{\langle zz \rangle} &= dl - dm \cos 2c, \\ de_{\langle rz \rangle} &= -dm \sin 2c, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} dl &= \frac{1}{2}(de_1 + de_3), \\ dm &= \frac{1}{2}(de_1 - de_3). \end{aligned}$$

Главные приращения деформаций вычисляются по формуле

$$de_1, de_2 = \frac{1}{2}(de_{\langle rr \rangle} + de_{\langle zz \rangle}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(de_{\langle rr \rangle} - de_{\langle zz \rangle})^2 + 4(de_{\langle rz \rangle})^2}. \quad (4.8)$$

Соотношения Коши, связывающие приращения деформаций и перемещений, в осесимметричном случае сводятся к

$$\begin{aligned} de_{\langle rr \rangle} &= \frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial r}, \quad de_{\langle jj \rangle} = \frac{du_{\langle r \rangle}}{r}, \quad de_{\langle zz \rangle} = \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial z}, \\ 2de_{\langle rz \rangle} &= \frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial z} + \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Условие совместности для приращений поворотов в случае осесимметричной деформации удовлетворяется тождественно.

Учитывая, что $S_{12} = 0$, $S_{23} = 0$, $S_{31} = 0$ удовлетворяются тождественно в силу $dw_1 = 0$, $dw_3 = 0$, $k_{31} = 0$, $k_{13} = 0$, $d_2 = 0$ условия совместности приращений деформаций (упругими деформациями пренебрегаем $de_j = de_j^P$), выражаются уравнениями относительно изостатических координат:

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 de_2 + k_{21}^2 (de_3 - de_2) + d_3 [k_{21} (de_3 - de_2)] - k_{23} k_{32} (de_2 + de_3 - 2de_1) - \\
&\quad - k_{21} d_3 de_2 - k_{32} d_1 de_2 - k_{23} d_1 de_3 = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 de_1 - d_1 d_1 de_3 + (k_{32}^2 - k_{12}^2) (de_1 - de_3) + d_1 [k_{32} (de_1 - de_3)] - \\
&\quad - k_{12} d_3 de_1 - k_{32} d_1 de_3 - d_3 [k_{12} (de_1 - de_3)] = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 de_2 - k_{23}^2 (de_2 - de_1) - d_1 [k_{23} (de_2 - de_1)] - k_{21} k_{12} (de_1 + de_2 - 2de_3) - \\
&\quad - k_{23} d_1 de_2 - k_{21} d_3 de_1 - k_{12} d_3 de_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Наконец, учитывая, что

$$k_{12} = d_1 c, \quad k_{32} = -d_3 c, \quad k_{21} = \frac{\sin c}{r}, \quad k_{23} = \frac{\cos c}{r},$$

а также

$$\begin{aligned}
d_3 k_{21} &= k_{23} d_3 c - k_{21}^2, \\
d_1 k_{23} &= -k_{21} d_1 c - k_{23}^2,
\end{aligned}$$

получаем условия совместности в виде

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 de_2 + k_{23} (de_3 - de_2) d_3 c + k_{21} (d_3 de_3 - d_3 de_2) - k_{23} k_{32} (de_2 + de_3 - 2de_1) - \\
&\quad - k_{21} d_3 de_2 - k_{32} d_1 de_2 - k_{23} d_1 de_3 = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 de_1 - d_1 d_1 de_3 + (k_{32}^2 - k_{12}^2 - d_1 d_3 c - d_3 d_1 c) (de_1 - de_3) - k_{12} d_3 de_1 - \\
&\quad - k_{32} d_1 de_3 + k_{32} (d_1 de_1 - d_1 de_3) - k_{12} (d_3 de_1 - d_3 de_3) = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 de_2 + k_{21} (de_2 - de_1) d_1 c - k_{23} (d_1 de_2 - d_1 de_1) - k_{21} k_{12} (de_1 + de_2 - 2de_3) - \\
&\quad - k_{21} d_3 de_1 - k_{12} d_3 de_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ассоциированный закон течения¹²

$$\begin{aligned}
\frac{de_1^P}{S_1} &= dS_3 - E_{12} dS_2 - E_{11} dS_1, \\
\frac{de_2^P}{S_2} &= dS_3 - E_{22} dS_2 - E_{21} dS_1, \\
-de_3^P &= (b_1 - 1) de_1^P + (b_2 - 1) de_2^P,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

¹² Формулы ассоциированного закона течения записаны для случая $de_1^P \geq 0$, $de_2^P \geq 0$, $de_3^P \leq 0$.

В котором

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left[(1-D_1)(b_1-1) \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right] + (1-D_2)^2 (1-D_1)^{-1} (b_1-1)^3 (b_2-1) s_3 K_3 \right] \times \\
&\quad \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\
S_2 &= \left[(1-D_2)(b_2-1) \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right] + (1-D_1)^2 (1-D_2)^{-1} (b_2-1)^3 (b_1-1) s_3 K_3 \right] \times \\
&\quad \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\
S_1 E_{11} &= \frac{(1-D_1) \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right]}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_2 E_{22} &= \frac{(1-D_2) \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right]}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_1 E_{12} &= \frac{(1-D_2)^2 (1-D_1)^{-1} (b_1-1)^3 s_3 K_3}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_2 E_{21} &= \frac{(1-D_1)^2 (1-D_2)^{-1} (b_2-1)^3 s_3 K_3}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
b_1 - 1 &= \frac{1-D_1}{1-D_3}, \quad b_2 - 1 = \frac{1-D_2}{1-D_3}.
\end{aligned}$$

Закон накопления повреждений есть (K_1, K_2, K_3 – положительные постоянные)

$$\begin{cases} dD_1 = K_1 de_1^P, \\ dD_2 = K_2 de_2^P, \\ dD_3 = -K_3 de_3^P. \end{cases} \quad (4.13)$$

Используя уравнение ассоциированного закона течения, которое устанавливает связь между de_1^P, de_2^P, de_3^P , перепишем соотношения совместности приращений деформаций (4.11)

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 de_2 + k_{23} (b_1 - 1) d_1 de_1 + (k_{23} (b_2 - 1) - k_{32}) d_1 de_2 - k_{21} (b_1 - 1) d_3 de_1 - \\
&\quad - k_{21} (b_2 + 1) d_3 de_2 + (k_{23} d_1 b_1 + k_{23} k_{32} (3 - b_1) - k_{21} d_3 b_1 - k_{23} (b_1 - 1) d_3 c) de_1 + \\
&\quad + (k_{23} d_1 b_2 + k_{23} k_{32} (2 - b_1) - k_{21} d_3 b_2 - k_{23} b_2 d_3 c) de_2 = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 de_1 + (b_1 - 1) d_1 d_1 de_1 + (b_2 - 1) d_1 d_1 de_2 + (2d_1 b_1 + k_{32} (2b_1 - 1)) d_1 de_1 + \\
&\quad + 2(d_1 b_2 + k_{32} (b_2 - 1)) d_1 de_2 - k_{12} (1 - b_1) d_3 de_1 - k_{12} (b_2 - 1) d_3 de_2 + \\
&\quad + (d_1 d_1 b_1 + b_1 (k_{32}^2 - k_{12}^2 - d_1 d_3 c - d_3 d_1 c) + 2k_{32} d_1 b_1 - k_{12} d_3 b_1) de_1 + \\
&\quad + (d_1 d_1 b_2 + (b_2 - 1) (k_{32}^2 - k_{12}^2 - d_1 d_3 c - d_3 d_1 c) + 2k_{32} d_1 b_2 - k_{12} d_3 b_2) de_2 = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 de_2 + k_{21} (de_2 - de_1) d_1 c - k_{23} (d_1 de_2 - d_1 de_1) - \\
&\quad - k_{21} k_{12} (de_1 + de_2 - 2(b_1 - 1) de_1 - 2(b_2 - 1) de_2) - k_{21} d_3 de_1 - k_{12} d_3 de_2 = 0.
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнения совместности $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$ системы (4.14) относительно главных приращений de_1 , de_2 можно формально рассматривать независимо от остальных соотношений осесимметричной задачи. Главная часть этой системы имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{g_{33}} \partial_3 \partial_3 de_2 = \mathbf{K} , \\ -\frac{1}{g_{33}} \partial_3 \partial_3 de_1 + (b_1 - 1) \frac{1}{g_{11}} \partial_1 \partial_1 de_1 + (b_2 - 1) \frac{1}{g_{11}} \partial_1 \partial_1 de_2 = \mathbf{K} . \end{cases} \quad (4.15)$$

Характеристическое уравнение может быть представлено в форме

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{g_{33}} n_3^2 \\ -\frac{1}{g_{33}} n_3^2 + (b_1 - 1) \frac{1}{g_{11}} n_1^2 & (b_2 - 1) \frac{1}{g_{11}} n_1^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{g_{33}} n_3^2 \left(-\frac{1}{g_{33}} n_3^2 + (b_1 - 1) \frac{1}{g_{11}} n_1^2 \right) = 0 ,$$

откуда следует

$$\frac{g_{11}}{g_{33}} \frac{n_3^2}{n_1^2} = (b_1 - 1) .$$

Характеристическое уравнение имеет два действительных корня, что указывает на его гиперболичность. Характеристики осесимметричной связанной задачи

$$\frac{\sqrt{g_{11}} dx^1}{\sqrt{g_{33}} dx^3} = \pm \sqrt{\frac{1 - D_1}{1 - D_3}} \quad (4.15)$$

совпадают с линиями максимального касательного напряжения только в случае изотропного в меридиональной плоскости распределения поврежденности $D_1 = D_3$.

5. Заключение

Таким образом, получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе относительно приращений главных напряжений, главных скоростей пластических деформаций и приращений перемещений, что наиболее удобно для представления и анализа основных соотношений связанной задачи. Рассмотрены случаи связанной плоской пластической деформации и связанного осесимметричного состояния и показано, что система основных соотношений относится с гиперболическому типу, что позволяет обобщить понятие поля скольжения на случаи указанных связанных состояний. Линии скольжения для связанного состояния наклонены иначе, чем линии скольжения при чисто идеально пластическом течении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блох, В. И.* Теория упругости / В. И. Блох. – Харьков : Изд-во Харьковского ун-та, 1964. – 484 с.
2. *Мураками, С.* Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности / С. Мураками, Ю. Н. Радаев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 1996. – № 4. – С. 93–110.
3. *Онат, Е.* Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца / Е. Онат, В. Прагер // Механика : сб. переводов. – М. : Изд-во АН СССР, – 1955. – № 4(32). – С. 93–97.
4. *Папкович, П. Ф.* Теория упругости. – М. ; Л. : Оборонгиз, 1939. – 640 с.
5. *Радаев, Ю. Н.* Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. – 1999. – № 4(14). – С. 70–93.
6. *Радаев, Ю. Н.* Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности / Ю. Н. Радаев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2000. – № 5. – С. 27–45.
7. *Радаев Ю.Н.* Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. – 1998. – № 2(8). – С. 79–105.
8. *Love, A. E. H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity / A. E. H. Love. – New York : Dover Publications, 1944. – 643 p.
9. *Malvern, L. E.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium / L. E. Malvern. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969. – 714 p.
10. *Maugin, G. A.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. A. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.
11. *Murakami, S.* Mechanical modeling of material damage / S. Murakami // J. Appl. Mech. – 1988. – V. 55. – No. 2. – P. 280–286.
12. *Radayev, Y. N.* On directional average of the local anisotropic damage / Y. N. Radayev // Int. J. Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 293–307.
13. *Radayev, Y. N.* Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics / Y. N. Radayev, S. Murakami, K. Hayakawa // Trans. Japan Soc. Mech. Engrn. – 1944. – V. 60 A. – No. 580. – P. 68–76.