

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Сибирский государственный аэрокосмический университет)

В статье изучаются уравнения двумерной теории идеальной пластичности, описывающие стационарное напряженное состояние. Для исследуемых уравнений найдена группа точечных симметрий и на ее основе построены новые точные решения. Эти решения можно использовать для описания пластического состояния материала, сжимаемого жесткими плитами.

Рассмотрим систему уравнений анизотропной идеальной пластичности в плоском случае следующего вида [3]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$a_{11}^2 (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4a_{12}^2 \tau_{xy}^2 = 1, \quad (2)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненты тензора напряжений, a_{11} , a_{12} – параметры, характеризующие состояние анизотропии.

Сделаем следующую замену переменных:

$$\sigma'_x = a_{11} \sigma_x, \quad \sigma'_y = a_{11} \sigma_y, \quad \tau'_{xy} = a_{11} \tau_{xy}.$$

Система (1)–(2) переписется в виде

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + 4 \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} \tau'^2_{xy} = 1. \quad (4)$$

Обозначим $\frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} = \beta^2$ и сделаем следующую замену переменных:

$$\sigma'_x = \sigma - \sin 2\theta, \quad \sigma'_y = \sigma + \sin 2\theta, \quad \tau'_{xy} = \beta \cos 2\theta.$$

В результате система (3)–(4) запишется в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x - 2(\theta_x \cos 2\theta + \beta\theta_y \sin 2\theta) &= 0, \\ \sigma_y - 2(\beta\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta) &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь и далее индекс внизу обозначает производную по соответствующей переменной. Нетрудно показать, что система (5) имеет две характеристики вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-\cos 2q \pm \sqrt{\cos^2 2q + b^2 \sin^2 2q}}{b \sin 2q}\quad (6)$$

и соотношение на них

$$d\sigma m 2\sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta} d\theta = 0.\quad (7)$$

Интегрируя (7), получаем

$$\sigma m E(2\theta, \sqrt{1 - \beta^2}) = \text{const},$$

где $E(2\theta, \sqrt{1 - \beta^2})$ – эллиптический интеграл второго рода.

1. Групповые свойства уравнений (3).

В этом пункте найдем группу непрерывных преобразований, допускаемых системой (3) в смысле Ли.

Пользуясь методикой, описанной, например в [1], находим группу непрерывных преобразований, которые порождаются следующими операторами:

$$\begin{aligned}X_1 &= x \partial_x + y \partial_y, \\ X_2 &= \partial_\sigma, \quad X_+ = \xi(\sigma, \theta) \partial_x + \eta(\xi, \theta) \partial_y,\end{aligned}\quad (8)$$

где (ξ, η) есть произвольное решение системы уравнений

$$\begin{aligned}\xi_\theta - 2(\xi_\sigma \cos 2\theta - \beta\eta_\sigma \sin 2\theta) &= 0, \\ \eta_\theta - 2(\beta\xi_\sigma \sin 2\theta + \eta_\sigma \cos 2\theta) &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Операторы X_1, X_2, X_+ порождают бесконечномерную алгебру Ли со следующей таблицей умножения:

$$[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_+] = X_+.$$

Произведение $[X_2, X_+]$, как нетрудно проверить, дают новые операторы вида X_+ , а именно

$$[X_2, X_+] = \xi_\sigma \partial_x + \eta_\sigma \partial_y.$$

Этот факт позволяет сформулировать две леммы.

Лемма 1. Операторы вида X_+ порождают бесконечномерный идеал алгебры Ли (8).

Лемма 2. Если (ξ, η) – произвольное решение системы уравнений (9), то $(\xi_\sigma, \eta_\sigma)$ решение этой же системы.

Выясним смысл допускаемой алгебры Ли.

Каждый оператор из (8) порождает однопараметрическую группу преобразований.

Построим эти группы.

Оператор X_1 порождает группу растяжений по координатам

$$x' = x e^{a}, \quad y' = y e^{a}.$$

Здесь и далее a – групповой параметр.

Оператор X_2 порождает группу сдвигов

$$\sigma' = \sigma + a.$$

Операторы вида X_+ порождают бесконечное множество преобразований вида

$$x' = x + a\xi(\sigma, \theta), \quad y' = y + a\eta(\sigma, \theta).$$

2. С помощью найденных симметрий построим некоторые инвариантные решения системы (3).

а) Решение на подалгебре $\partial_x + b \partial_y$ является аналогом известного решения Прандтля для изотропной среды. Его следует искать в виде

$$\sigma = bx + f(y), \quad \theta = \theta(y).$$

Подставляя эти соотношения в (5), без труда получаем

$$\theta = -\frac{1}{2} \arccos \frac{by}{\beta}, \quad \cos 2\theta = -\frac{by}{\beta}, \quad \sigma = bx - \sin 2\theta. \quad (10)$$

Теперь найдем линии скольжения.

Дифференцируя равенство $\cos 2\theta = -\frac{by}{\beta}$ по x , получаем

$$\frac{b}{\beta} \frac{dy}{dx} = 2\theta_x \sin 2\theta.$$

Теперь с помощью (6) находим дифференциальные уравнения линий скольжения

$$\frac{2\beta}{b} \theta_x \sin 2\theta = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}}{\beta \sin 2\theta}$$

или

$$-\int \frac{2\beta}{b} \frac{\sin^2 2\theta d\theta}{\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}} = x + C, \quad (11)$$

$$y = -\frac{\beta}{b} \cos 2\theta.$$

Это параметрические уравнения линий скольжения. Построим эти линии для случая $b=1$ и различных значениях β . Они изображены на рис. 1–4.

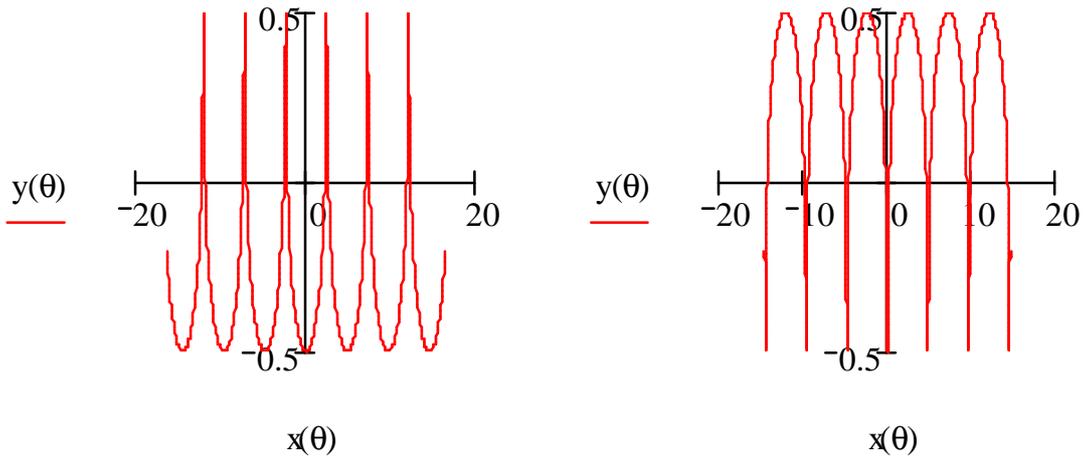


Рис. 1. Линии скольжения (11) при $b=1$ и $b=0,5$

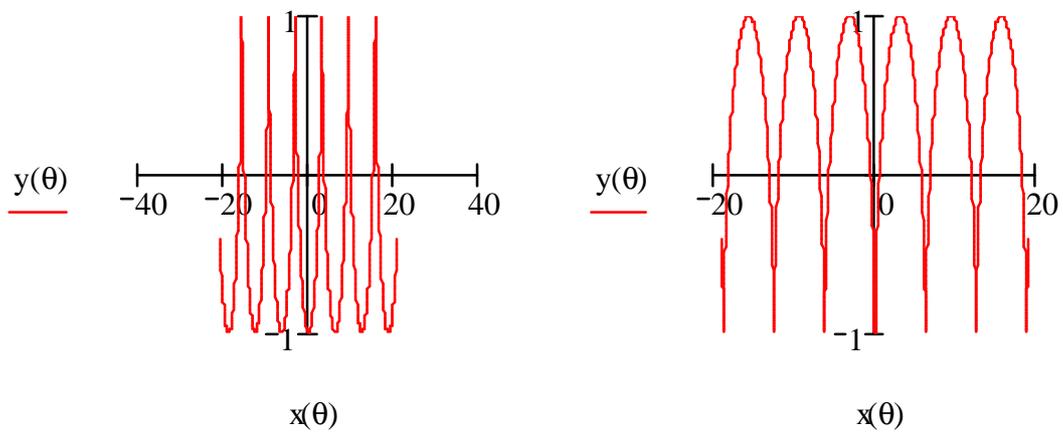


Рис. 2. Линии скольжения (II) при $b=1$ и $b=1$

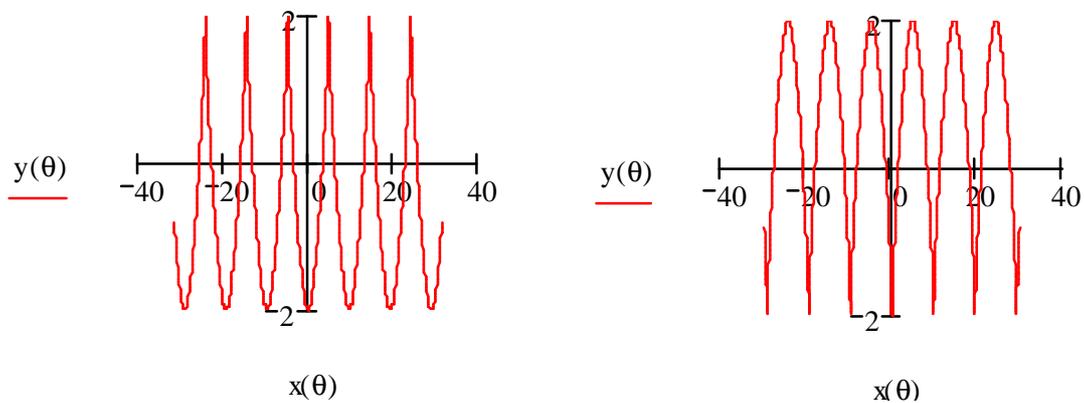


Рис. 3. Линии скольжения (II) при $b=1$ и $b=2$

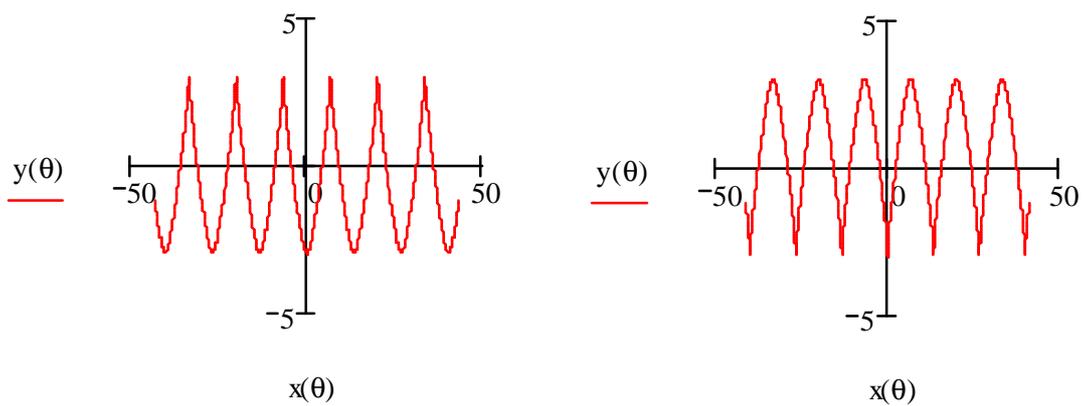


Рис. 4. Линии скольжения (II) при $b=1$ и $b=3$

б) Ищем инвариантное решение на подалгебре X_+ . Инварианты оператора X_+ имеют вид σ , θ , $\xi y - \eta x$. Поэтому решение следует искать в виде $\sigma = f(\xi y - \eta x)$, $\theta = g(\xi y - \eta x)$. Дифференцируем эти соотношения по x и y . Имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= f'[\xi_\sigma \sigma_x y + \xi_\theta \theta_x y - \eta - \eta_\sigma \sigma_x x - \eta_\theta \theta_x x], \\ \theta_x &= g'[\xi_\sigma \sigma_x y + \xi_\theta \theta_x y - \eta - \eta_\sigma \sigma_x x - \eta_\theta \theta_x x], \\ \sigma_y &= f'[\xi_\sigma \sigma_x y + \xi_\theta \theta_x y - \eta - \eta_\sigma \sigma_x x - \eta_\theta \theta_x x], \\ \theta_y &= g'[\xi_\sigma \sigma_x y + \xi_\theta \theta_x y - \eta - \eta_\sigma \sigma_x x - \eta_\theta \theta_x x].\end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно σ_x , θ_x , σ_y , θ_y , получаем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{-\eta f'}{1 - f'(\xi_\sigma y - \eta_\sigma x) - g'(\xi_\theta y - \eta_\theta x)}, \\ \theta_x &= \frac{-\eta g'}{1 - f'(\xi_\sigma y - \eta_\sigma x) - g'(\xi_\theta y - \eta_\theta x)}, \\ \sigma_y &= \frac{\xi f'}{1 - f'(\xi_\sigma y - \eta_\sigma x) - g'(\xi_\theta y - \eta_\theta x)}, \\ \theta_y &= \frac{\xi g'}{1 - f'(\xi_\sigma y - \eta_\sigma x) - g'(\xi_\theta y - \eta_\theta x)}.\end{aligned}$$

Подставляя формулы для σ_x , θ_x , σ_y , θ_y в уравнение (5), имеем

$$\begin{aligned}-\eta f' - 2(-\eta g' \cos 2\theta + \xi g' \beta \sin 2\theta) &= 0, \\ \xi f' - 2(-\beta \eta g' \sin 2\theta - \xi g' \cos 2\theta) &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Система уравнений (12) – однородная система уравнений относительно неизвестных f' и g' . Чтобы она имела нетривиальное решение, необходимо потребовать равенство нулю ее определителя, следовательно,

$$\Delta = \eta^2 \beta \sin 2\theta + 2\eta \xi \cos 2\theta - \xi^2 \beta \sin 2\theta = 0$$

или

$$b\left(\frac{h}{x}\right)^2 \sin 2q + 2\left(\frac{h}{x}\right) \cos 2q - b \sin 2q = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}}{\beta \sin 2\theta}.$$

Отсюда следует

$$\eta = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}}{\beta \sin 2\theta} \xi.\tag{13}$$

Поскольку η и ξ есть решение системы (9), то подставим (13) в систему уравнений (9). Получаем

$$\xi_\theta - 2 \xi_\sigma \cos 2\theta - \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}}{\sin 2\theta} \xi_\sigma = 0,\tag{14}$$

$$\eta_\theta - 2 \frac{\beta^2 \sin^2 2\theta}{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}} \eta_\sigma + \eta_\sigma \cos 2\theta = 0.$$

Эти уравнения служат для определения функций ξ и η .

Замечание. Если $\beta = 1$, что соответствует изотропному случаю, то уравнение (14) приводится к виду $\xi_\theta - 2k\xi_\sigma = 0$, $\eta_\theta - 2k\eta_\sigma = 0$.

Лемма 3. Система уравнений (13)–(14) совместна тогда и только тогда, когда $\xi = \eta = 0$.

Особенно легко это можно доказать в случае $\beta = 1$.

Поэтому нетривиальных решений инвариантных относительно подалгебры X_+ не существует.

3. Эволюция решений уравнения (5).

В этом пункте будут приведены новые решения уравнения (5) на основе решения (10). Эти новые решения строятся преобразованием симметрий, которые порождаются оператором X_+ и действуют на решение (10). Преобразование симметрии обладает замечательным свойством: если $(\sigma(x, y), \theta(x, y))$ есть некоторое решение уравнения (5), то $(s(x', y'), q(x', y'))$, где

$$x' = x + ax(q, s), \quad y' = y + ah(q, s); \quad (15)$$

есть также решение этого уравнения в том и только том случае, когда (ξ, η) есть некоторое решение уравнения (9). Здесь a – некоторый параметр. Более того, имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Под действием преобразований симметрии характеристики уравнения (5) преобразуются в характеристики этой же системы уравнений.

Для реализации вышеизложенного нам необходимо найти решения системы линейных дифференциальных уравнений (9). Из вида системы (9) следует, что решение системы (9) можно искать в виде

$$\xi = \sigma + f(\theta), \quad \eta = \sigma + g(\theta); \quad (16)$$

$$\xi = f(\theta) \exp \alpha \sigma, \quad \eta = g(\theta) \exp \alpha \sigma; \quad (17)$$

$$\xi = f_1(\theta) \sin \alpha \sigma + f_2(\theta) \cos \alpha \sigma; \quad (18)$$

$$\eta = g_1(\theta) \sin \alpha \sigma + g_2(\theta) \cos \alpha \sigma; \quad (19)$$

$$\xi = f_1(\theta) \operatorname{sh} \alpha \sigma + f_2(\theta) \operatorname{ch} \alpha \sigma; \quad (20)$$

$$\eta = g_1(\theta) \operatorname{sh} \alpha \sigma + g_2(\theta) \operatorname{ch} \alpha \sigma. \quad (21)$$

Здесь f, g, f_i, g_i и параметр α определяются из системы уравнений (9).

Лемма 4. Решение уравнения (9) в форме (16) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma + \sin 2\theta + \beta \cos 2\theta, \\ \eta &= \sigma + \sin 2\theta - \beta \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Лемма 5. Решение уравнения (9) в форме (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \beta (\cos \theta + \sin \theta) \exp\left(\pm \frac{\sigma}{2}\right), \\ \eta &= (-\cos \theta + \sin \theta) \exp\left(\pm \frac{\sigma}{2}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Кратко обоснуем выбор формы решения (23). После подстановки (17) в (9) получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поскольку коэффициенты этих уравнений – тригонометрические функции, то естественно искать решение в виде

$$f = C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta, \quad g = C_3 \cos n\theta + C_4 \sin n\theta.$$

При всех значениях n , кроме $n = \pm 1$, на четыре неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4 получаем 6 уравнений. Это определило выбор n .

Далее используем метод неопределенных коэффициентов, находим решение (23).

Замечание. Решение системы (9) в виде (18)–(21) будут приведены в будущих работах.

Под действием преобразований (15) решение (10) перейдет в следующее:

$$\cos 2\theta = -\frac{by + a\eta}{\beta}, \quad \sigma = b(x + a\xi) - \sin 2\theta.$$

Параметрическая форма линий скольжения для этого решения имеет вид

$$- \int \frac{2\beta}{b} \frac{\sin^2 2\theta d\theta}{\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}} = x + a\xi,$$

$$y + a\eta = -\frac{\beta}{b} \cos 2\theta.$$

Графики линий скольжения для решения (22) при $\beta=1,5$ и различных значениях a приведены на рис. 5–8.

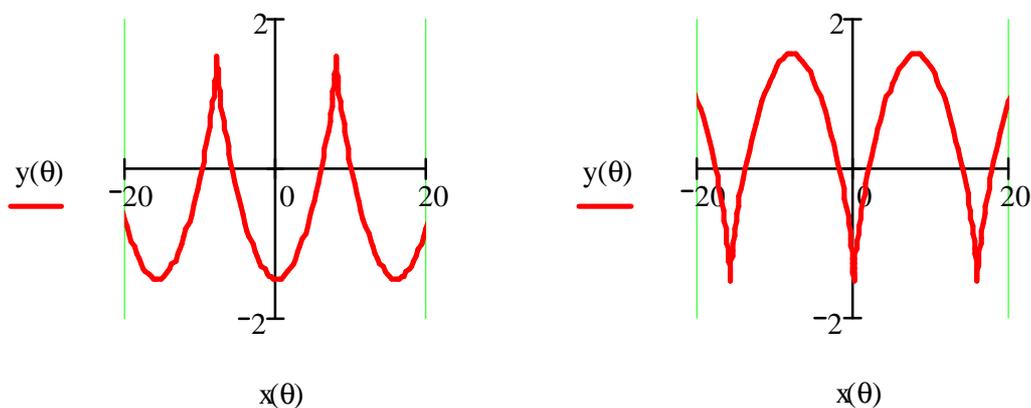


Рис. 5. Линии скольжения (22) при $b=1,5$ и $a=0,01$

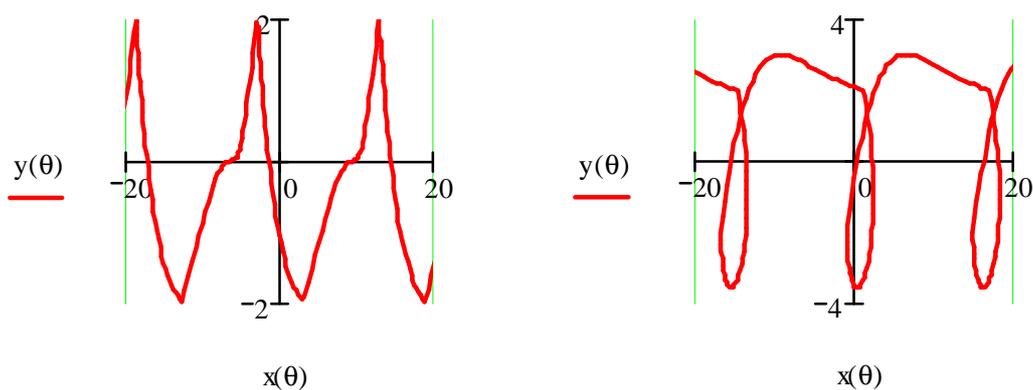


Рис. 6. Линии скольжения (22) при $b=1,5$ и $a=1$

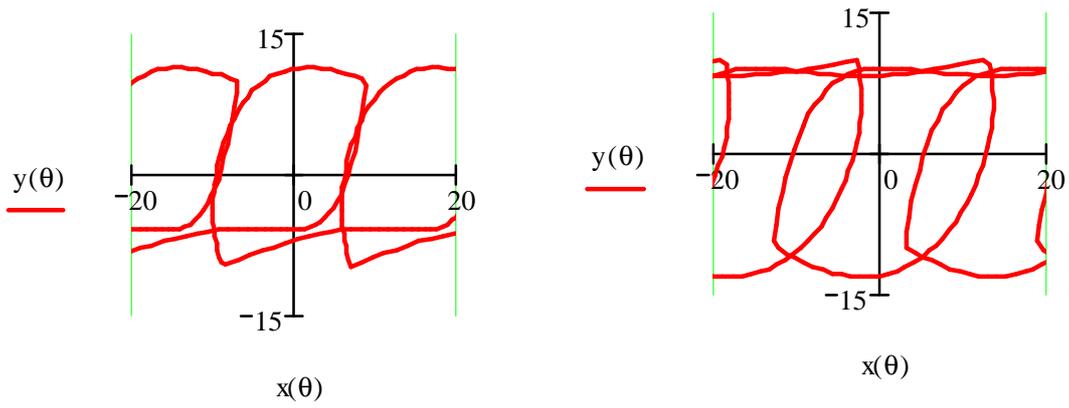


Рис. 7. Линии скольжения (22) при $b=1,5$ и $a=5$

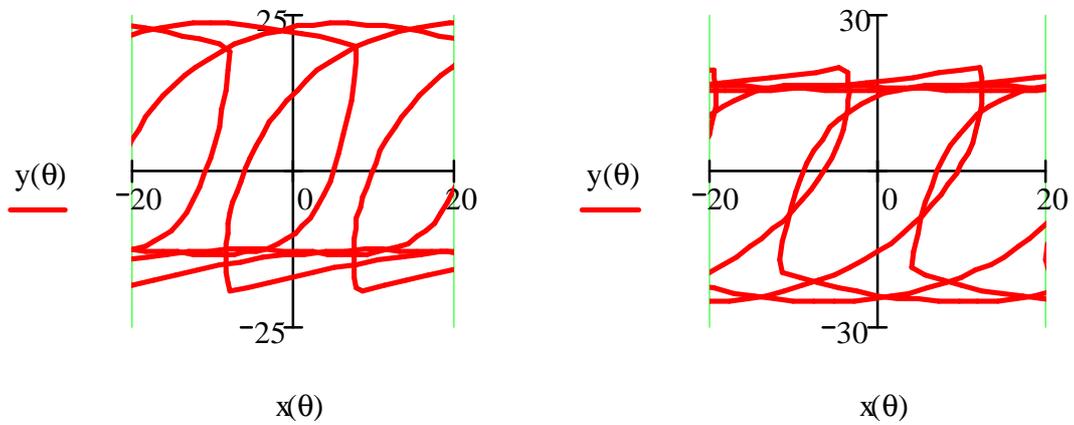


Рис. 8. Линии скольжения (22) при $b=1,5$ и $a=10$

Графики линий скольжения для решения (23) при $\beta=1,5$ и различных значениях a приведены на рис. 9–14.

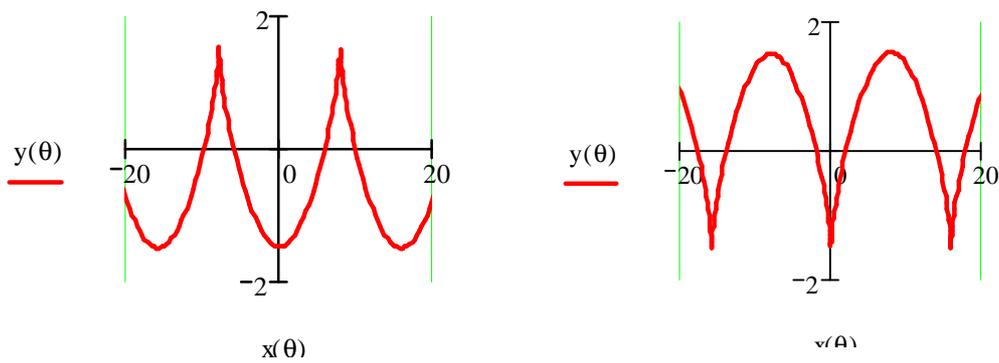


Рис. 9. Линии скольжения (23) при $b=1,5$ и $a=0,01$

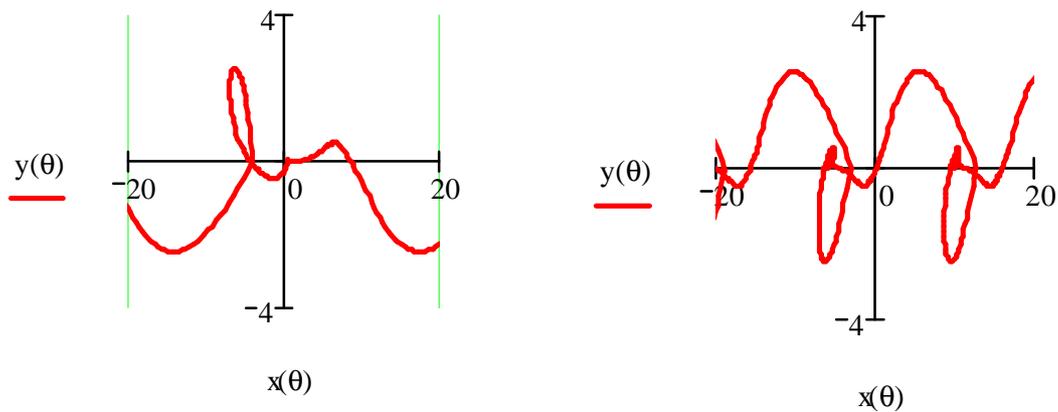


Рис. 10. Линии скольжения (21) при $b=1,5$ и $a=1$

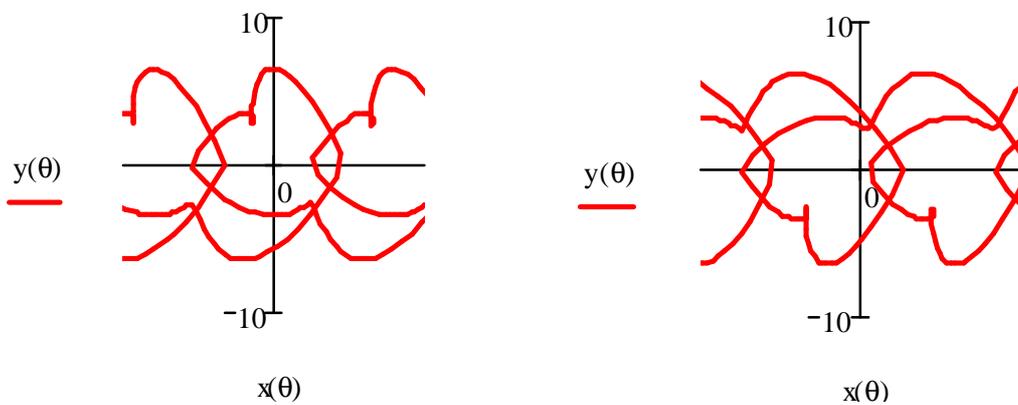


Рис. 11. Линии скольжения (23) при $b=1,5$ и $a=5$

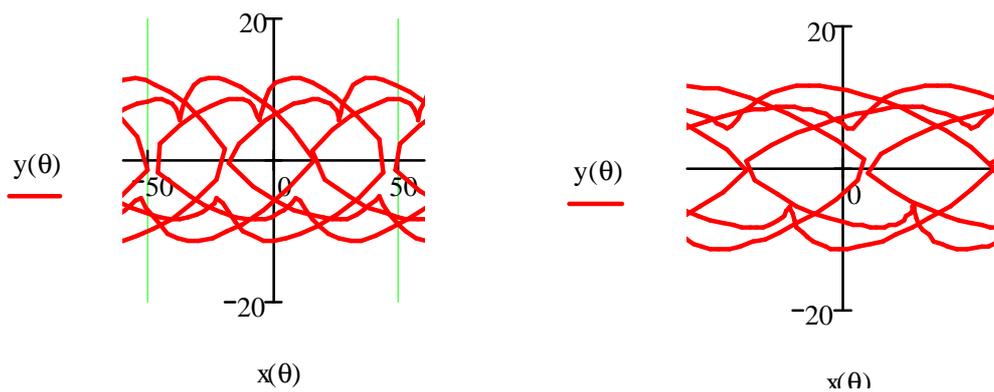


Рис. 12. Линии скольжения (23) при $b=1,5$ и $a=10$

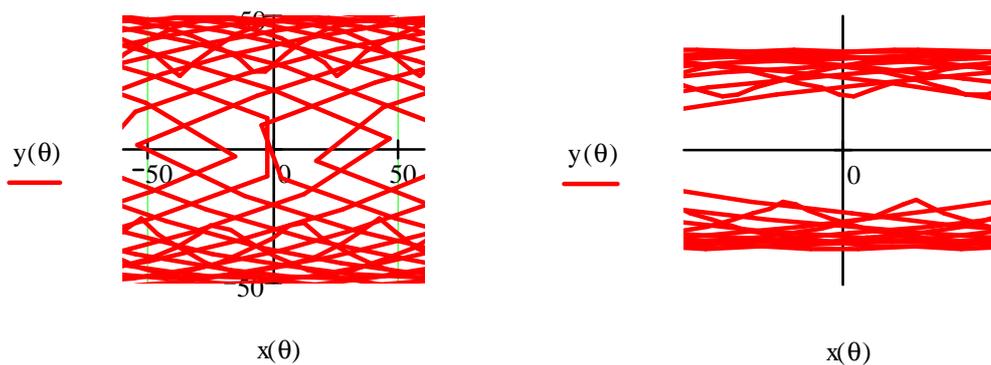


Рис. 13. Линии скольжения (23) при $b=1,5$ и $a=50$

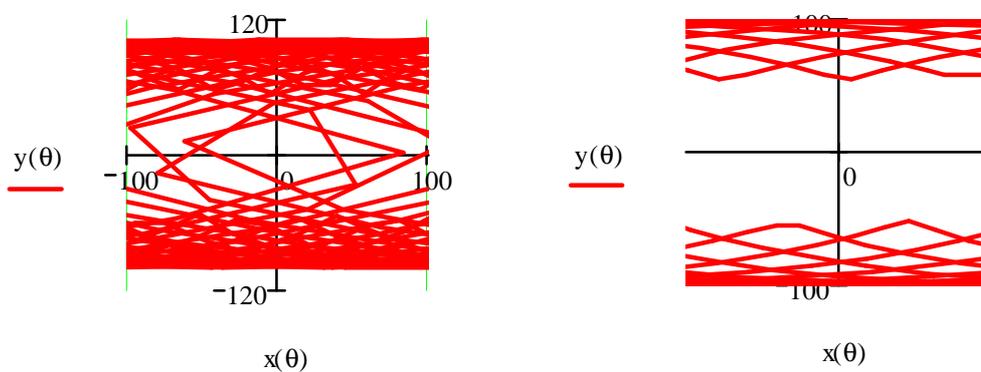


Рис. 14. Линии скольжения (23) при $b=1$ и $a=100$

Случай $\beta=1$ рассмотрен в работе [2].

Из рисунков 9–14 следует, что решения соответствующие большему значению параметра a можно использовать для описания течений пластического материала сжимаемого жесткими плитами. При этом слой может быть средней толщины, что отличает данные решений от решения Прандтля, которое можно использовать только для тонких слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киряков, П. П.*, Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.
2. *Сенашов, С. И.* Об эволюции решения Прандтля под действием группы симметрий / С. И. Сенашов // Механика твердого тела. – 2005. – № 5. – С. 167-171.
3. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1954. – 407 с.