

УДК 539.3

Сергеева А. М.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

(Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН)

Применяя теорию малых упругопластических деформаций и апробированный численный метод, моделируется процесс зарождения и развития трещины в ледяном покрове, нагруженном внешним атмосферным давлением, собственным весом и находящимся над разряженным ограниченным пространством.

Ключевые слова: разрушение ледяного покрова, напряжения, деформации.

**Введение.** Моделируется процесс разрушения льда как результат образования и развития в нем трещин. В основу построения модели положен новый способ разрушения ледяного покрова, защищенный патентом РФ [9]. Идея в том, что подо льдом создается разряжение и лед будет разрушаться под действием атмосферного давления и собственного веса. Под лед помещается контейнер, в котором имеются две подвижные створки, свободно перемещающиеся в направлении, перпендикулярном движению судна. В контейнере имеются две боковые стенки и днище, которые при раздвижении створок мешают заполнению контейнера водой. С торцевых сторон контейнера нет препятствий для отжима воды створками. На рис. 1 представлена схема получения разряжения подо льдом рассматриваемым способом. Важно, что скорость раздвижения створок  $v$  должна быть такой, что при заданных параметрах контейнера объем поступившей воды не должен быть больше  $2/3$  от объема контейнера. Аналитическая формула для скорости раздвижения створок получена в работе [10, 24].

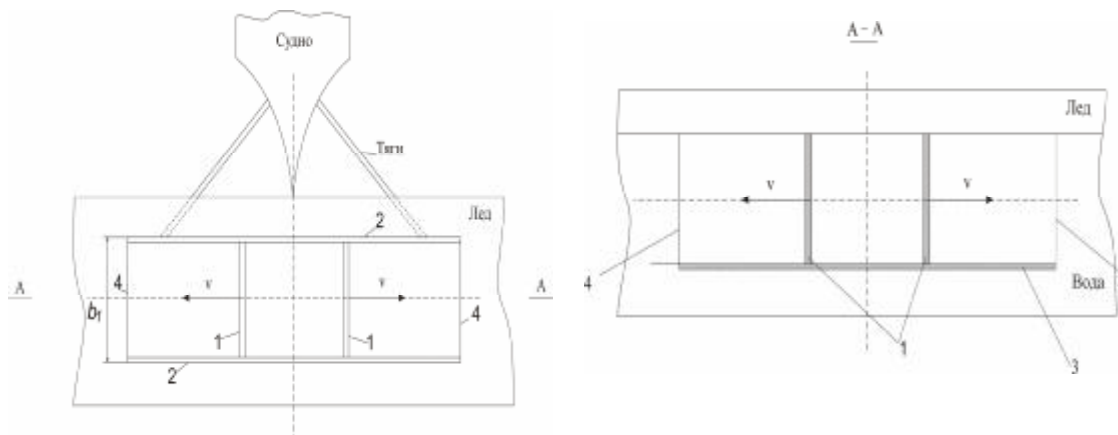


Рис. 1. Схема получения разряжения под ледяным покровом:  
1 – подвижные створки; 2 – боковые стенки; 3 – днище; 4 – внешние стороны контейнера

Установлено, что значения напряжений растяжения или сдвига, при которых происходит полное разрушение ледяного покрова, должно в несколько раз превышать предел прочности льда, установленный для образца. Если же напряжение незначительно превышает предел прочности, то образуется трещина, при этом лед переходит в новое устойчивое состояние и выдерживает внешнюю нагрузку. В работе определены такие параметры контейнера, при которых происходит полное разрушение ледяного покрова способом [9].

**Постановка и решение задачи.** Решается пространственная задача о разрушении ледяного покрова под действием атмосферного давления и силы тяжести самого льда. При построении модели учитывалось, что задача симметричная, поэтому достаточно исследовать четвертую часть области деформирования (рис. 2, а). Пусть лед (рис. 2, а) опирается на коробку контейнера и упругое основание (воду) с внешней стороны контейнера. Внутри контейнера лед провисает под действием внешнего атмосферного давления и собственного веса. Так как нагрузка кратковременная, то деформируемую среду можно считать упругой и изотропной, а упругие перемещения малыми. Применяя уравнения теории упругости для малых деформаций, запишем систему дифференциальных уравнений в декартовой системе координат

$$s_{ij,j} + F_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad F_2 = F_3 = 0. \quad (1)$$

$$s_{ij} - s d_{ij} = 2G e_{ij}^*; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad e_{ij}^* = e_{ij} - 1/3 e d_{ij}; \quad e = e_{ii},$$

$$s = 1/3 s_{ii}; \quad e_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad d_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (2)$$

$$e_{ii} = 3k s. \quad (3)$$

Уравнение теплопроводности для стационарного случая:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( I \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (4)$$

В (1)–(4)  $G = G(q)$  – модуль сдвига;  $q$  – температура;  $k = k(q)$  – коэффициент объемного сжатия;  $s_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $e_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $F_i$  – проекция удельной объемной силы по осям  $x_i$ ;  $u_i$  – проекции перемещений по координатным осям  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $I$  – коэффициент теплопроводности; уравнения (1–4) записаны с учетом суммирования по повторяющимся индексам.

Будем рассматривать ледяной покров как пластину конечной толщины, поэтому уравнение теплопроводности примет вид:

$$q = -\frac{I_0}{a} + \sqrt{\left(\frac{I_0}{a}\right)^2 + \frac{x_1}{h} \left(\frac{2q_1 I_0}{a} + q_1^2\right)} \quad (5)$$

По данным работы [2]  $a = -0.0159$ ,  $I_0 = 2.22 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ .

Граничные условия задачи

$$\begin{aligned} s_{11}|_{S_8} = -s_0; \quad (s_{12} = s_{13})|_{S_8} = 0; \quad (s_{11} = s_{12} = s_{13})|_{S_1} = 0; \\ (s_{12} = s_{13})|_{S_3} = 0; \quad s_{21}|_{S_4} = 0; \quad s_{23}|_{S_i} = 0; \quad i = 4, 6; \quad (s_{12} = s_{13})|_{S_2} = 0; \\ s_{31}|_{S_5} = 0; \quad s_{32}|_{S_i} = 0; \quad i = 5, 7; \quad s_{11}|_{S_3} = -q_1; \quad s_{11}|_{S_2} = s_*; \\ u_2|_{S_i} = 0; \quad i = 4, 6; \quad u_3|_{S_i} = 0; \quad i = 5, 7, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $q_1 = s_0 + g h_*$ ;  $h_*$  – глубина погружения льда.

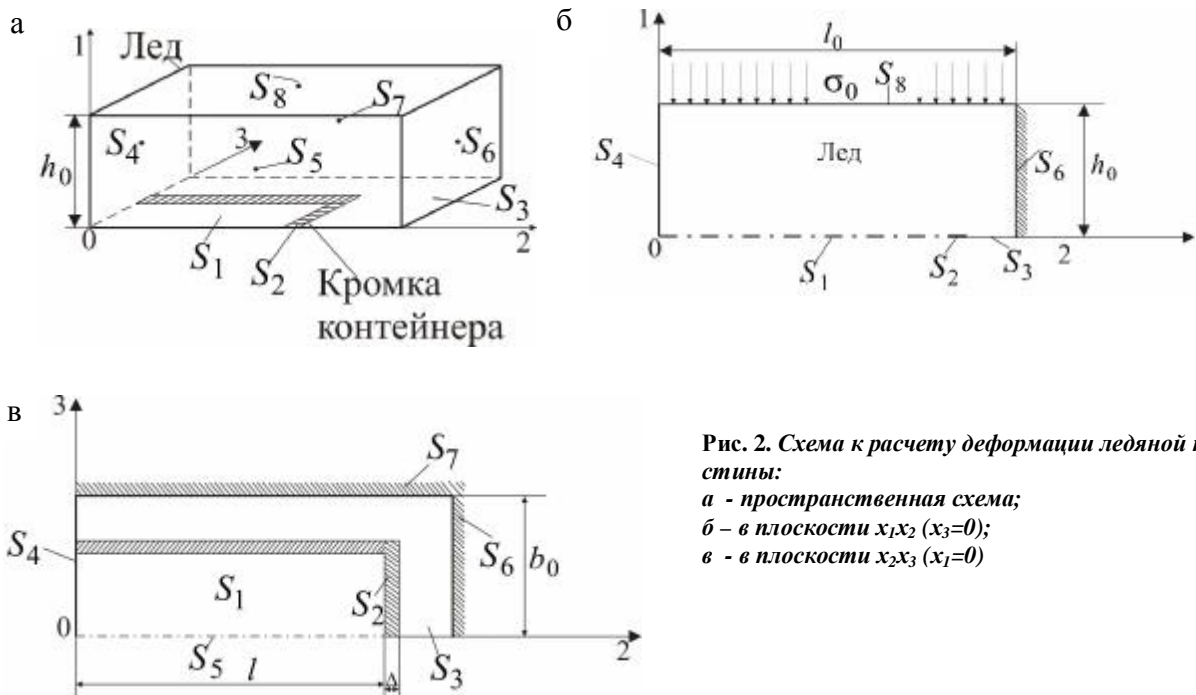


Рис. 2. Схема к расчету деформации ледяной пластины:  
 а - пространственная схема;  
 б - в плоскости  $x_1x_2$  ( $x_3=0$ );  
 в - в плоскости  $x_2x_3$  ( $x_1=0$ )

Важно, что контейнер, наполненный водой, имеет положительную плавучесть. Поэтому при раздвижении створок контейнера появляется сила, направленная снизу на лед от бортов контейнера, – выталкивающая сила, равная  $P = b \cdot l \cdot h_1 \cdot g$ , где  $h_1$  – высота образовавшейся в контейнере полости ( $h_1 < h$ , так как в процессе раздвижения щек внутрь затекает вода);  $g$  – удельный вес воды;  $S_0$  – атмосферное давление.

Таким образом, напряжение на бортах контейнера ( $S_2$ ), (рис. 2) будет

$$s_* = -P / [(l + D) \cdot D + b \cdot D] = s_{11}|_{S_2}. \quad (7)$$

Таким образом под ледяным покровом реализуется разреженное пространство, способствующее погружению деформированного льда вместе с контейнером в воду. Моделируя связь ледовой подушки с внешней недеформируемой основой, на внешних гранях  $S_6$ ,  $S_7$  (рис. 2) принимается условие закрепления льда, не дающее ему перемещаться в воду.

Моделируемая связь определяется уравнениями

$$s_{21}|_{S_6} = -y_6 t_s \frac{v_{ск}}{|v|}; \quad s_{31}|_{S_7} = -y_7 t_s \frac{v_{ск}}{|v|}. \quad (8)$$

Здесь  $y_6$ ,  $y_7$  – коэффициенты ( $y_6 = y_7 = 1000$ );  $v_{ск}$  – скорость скольжения ледяной подушки относительно основы;  $v_{ск} = v_1|_{S_3} - v_1^*$ ,  $v_1^*$  – скорость перемещения основы. В нашем случае  $v_1^* = 0$ ;  $|v|$  – нормирующая скорость;  $t_s$  – условный предел текучести льда. По расчетам, при значениях  $y_i$  ( $i = 6, 7$ ) перемещения  $u_i$  вблизи  $S_6$ ,  $S_7$  составили 0.0007 мм, а касательные напряжения на поверхностях  $S_6$ ,  $S_7$  не превышали 0.02 МПа.

При построении численной схемы решения используется численный метод [4]. Для этого область деформирования разбивается на ортогональные элементы конечных размеров и для каждого элемента записывается в разностном виде система (1–3), которая решается по разработанному алгоритму с учетом смешанных граничных условий (6). В результате решения имеем поля напряжений  $S_{ij}$  и перемещений  $u_i$  по граням каждого элемента.

В соответствии с работой [8]  $E = (87.6 - 0.21q - 0.0017q^2) \cdot 10^2$  (МПа), коэффициент Пуассона  $\nu = 0.5 + 0.003 \cdot q$  ( $0 > -40^\circ C$ ), коэффициент объемного сжатия ( $k$ )  $k = (1 - 2\nu)/E$ , модуль сдвига ( $G$ )  $G = E/2(1 + \nu)$ .

Значение  $q_1$  в формуле (5) принималось  $q_1 = -30^\circ C$ .

Алгоритм решения рассматриваемой задачи будет иметь вид:

1. Исследуемая область деформирования разбивается на элементы ортогональной формы (в нашем случае на элементы прямоугольной формы). Рассчитывается матрица дуг элементов.

2. Задаются граничные условия.

3. По формуле (5) насчитывается поле температур по каждому элементу.

4. Насчитываются по формулам значения  $(G)_n$  и  $(k)_n$  по каждому элементу ( $n$  – номер элемента).

5. Насчитывается матрица коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы в соответствии с вышеизложенной последовательностью вычислений.

6. Решается система линейных уравнений по стандартной программе.

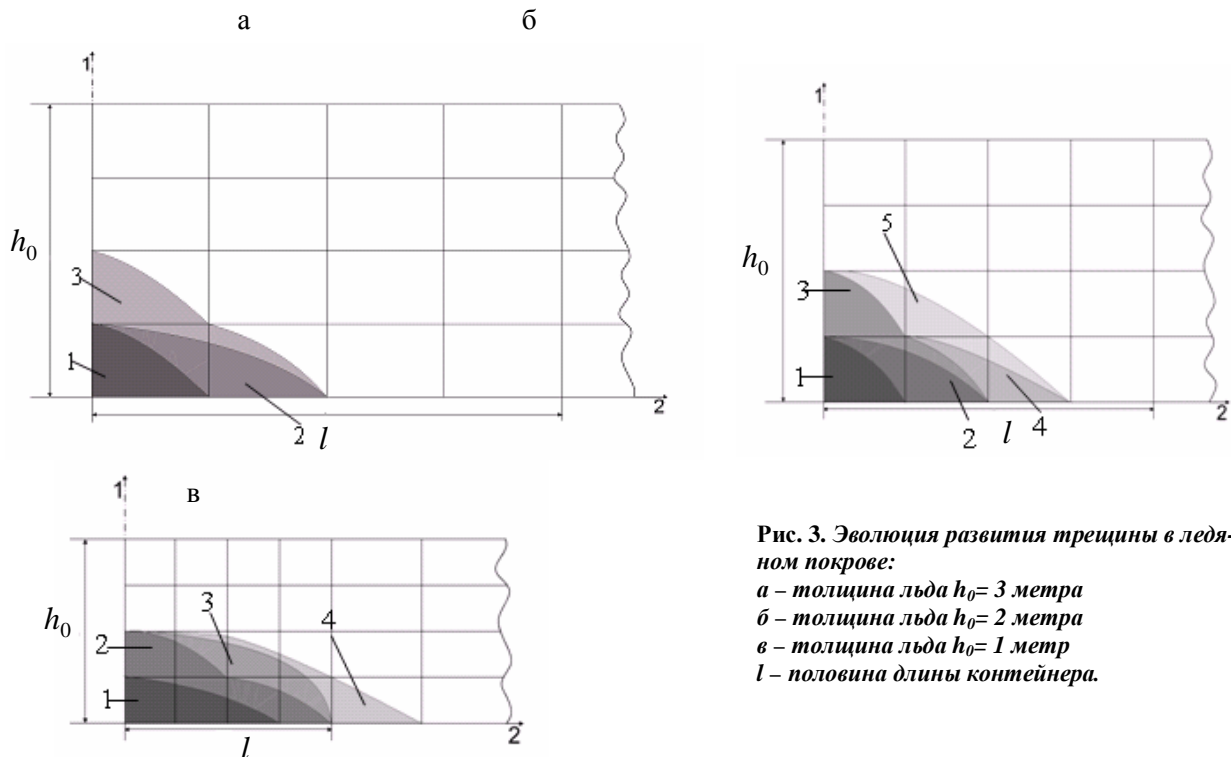
7. По каждому элементу (его граням)  $(i,j)$  насчитываются  $S_{ij}$ ,  $u_i$  ( $i,j=1,2,3$ ).

8. Отыскиваются растягивающие напряжения  $S_{ii}$  ( $i=2,3$ ), превышающие 1 МПа. Так как предполагается, что в данном месте образовалась трещина, то следует изменение граничных условий: на грани элемента, где  $S_{ii} \geq 1$  МПа ( $i=2,3$ ), устанавливается  $S_{ii} = 0$ . Осуществляется операция 5. В случае выполнения условий по прочности следует операция 9.

9. Окончание расчета.

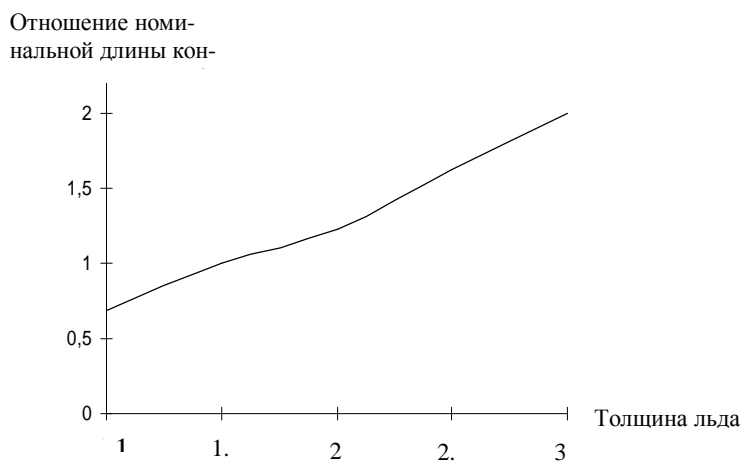
**Результаты исследования.** В качестве критерия разрушения примем прочность морского льда на сжатие от 2 до 3 МПа, прочность – на растяжение от 0.5 до 1 МПа. В качестве критических значений определим максимальные значения. В работе [10, 26] установлено, что наиболее оптимальной является скорость раздвижения створок 0,5 м/с. Поэтому все рассматриваемые результаты были получены при  $v = 0,5$  м/с.

Принимая в качестве критерия разрушения ледяного покрова  $s_{np} = 1$  МПа, установлено, что по мере раздвижения створок в толще льда образуется трещина. Эволюция развития трещины рассмотрена в [5, 102] и схематично представлена на рис. 3, процесс образования и развития которой происходит последовательно в порядке нумерации 1, 2, 3, 4, 5 по растягивающим напряжениям  $S_{33}$ .



**Рис. 3. Эволюция развития трещины в ледяном покрове:**  
*а* – толщина льда  $h_0=3$  метра  
*б* – толщина льда  $h_0=2$  метра  
*в* – толщина льда  $h_0=1$  метр  
*l* – половина длины контейнера.

Установлено, что, независимо от толщины льда, при заданной ширине контейнера трещина растет в высоту только до половины толщины льда и при дальнейшем раздвижении створок до критического положения не изменяется. Под критической длиной контейнера понимается максимальная длина  $2l$ , превышение которой сразу же приведет к «затоплению» контейнера. Эту критическую длину будем называть номинальной длиной контейнера. На рис. 4 показано, как меняется отношение номинальной длины контейнера к длине образовавшейся трещины при изменении толщины льда. Важно, что при толщине льда менее  $1,5$  м. трещина распространяется и за пределами контейнера, причем ширина трещины колеблется от  $0,57$  до  $0,972$  мм.



**Рис. 4. Отношение номинальной длины контейнера к длине образовавшейся трещины при различной толщине льда**

Как следует из расчетов, при критерии разрушения  $s_{np} = 1 \text{ МПа}$  нет полного разрушения льда. Происходит только начальное разрушение и ледяной покров переходит в другое состояние по сплошности, выдерживающее внешнее воздействие. Для того чтобы процесс разрушения продолжался, необходимо увеличивать ширину контейнера. Увеличение ширины контейнера, в свою очередь, повлечет увеличение номинальной длины. Параметры контейнера, при которых происходит полное разрушение льда, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры контейнера, при которых лед будет полностью разрушаться

Толщина льда (м)	Глубина контейнера (м)	Номинальная длина контейнера (м)	Ширина контейнера (м)
3	1,5	44	18
2,5	1,5	30	15,5
2	1,5	23,4	12
1,5	1,5	13,8	9,94
1	1,5	8,8	6
0,5	1,5	5	3,9

На рис. 5 представлена эволюция развития трещин в ледяном покрове толщиной 1 м. Разрушение льда происходит поэтапно и соответствует последовательности (1, 2, 3, 4) нумерации областей на рисунке.

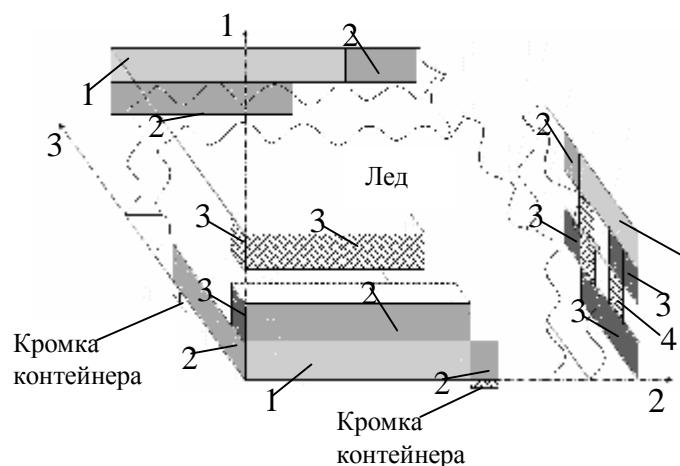


Рис. 5. Процесс развития трещин до полного разрушения льда толщиной  $h_0 = 1$  метр

Также получена формула, позволяющая найти зависимость величины максимального расхождения створок контейнера от заданных геометрических параметров его поперечного сечения и заданной величины растягивающего напряжения, при котором начнется разрушение льда:

$$l = 6.1419 \cdot h_0 \cdot e^{-1.7045h_0/b} \cdot e^{0.4219(\frac{v}{v_x})} \cdot \left(\frac{s}{s_x}\right)^{0.5 \ln(h/h_x)},$$

где  $l$  – половина длины контейнера (м);  $b$  – половина ширины контейнера (м);  $h$  – глубина контейнера (м);  $h_0$  – толщина льда (м);  $v$  – скорость раздвижения створок (м/с);  $s$  – принятый критерий прочности льда (МПа);  $v_x$  – нормирующая скорость (1м/с);  $s_x$  – нормирующее напряжение (1МПа). Причем  $h \approx 0,5h_0$ ;  $b \approx 3h_0$ ;  $v \approx 0,16$  м/с.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердяников, В. П.* Изучение модуля упругости льда / В. П. Бердяников // Труды ГПИ. – 1948. – Вып. 7(61). – С. 13–23.
2. *Богородский, В. В.* Разрушение льда. Методы, технические средства / В. В. Богородский, В. П. Гаврило, О. А. Недошивин. – Л. : Гидрометеоздат, 1983.
3. *Богородский, В. В.* Физические свойства. Современные методы гляциологии / В. В. Богородский, В. П. Гаврило. – Л. : Гидрометеоздат, 1980.
4. *Одинок, В. И.* Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом / В. И. Одинок. – Владивосток : Дальнаука, 1995. – 168 с.
5. *Одинок, В. И.* Разрушение льда под действием гидростатического давления на подведенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинок, А. М. Сергеева // Вестник УГТУ-УПИ. – 2006. – № 11(82). – С. 100–104.
6. *Одинок, В. И.* Разрушение льда под действием гидростатического давления на подведенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинок, А. М. Сергеева // Механика микронеоднородных материалов и разрушение : тезисы докладов IV Всероссийского семинара (Екатеринбург, 23–24 марта 2006 г.). – Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. – С. 43.
7. *Одинок, В. И.* Математическое моделирование одного нового процесса разрушения ледяного покрова / В. И. Одинок, А. М. Сергеева // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – № 2. – С. 139–146.
8. *Одинок, В. И.* Моделирование процесса разрушения ледяного покрова под действием гидростатического давления на стационарном контейнере / В. И. Одинок, А. М. Сергеева // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г.) : аннотация докладов. – Н. Новгород : Нижегородский государственный университет, 2006. – Т. 1. – С. 162.
9. *Патент РФ № 2220878.* Способ разрушения ледяного покрова / В. И. Одинок, В. М. Козин. Бюл. № 1. Оpubл. 10.01.04 г.
10. *Полярус (Сергеева), А. М.* Об одном способе разрушения ледяного покрова / А. М. Полярус (Сергеева), Д. Ю. Романов // Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения : сб. докладов второй конференции (Владивосток, 31 августа – 6 сентября 2003 г.). – Комсомольск-на-Амуре : ИМиМ ДВО РАН, 2003. – С. 23–28.