

Трещев А. А., Теличко В. Г.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ТРУБЧАТЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

(Тульский государственный университет)

Сложные механические явления, наблюдающиеся при кручении оболочек из материалов с усложненными свойствами, представляют собой серьезный барьер для применения традиционного метода конечных разностей и накладывают определенные ограничения на возможности использования метода граничных элементов. В связи с этим были проведены подробные математические исследования, которые показали, что при не гладких входных данных наиболее удобен и обладает достаточно быстрой сходимостью метод конечных элементов [3; 9; 14].

Условимся представлять исследуемую оболочку в виде сети плоских конечных элементов с разбивкой по толщине на ряд однородных фиктивных слоев внутри реальных армированных и неармированных зон. Параметры жесткости будем определять в центре каждого фиктивного слоя конечного элемента и распространять их на весь объем этого слоя. Очевидно, что по мере сгущения сетки конечных элементов и увеличения числа фиктивных слоев приближенное конечно-элементное решение будет асимптотически приближаться к точному, сводя на нет все геометрические погрешности аппроксимации.

Анализ задачи деформирования оболочек из материалов с усложненными механическими свойствами показывает, что для них характерно сильное влияние деформаций поперечного сдвига [1]. Кроме того, физическая нелинейность материала приводит к появлению ярко выраженных деформаций в срединной плоскости [1].

Рассмотрим равновесие малого плоского элемента оболочки толщиной h , находящейся под действием поперечной нагрузки интенсивностью q . Ориентируем этот участок в локальной декартовой системе координат так, чтобы ось x_3 была направлена вертикально вверх. Перемещения любой точки участка поверхности оболочки представим следующим образом:

$$\begin{aligned}U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) + x_3 y_2(x_1, x_2); \\U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) - x_3 y_1(x_1, x_2); \\U_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2), \\y_1 &= w_2 - g_{23}; y_2 = -w_1 + g_{13};\end{aligned}\tag{1}$$

где y_1, y_2 – углы поворота срединной поверхности вокруг осей x_1 и x_2 ; g_{13}, g_{23} – деформации поперечного сдвига.

Деформирование железобетонной оболочки вплоть до разрушения происходит при малых прогибах. Поэтому для малого плоского элемента оболочки связи между деформациями и перемещениями с учетом принятых зависимостей (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1} + x_3 y_{2,1}; \quad e_{22} = u_{2,2} - x_3 y_{1,2}; \quad e_{33} = 0; \\ g_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1} + x_3 (y_{2,2} - y_{1,1}); \\ g_{13} &= y_2 + w_1; \quad g_{23} = -y_1 + w_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение равновесия малого плоского элемента оболочки записываются в традиционной форме [10]:

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} &= 0; \quad N_{12,1} + N_{22,2} = 0; \\ M_{11,1} + M_{12,2} &= Q_1; \quad M_{12,1} + M_{22,2} = Q_2; \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} &= q. \end{aligned} \quad (4)$$

При получении зависимостей между напряжениями и деформациями будем считать, что нормальные напряжения S_{33} достаточно малы и ими можно пренебречь. Тогда имеем

$$\{s\} = [B]\{e\}, \quad (5)$$

где

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{23} \end{Bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} & B_{14} & B_{15} \\ & B_{22} & B_{26} & B_{24} & B_{25} \\ & & B_{66} & B_{64} & B_{65} \\ & & & B_{44} & B_{45} \\ & & & & B_{55} \end{bmatrix}; \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ g_{12} \\ g_{13} \\ g_{23} \end{Bmatrix};$$

B_{ij} – жесткости, зависящие от вида напряженного состояния, степени нагружения, характера армирования, развития пластических деформаций в арматуре.

Переходя от напряжений (5) к их интегральным характеристикам с учетом расширения количества силовых параметров за счет усилий, получим

$$Q_k = \int_{-h/2}^{h/2} t_{k3} dx_3, \quad (k=1,2). \quad (6)$$

Тогда, принимая во внимание уравнения (3), приведем зависимости (5) к виду

$$\{M\} = [D]\{e\}, \quad (7)$$

где $\{M\}$ – вектор обобщенных сил; $\{e\}$ – вектор обобщенных деформаций срединной поверхности оболочки;

$$M = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & K_{14} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ & D_{22} & D_{26} & K_{24} & K_{25} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ & & D_{66} & K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{65} \\ & & & & & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & & & & & & C_{22} & C_{26} \\ & & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}; \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} y_{2,1} \\ -y_{1,2} \\ y_{2,2} - y_{1,1} \\ g_{13} \\ g_{23} \\ u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix};$$

$$C_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} dx_3; K_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3 dx_3; D_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3^2 dx_3.$$

Заметим, что интегральные жесткостные характеристики C_{km} , K_{km} , D_{km} не могут быть получены непосредственно, так как параметры B_{km} не являются наперед заданными функциями от x_3 и зависят от напряженного состояния. Однако интегралы можно вычислять приближенно, разбив малый плоский элемент оболочки по толщине на ряд фиктивных слоев. В целях упрощения фиктивные слои можно принять одинаковыми по толщине.

При выборе конечно-элементной модели для расчета конструкций типа железобетонных оболочек была предпринята попытка использовать изопараметрические конечные элементы (КЭ) [1]. Численные эксперименты на примере пластин и оболочек показали, что при уменьшении их толщины вследствие трещинообразования использование изопараметрических КЭ, учитывающих деформации поперечного сдвига, приводит к прогрессирующему возрастанию изгибной жесткости [16]. Поэтому для моделирования были выбраны свободные от «паразитных жесткостей», так называемые гибридные КЭ [15]. Р. Куком получены две модификации гибридных КЭ с тремя степенями свободы в узле. Непосредственное применение конечных элементов Р. Кука к расчету железобетонных пространственных конструкций нецелесообразно, так как они не учитывают продольные усилия и перемещения в срединной плоскости, а также не позволяют эффективно определять вектор обобщенных сил $\{M\}$ в центре КЭ. Поэтому была разработана модификация гибридных КЭ с пятью степенями свободы в узле и матрицей жесткости, полученной для произвольного плоского треугольного элемента.

1. Математическая модель конечного элемента

Матрица жесткости конечного элемента

Внутри конечного элемента вектор обобщенных сил представим следующим образом [15]:

$$\{M\} = [P]\{b\}, \quad (8)$$

где $[P]$ – матрица некоторых функций от координат точки элемента; $\{b\}$ – вектор коэффициентов, подлежащих определению.

Вектор обобщенных деформаций представим в виде

$$\{e\} = [D]^{-1}\{M\} = [E]\{M\}, \quad (9)$$

где $[E]$ – матрица податливости. Энергию деформации для объема конечного элемента определим как интеграл по его площади

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [E] \{M\} dS. \quad (10)$$

П. Тонгом и Т. Пианом в работе [16] показано, что конечные элементы данного класса основаны на функционале вида

$$\dot{I} = \sum_n \left(U_n - \int_{V_n} \{\Phi\}^T \{t\} dS + \int_S \{\bar{\Phi}\}^T \{t\} dS \right) \quad (11)$$

где V_n – граница объема элемента; S – часть V_n , подвергнутая действию внешнего вектора сил $\{\bar{\Phi}\}$; n – количество элементов; $\{t\}$ – граничные перемещения, связанные с узловыми перемещениями $\{q\}$ выражением

$$\{t\} = [L]\{q\}. \quad (12)$$

Вектор сил на границе элемента $\{\Phi\}$ определяется из уравнения (11):

$$\{\Phi\} = [R]\{b\}, \quad (13)$$

где $[R]$ – матрица $[P]$ для контура V_n элемента.

Подставляя выражения (8), (10), (12), (13) в уравнение (11), получаем

$$\dot{i} = \sum_n \left(\frac{1}{2} \{b\}^T [H] \{b\} - \{b\}^T [T] \{q\} + \{\Phi_0\}^T \{q\} \right), \quad (14)$$

где

$$[H] = \int_S [P]^T [E] [P] dS; \quad (15)$$

$$[T] = \int_{V_n} [R]^T [L] dS; \quad (16)$$

$$\{\Phi_0\}^T = \int_S \{\bar{\Phi}\} [L] dS. \quad (17)$$

Определяя вариации функционала (14) по параметрам $\{b\}$, $\{q\}$ и приравнявая эти вариации нулю, можно получить выражение вида [15]

$$\sum_n [T]^T [H]^{-1} [T] \{q\} = \sum_n \{\Phi_0\}, \quad (18)$$

откуда выделяется матрица жесткости элемента

$$[K] = [T]^T [H]^{-1} [T]. \quad (19)$$

При определении вариации функционала (14) по коэффициентам $\{b\}$ устанавливается связь этих коэффициентов с узловыми перемещениями

$$\{b\} = [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в соотношения (8), приходим к зависимостям вида

$$\{M\} = [P][H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (21)$$

Таким образом, вектор обобщенных сил $\{M\}$ определен.

Определение матрицы $[H]$

Представим $\{M\}$ через неизвестные коэффициенты $\{b\}$ в виде

$$\begin{aligned} M_{11} &= b_1 + b_4 x_1 + b_9 x_2; & M_{22} &= b_2 + b_5 x_2 + b_{10} x_1; & M_{12} &= b_3 + b_{12} x_1 + b_{11} x_2; \\ Q_1 &= b_4 + b_{11}; & Q_2 &= b_5 + b_{12}; & N_{11} &= b_6; & N_{22} &= b_7; & N_{12} &= b_8. \end{aligned} \quad (22)$$

На основании уравнения (8) получаем матрицу $[P]$ функций $M_{11} \dots N_{12}$ от координат точки элемента. Вектор b при этом имеет вид

$$\{b\} = \{b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \ b_7 \ b_8 \ b_9 \ b_{10} \ b_{11} \ b_{12}\}^T. \quad (23)$$

Подставляя матрицу $[P]$ в соотношение (15) и учитывая известные выражения для интегралов по площади треугольника [6], получим выражения для элементов квадратной матрицы двенадцатого порядка $[H]$.

Определение матрицы $[T]$

Запишем выражение работы вектора обобщенных сил $\{M\}$ вдоль контура конечно-го элемента, а затем выделим из этого выражения векторы $\{b\}^T$ и $\{q\}$, тогда то, что останется (см. уравнение (14)), окажется матрицей $[T]$.

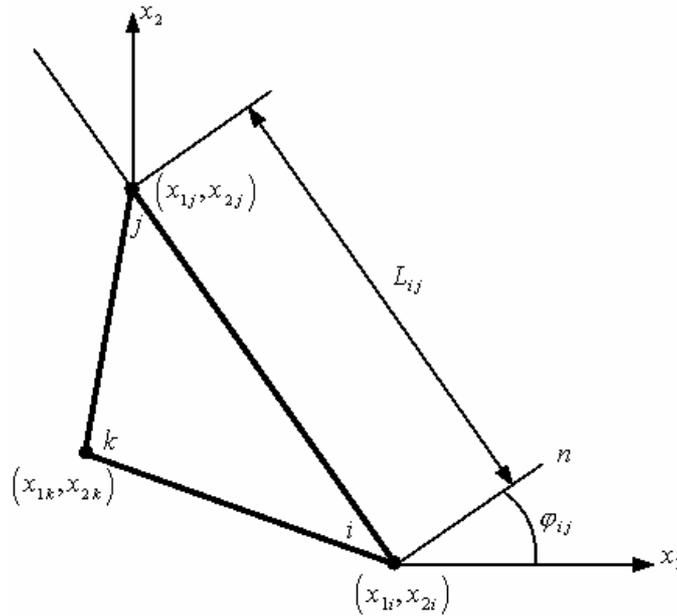


Рис. 1. Схема треугольного конечного элемента в плоскости $x_1, 0, x_2$

Из условия равновесия элементарного треугольника ABC , приведенного на рис. 1, вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= M_{11}C_{ij} + M_{12}S_{ij}; \quad \bar{M}_{22} = -M_{22}S_{ij} - M_{12}C_{ij}; \quad \bar{N}_{11} = N_{11}C_{ij} + N_{12}S_{ij}; \\ \bar{N}_{22} &= N_{22}S_{ij} + N_{12}C_{ij}; \quad \bar{Q} = Q_1C_{ij} + Q_2S_{ij}, \quad C_{ij} = \cos j_{ij}; \quad S_{ij} = \sin j_{ij}. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом зависимостей (24) определим работу распределенных вдоль стороны $i-j$ (рис. 2) сил и моментов следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= L_{ij} \int_0^1 [(Q_1C_{ij} + Q_2S_{ij})w - (M_{12}C_{ij} + M_{22}S_{ij})y_1 + (M_{12}S_{ij} + M_{11}C_{ij})y_2 + \\ &\quad + (N_{11}C_{ij} + N_{12}S_{ij})u_1 + (N_{22}S_{ij} + N_{12}C_{ij})u_2] dx, \end{aligned} \quad (25)$$

где $x = l/L_{ij}$ – безразмерная координата, измеряемая вдоль стороны конечного элемента $i-j$.

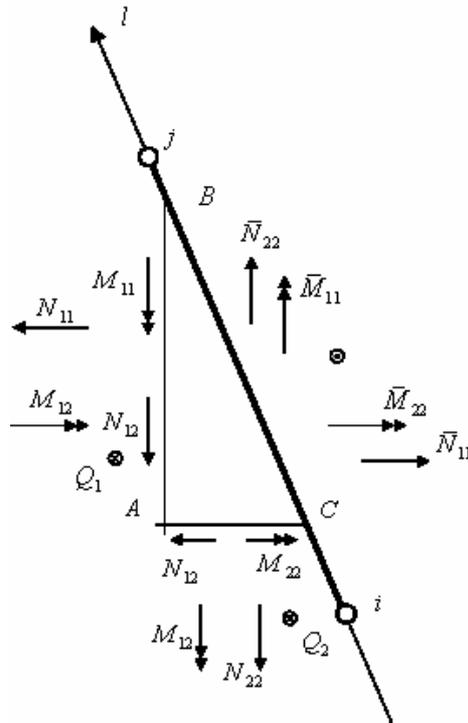


Рис. 2. Схема усилий и перемещений на стороне конечного элемента

Работа усилий и моментов, совершаемая на соответствующих перемещениях вдоль всего контура треугольного КЭ, определяется суммой:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31}. \quad (26)$$

Зададим вектор перемещений в i -ом узле конечного элемента:

$$\{q_i\} = \{w_i, y_{1i}, y_{2i}, u_{1i}, u_{2i}\}^T = \{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4}, q_{i5}\}^T. \quad (27)$$

Вектор узловых перемещений всего КЭ можно представить так:

$$\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{15}\}^T. \quad (28)$$

Аппроксимацию граничных перемещений в зависимости от узловых перемещений примем в следующей форме [15]:

$$\begin{aligned} w &= [(1-x) x] \{w_i, w_j\} + L_{ij} x(1-x)(q_i - q_j) / 2; \\ y_1 &= [(1-x) x] \{y_{1i}, y_{1j}\}; y_2 = [(1-x) x] \{y_{2i}, y_{2j}\}; \\ u_1 &= [(1-x) x] \{u_{1i}, u_{1j}\}; u_2 = [(1-x) x] \{u_{2i}, u_{2j}\}; \end{aligned} \quad (29)$$

где $q_i = y_{1i} c_{ij} + y_{2i} s_{ij}$; $q_j = y_{1j} c_{ij} + y_{2j} s_{ij}$; L_{ij} – длина стороны $i-j$.

Представим текущие координаты x_1, x_2 на стороне $i-j$ через координаты узлов в виде

$$x_1 = x_{1i} - L_{ij} x s_{ij}; x_2 = x_{2i} + L_{ij} x c_{ij}. \quad (30)$$

Подставляя зависимости (22), (25), (29), (30) в уравнение (26), учитывая при этом (28) и выделяя векторы $\{b\}^T, \{q\}$, получим выражения для элементов матрицы $[T]$ размера 12×15 .

2. Модель деформирования железобетонной оболочки

Очевидно, что математическая модель деформирования железобетонных оболочек должна достаточно точно учитывать специфические особенности сложной среды «бетон-арматура» на различных стадиях работы композита, быть вполне обозримой и практически реализуемой, т. е. модель не может быть полностью свободной от дополнительных технических гипотез.

Дополнительные технические гипотезы модели

Задачи деформирования железобетонных цилиндрических оболочек будем рассматривать в условиях активной деформации и простого нагружения, что позволяет представить бетон как нелинейный материал с присущими ему упругопластическими свойствами, вполне укладывающимися в «рамки» потенциала деформаций [8]. Вопрос о ползучести бетона оставляем открытым, т. е. деформации ползучести не учитываем.

Ограничимся анализом напряженно-деформированного состояния оболочек с ортогональным армированием стержней.

Рассмотрим оболочки, размеры которых в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями. Такой выбор конструкции позволяет пренебречь местными напряжениями в зоне контакта арматуры и бетона, а значит, распределить арматуру, представив ее в виде сплошного слоя, обладающего свойствами структурной анизотропии.

В качестве модели для стальной арматуры примем идеальное упругопластическое тело.

Предположим, что арматура воспринимает только нормальные напряжения в поперечных сечениях, а ее коэффициенты Пуассона примем равными нулю. Обнуление коэффициентов поперечной деформации заметно упрощает зависимости между напряжениями и деформациями, тогда как погрешность с введением этого допущения лежит в пределах точности исходных данных.

Напряжения в пределах армированных слоев оболочки определим как сумму напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры примем равенство деформаций этих двух сред.

Срединную поверхность оболочки представим сетью гибридных конечных элементов разработанной в исследовании модификации $H12$ с учетом разбиения по толщине на ряд фиктивных слоев n_c . Жесткостные характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространим на любые точки фиктивного слоя.

За критерий трещинообразования бетона в каждом фиктивном слое примем критерий Баландина [4]. Предполагая, что трещины нормальны к срединной поверхности оболочки, будем рассчитывать главные напряжения по формулам плоского напряженного состояния. Трещины в области треснувшего фиктивного слоя будем считать сквозными и параллельными друг другу.

Так как на участке между трещинами сцепление между арматурой и бетоном сохраняется, то влияние растянутого бетона учтем при помощи коэффициента Мурашева, который представляет собой отношение средней деформации между трещинами к максимальной деформации арматуры в трещине.

При наличии трещин бетон моделируем трансверсально-изотропным телом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин.

В зависимости от конкретных условий напряженно-деформированного состояния фиктивных слоев выделим следующие группы: а) бетонные слои без трещин, б) армированные (железобетонные) слои без трещин, в) бетонные слои с трещинами, г) армированные (железобетонные) слои с трещинами, д) армированные (железобетонные) слои с пересекающимися трещинами. Рассмотрим моделирование каждого из этих слоев.

Бетонные слои без трещин

Для бетонных слоев будем считать справедливым закон деформирования [11]. Тогда, выделив компоненты матрицы податливости, получим

$$\{e\} = [A]\{s\}, \quad (31)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & A_{14} & A_{15} \\ & A_{22} & A_{26} & A_{24} & A_{25} \\ & & A_{66} & A_{64} & A_{65} \\ & sim & & A_{44} & A_{45} \\ & & & & A_{55} \end{bmatrix}; \quad (32)$$

$$A_{11} = \{2(R_1 + 2R_2)/3 + R_3x(3 - 2x^2)/3 + R_4[x(2 - h^2) + 4(s_{11} - 2s_{22})/9S_0] + R_5[h \cos 3j (1 + x^2) + 2\sqrt{2}x - 2 \cos 3j - \sqrt{2}s_{22}/S_0]\}/3;$$

$$A_{12} = \{2(R_1 - R_2)/3 + (R_3 + R_4/3)x + R_5[\cos 3j (1 - x) - \sqrt{2}x]\}/3;$$

$$A_{16} = (2R_4/3 + \sqrt{2}R_5)t_{12}/3S_0; \quad A_{26} = A_{16};$$

$$A_{14} = (2R_4/3 + \sqrt{2}R_5)t_{13}/3S_0;$$

$$A_{15} = 2(R_4/3 - \sqrt{2}R_5)t_{23}/3S_0;$$

$$A_{22} = \{2(R_1 + 2R_2)/3 + R_3[x(3 - 2x^2)/3 + R_4[x(2 - h^2) + 4(s_{22} - 2s_{11})/9S_0] + R_5[h \cos 3j (1 + x^2) + 2\sqrt{2}x - 2 \cos 3j - \sqrt{2}s_{11}/S_0]\}/3;$$

$$A_{24} = 2(R_4/3 - \sqrt{2}R_5)t_{13}/3S_0;$$

$$A_{25} = (2R_4/3 + \sqrt{2}R_5)t_{23}/3S_0;$$

$$A_{66} = 2\{2R_2 - R_3x^3 + R_4[x(2 - h^2) - (s_{11} + s_{22})/3S_0] + R_5[\sqrt{2}h(s_{11} - s_{22})/2 - h^3 \cos 3j]\}/3;$$

$$A_{64} = \sqrt{2}R_5t_{23}/S_0; \quad A_{65} = \sqrt{2}R_5t_{13}/S_0;$$

$$A_{44} = 2\{2R_2 - R_3h^3 + R_4[x(2 - h^2) - (s_{11} + s_{22})/3S_0] + R_5[\sqrt{2}h(s_{11} - 2s_{22})/2 - h^3 \cos 3j]\}/3;$$

$$A_{45} = \sqrt{2}R_5t_{12}/S_0;$$

$$A_{55} = 2\{2R_2 - R_3h^3 + R_4[x(2 - h^2) - (s_{11} + s_{22})/3S_0] + R_5[\sqrt{2}h(s_{22} - 2s_{11})/2 - h^3 \cos 3j]\}/3,$$

где R_i – константы потенциала деформаций, приведенные в работе [8]; S_0 – модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке; x , h – некоторые гармонические функции, которые можно трактовать как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; j – фаза напряжений.

Очевидно, что матрица упругости $[B]$ для каждого из неармированных бетонных слоев конечного элемента может быть выражена через матрицу податливостей (32):

$$[B] = [A]^{-1}. \quad (33)$$

Армированные (железобетонные) слои

В силу принятых выше гипотез имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{11} &= \mathbf{s}_{B11} + \mathbf{s}_{S11}; \quad \mathbf{s}_{22} = \mathbf{s}_{B22} + \mathbf{s}_{S22}; \\ \mathbf{t}_{12} &= \mathbf{t}_{B12}; \quad \mathbf{t}_{13} = \mathbf{t}_{B13}; \quad \mathbf{t}_{23} = \mathbf{t}_{B23}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\mathbf{s}_{11}, \mathbf{s}_{22}, \mathbf{t}_{ij}$ – напряжения в железобетонных слоях; $\mathbf{s}_{B22}, \mathbf{s}_{B11}, \mathbf{s}_{Bij}$ – напряжения в бетоне железобетонного слоя; $\mathbf{s}_{S11}, \mathbf{s}_{S22}$ – напряжения в арматуре.

Условие совместности деформаций бетона и арматуры для железобетонных слоев можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{B11} = e_{S11}; \quad e_{22} = e_{B22} = e_{S22}; \\ \mathbf{g}_{12} &= \mathbf{g}_{B12} = \mathbf{g}_{S12}; \quad \mathbf{g}_{13} = \mathbf{g}_{B13} = \mathbf{g}_{S13}; \quad \mathbf{g}_{23} = \mathbf{g}_{B23} = \mathbf{g}_{S23}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $e_{11}, e_{22}, \mathbf{g}_{12}, \mathbf{g}_{13}, \mathbf{g}_{23}$ – компоненты деформаций железобетонного слоя; $e_{B11}, e_{B22}, \mathbf{g}_{B12}, \mathbf{g}_{B13}, \mathbf{g}_{B23}$ – деформации бетона в железобетонном слое; $e_{S11}, e_{S22}, e_{S12}, e_{S13}, e_{S23}$ – деформации арматуры.

На основе выражений (34), (35) получим матрицу упругости для армированных слоев

$$[B] = [A]^{-1} + [B_S], \quad (36)$$

где $B_{S11} = E_S \mathbf{m}_{11}$; $B_{S22} = E_S \mathbf{m}_{22}$;

$$[B_S] = \begin{bmatrix} B_{S11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & B_{S22} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & sim & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix};$$

где E_S – модуль упругости материала арматуры; $\mathbf{m}_{11} = A_{Si} / S_{i11} h_S$, $\mathbf{m}_{22} = A_{Si} / S_{i22} h_S$ – коэффициенты армирования в направлении осей x_1 и x_2 соответственно; A_{Si} – площадь сечения арматурного стержня; S_{i11}, S_{i22} – шаг стержней, параллельных соответственно осям x_1 и x_2 ; h_S – суммарная толщина армированных слоев.

Заметим, что компоненты матрицы $[A]^{-1}$ в выражении (36) определяются по формулам (32), в которых вместо напряжений \mathbf{s}_{ij} должны фигурировать напряжения \mathbf{s}_{Bij} .

Бетонный слой с трещиной

Считаем, что трещины будут образовываться, если выполняется условие

$$\mathbf{s}_{11}^2 + \mathbf{s}_{22}^2 + 3 \cdot (\mathbf{t}_{12}^2 + \mathbf{t}_{23}^2 + \mathbf{t}_{13}^2) - (\mathbf{s}_{11} \mathbf{s}_{22}) - (R_{bt} + R_b)(\mathbf{s}_{11} + \mathbf{s}_{22}) + R_{bt} R_b > 0, \quad (37)$$

где $s_{11}, s_{22}, t_{12}, t_{13}, t_{23}$ – напряжения в бетоне в момент трещинообразования, рассчитанные для центра фиктивного слоя. Здесь R_{bt}, R_b – предел прочности бетона при осевом растяжении и сжатии соответственно.

Будем считать, что с появлением трещины неармированный бетонный слой в области данного конечного элемента перестает работать, т. е. примем

$$[B] = 0. \quad (38)$$

Это допущение (38) можно распространить и на случай бетонных слоев с пересекающимися трещинами.

Железобетонный слой с трещиной

В качестве критерия трещинообразования примем условие

$$s_{B11}^2 + s_{B22}^2 + 3 \cdot (t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{13}^2) - (s_{B11} s_{B22}) - (R_{bt} + R_b)(s_{B11} + s_{B22}) + R_{bt} R_b > 0, \quad (39)$$

где s_{Bij} – напряжения в бетоне железобетонного слоя, R_{bt}, R_b – предел прочности бетона при осевом растяжении и сжатии соответственно.

Угол между нормалью к трещине и осью c_1 может быть определен из соотношения $c_1 = \arctg \left[(s_{B11} - s_{11}) / t_{12} \right]$ ($s_{bt} = s_i + t_i$ – инварианты, определяемые согласно зависимостям [8]).

Заметим, что при возникновении параллельных друг другу трещин в области армированного слоя данного конечного элемента начально-изотропный бетон приобретает свойства ортотропии. В связи с этим утрачивается приемлемость потенциальных определяющих соотношений, ориентированная на нелинейно-упругий, разносопротивляющийся изотропный материал. Поэтому для треснувшего в армированных слоях бетона проведем некоторое изменение модели, заключающееся в следующем. Будем считать справедливой приемлемость потенциальных отношений [8] только для направлений вдоль трещин, где не нарушена целостность бетона. В указанном направлении физически нелинейные свойства бетона будем аппроксимировать секущим модулем упругости E_B и секущим коэффициентом поперечных деформаций n_B , определяемых из уравнения

$$e_{22}^* = A_{12}^* s_{B11}^* + A_{22}^* s_{B22}^* = (s_{B22}^* - n_B s_{B11}^*) / E_B, \quad (40)$$

т. е.

$$E_B = 1 / A_{22}^*; n_B = -A_{12}^* / A_{22}^*,$$

где A_{12}^*, A_{22}^* – компоненты матрицы податливостей, рассчитываемые по формулам (32), в которых напряжения s_{11} и s_{22} необходимо заменить на s_{B11}^*, s_{B22}^* соответственно; s_{Bij}^* – напряжения в бетоне, рассчитанные в ортогональной системе координат $X_1^* O X_2^*$, повернутой относительно исходной системы $X_1 O X_2$ на угол c_1 .

С учетом изложенного зависимости между деформациями и напряжениями в повернутой системе координат представим в виде

$$\{e^*\} = [A^*] \{s_B^*\}, \quad (41)$$

где

$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^* \\ e_{22}^* \\ g_{12}^* \\ g_{13}^* \\ g_{23}^* \end{Bmatrix}; [A^*] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^* & 0 & 0 \\ & Sim & & A_{44}^* & 0 \\ & & & & A_{55}^* \end{bmatrix}; \{s_B^*\} = \begin{Bmatrix} s_{B11}^* \\ s_{B22}^* \\ t_{B12}^* \\ t_{B13}^* \\ t_{B23}^* \end{Bmatrix};$$

$$A_{11}^* = 1/(E_B w); A_{12}^* = -n_B/E_B; A_{22}^* = 1/E_B;$$

$$A_{44}^* = A_{66}^* = 2(1+n_B)/(E_B w); A_{55}^* = 2(1+n)/E_B,$$

где модуль деформации бетона определим величиной $E_B w$ (w – функция, характеризующая степень разрушения бетона $0 < w \leq 1$).

Тогда, выполнив преобразование координат из системы $X_1^* O X_2^*$ в исходную, получим матрицу податливостей для треснувшего бетона [13] $[A^C]$.

Очевидно, что матрица упругости для арматуры треснувшего железобетонного слоя в исходной системе координат $X_1 O X_2$ имеет вид

$$[B_S^C] = \begin{bmatrix} E_{S11} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_{S22} m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & Sim & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

где E_{S11}, E_{S22} – секционные модули деформаций материала арматуры соответственно вдоль осей X_1 и X_2 .

Матрицу упругости железобетонного слоя представим в виде

$$[B] = [B_B^C] + [B_S^C], [B_B^C] = [A^C]^{-1}. \quad (43)$$

Для того чтобы уравнения (43) были замкнутыми, необходимо задать функцию поврежденности w . Эту функцию определим через коэффициент В. И. Мурашева y_s , учитывающий работу растянутого бетона на участках между трещинами [12]:

$$y_s = E_{sn} / (E_B w + E_{sn}), \quad (44)$$

где E_{sn} – модуль упругости арматуры в направлении вдоль нормали к трещине,

$$E_{sn} = E_{S11} m_{11} \cos^4 c_1 + E_{S22} m_{22} \sin^4 c_1. \quad (45)$$

Решая совместно уравнения (44) и (45) относительно w , получим

$$w = (E_{S11} m_{11} \cos^4 c_1 + E_{S22} m_{22} \sin^4 c_1) (1/y_s - 1) / E_B. \quad (46)$$

Для вычисления коэффициента y_s воспользуемся эмпирической формулой [1]

$$y_s = 1 - 0,7 R_{bt} / s_{11}^*, \quad (47)$$

в которой подразумевается, что

$$s_{B11}^* = 0,7 R_{bt}, \quad (48)$$

где s_{11}^* , s_{B11}^* – нормальные напряжения в железобетоне и бетоне на площадках, совпадающих с трещиной.

Расписав уравнение (48) с учетом правил преобразования координат напряжений s_{Bij} , получим нелинейное уравнение относительно w

$$\begin{aligned} & (B_{B11}^C e_{11} + B_{B12}^C e_{22} + B_{B16}^C g_{12}) \cos^2 c_1 + \\ & + (B_{B12}^C e_{12} + B_{B22}^C e_{22} + B_{B26}^C g_{12}) \sin^2 c_1 + \\ & + (B_{B16}^C e_{11} + B_{B26}^C e_{26} + B_{B66}^C g_{12}) \sin 2c_1 = 0, 7R_{bt}. \end{aligned} \quad (49)$$

Решение этого уравнения строится в рамках метода последовательных приближений. По рассчитываемой функции w и параметру u определяются матрица $[A^C]$ и компоненты матрицы упругости $[B]$.

Железобетонные слои с пересекающимися трещинами

Очевидно, что у железобетонных конечных элементов с трещинами при увеличении нагрузки происходит более интенсивный рост главных напряжений в направлениях вдоль трещин, где не нарушена сплошность бетона. В общем случае теоретически эти напряжения могут оказаться растягивающими. После образования первичных трещин и выполнения связанного с этим процессом ограничения (47) для случая, когда напряжения s_{B11} и s_{B22} являются растягивающими, на некотором этапе нагружения становится возможным повторное срабатывание критерия (39). При дальнейшем увеличении второго главного напряжения в бетоне s_{B2t} железобетонного элемента при $s_{B2t} > s_{B1t}$ могут возникнуть вторичные трещины, пересекающие первичные и перпендикулярные направлению второго главного напряжения s_{B2t} . Здесь s_{B1t} – первые главные напряжения в бетоне, определяемые по формуле

$$s_{B1t} = [s_{B11} + s_{B22} + \sqrt{(s_{B11} - s_{B22})^2 + 4t_{12}^2}] / 2,$$

а s_{B2t} – вторые главные напряжения в бетоне, определяемые по формуле

$$s_{B2t} = [s_{B11} + s_{B22} - \sqrt{(s_{B11} - s_{B22})^2 + 4t_{12}^2}] / 2. \quad (50)$$

В случае непересекающихся трещин полосы бетона между ними выполняют две важные функции. С одной стороны, из-за сцепления бетона с арматурой происходит уменьшение средних напряжений и деформаций арматуры на участках между трещинами. С другой стороны, эти полосы бетона совместно с арматурой воспринимают усилия, действующие на площадках, нормальных к трещинам, и определяют деформации элемента вдоль трещины. При наличии пересекающихся трещин последняя функция полностью утрачивается, а первая – заметно ослабевает, так как сцепление бетона с арматурой становится менее прочным. Поэтому сделаем следующее упрощение модели. Будем считать, что в случае пересекающихся трещин в рамках данного конечного элемента работает только арматура, т. е. матрица упругости принимает вид

$$[B] = [B_S^{\bar{n}}], \quad (51)$$

где матрица $[B_S^{\bar{n}}]$ определяется согласно условию (42).

3. Алгоритм решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) железобетонных оболочек различной геометрической конфигурации

Общий алгоритм решения задачи об определении НДС железобетонных оболочек различной геометрической конфигурации условно расчленим на следующие подалгоритмы:

1. Формирование задания на расчет оболочечной конструкции.
2. Формирование матрицы связи узлов конечных элементов.
3. Формирование граничных условий.
4. Задания нагружения оболочки.
5. Формирование матриц жесткости конечных элементов.
6. Расчет вектора узловых перемещений.

Такое расчленение алгоритма решения задачи позволяет повысить помехозащищенность вычислительного процесса и дает возможность искусственно прервать ход решения, оценить динамику сходимости, корректировать дальнейшие вычислительные процессы, начиная их с прерванной операции. Решение задачи предполагалось методом пошаговых нагружений в сочетании с методом «переменных параметров упругости» – вариантом метода последовательных приближений [2].

Формирование задания на расчет оболочки представляет собой процесс определения следующих исходных данных:

- задание геометрических параметров оболочки;
- определение толщины неармированной и армированной частей оболочки;
- вычисление количества фиктивных слоев в армированной части;
- определение констант потенциала деформаций W_1 , характеризующих напряженно-деформированное состояние бетона;
- задание модуля упругости и предела текучести материала арматуры армированных элементов;
- определение коэффициентов армирования в направлении осей x_1, x_2 ;
- задание величины допустимой погрешности для расчетных значений прогибов в качестве критерия сходимости решения.

Формирование матрицы связи узлов конечных элементов реализует следующие функции:

- а) производит автоматизированное разбиение конструкции на треугольные конечные элементы, создавая ансамбль конечных элементов;
- б) выполняет нумерацию конечных элементов;
- в) определяет связь номеров узлов в ансамбле элементов с нумерацией узлов, принятой внутри конечного элемента, и формирует матрицу связи узлов.

Формирование граничных условий представляет собой присвоение нулевых значений заданному подмножеству вектора узловых перемещений $\{q\}$ ансамбля элементов. Это подмножество перемещений генерируется в ответ на указание последовательности узлов ансамбля (если узлы последовательности лежат на одной прямой, достаточно задать только номера его первого и последнего узлов) и номеров перемещений согласно принятой их нумерации внутри узла.

Операция задания нагрузки формирует вектор узловых сил для заданной области ансамбля, которая, в частности, может быть сведена к одному узлу (сосредоточенная сила в точке).

При начальном формировании матриц жесткости конечных элементов рассматриваются всего два типа фиктивных слоев: бетонные слои без трещин и железобетонные слои без трещин. Для этих слоев матрицы упругости рассчитываются по формулам (33) и (36). При этом коэффициенты начальной матрицы податливостей бетона вычисляются по правилам (32) для случая нулевых компонент тензора напряжений.

Расчет матрицы жесткости конечного элемента представляет собой последовательность следующих операций:

- расчет матрицы $[D]$ интегральных жесткостных характеристик по формулам (7);
- расчет матрицы $[E] = [D]^{-1}$;
- расчет матрицы $[H]$ по формулам (15);
- расчет матрицы $[H]^{-1}[T]$;
- непосредственное вычисление элементов матрицы жесткости конечного элемента $[K]$ по формулам (19).

Если формирование матриц жесткости не является начальным, то вычислительный процесс усложняется. В этом случае необходимо хранить в памяти векторы узловых перемещений $\{q\}$ для каждого конечного элемента и матрицы упругости их фиктивных слоев $[B]_i$ ($i = 1, 2, \dots, n_c$, где n_c – количество фиктивных слоев), рассчитанные на предыдущей итерации. Тогда расчет вектора обобщенных сил $\{M\}$ для центра конечного элемента ведется в следующем порядке:

- расчет матрицы $[H]^{-1}[T]$;
- определение вектора коэффициентов $\{b\}$ по формулам (20);
- вычисление компонент вектора $\{M\}$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, т.е. в центре конечного элемента.

Вектор обобщенных деформаций для центра элемента рассчитывается непосредственно из решения уравнения (21), после чего определяются компоненты тензоров деформаций и напряжений для каждого фиктивного слоя с использованием выражений (3) и (5). Дополнительно для армированных слоев вычисляются напряжения в бетоне и в арматуре в соответствии с принятыми техническими гипотезами.

Фиктивные слои без трещин анализируются на появление трещин, а слои с трещинами – на появление вторичных трещин, пересекающих первые. В результате анализа устанавливается класс фиктивного слоя конечного элемента, в соответствии с которым корректируется матрица упругости. После перебора всех фиктивных слоев рассчитывается матрица жесткости данного конечного элемента и происходит ее включение в глобальную матрицу жесткости.

Расчет вектора узловых перемещений для всего ансамбля конечных элементов выполняется согласно методу LDL^T – факторизации для решения линейных алгебраических уравнений [2]. В пределах каждого шага нагрузки и внутри каждой итерации по методу «переменных параметров упругости» решение системы уравнений заканчивается, если все переменные в течение итерации изменяются менее чем на 10^{-6} от предыдущего значения. После того как решение сошлось, фиксируются следующие параметры: вектор узловых перемещений ансамбля; деформации и напряжения для

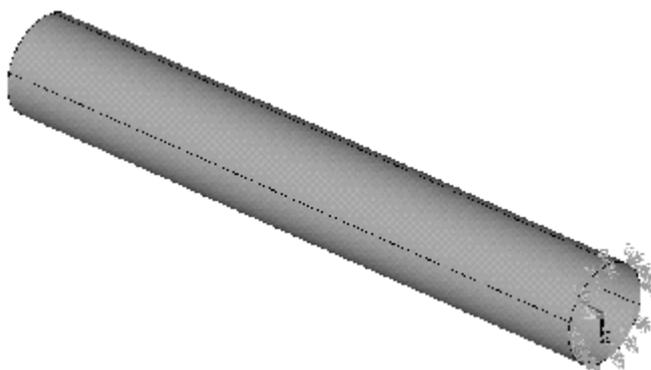
центра фиктивных слоев конечных элементов, характеристики трещинообразования для каждого фиктивного слоя: c_1 , w , Y_s , вид трещин, вектор обобщенных сил для центра конечного элемента.

Разработанный алгоритм решения реализован на алгоритмическом объектно-ориентированном языке высокого уровня C++, с применением среды разработки Visual C++ фирмы Microsoft.

4. Определение НДС трубчатых элементов при чистом кручении

Для того чтобы показать работу разработанной математической модели совместно с приведенным выше алгоритмом расчета напряженно-деформированного состояния железобетонных оболочек, была решена задача о чистом кручении трубчатых железобетонных образцов (рис. 3).

Для проверки теории, анализа и сравнения использовались данные экспериментов, выполненных в НИИЖБ Э. Г. Елагиным. Эксперименты проводили на образцах кольцевого сечения наружным диаметром 0,3 м, внутренним – 0,2 м, длиной 3,34 м. Арматура для продольных стержней – класса А-III (предел текучести $s_p = 390$ МПа, модуль упругости $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа), диаметром 12 мм, поперечная – класса А-I (предел текучести $s_p = 235$ МПа, модуль упругости $E_s = 2,1 \cdot 10^5$ МПа), диаметром 6,5 мм. Кубиковая прочность бетона принималась равной от 27 до 44 МПа, также варьировались такие параметры, как количество стержней в сечении для продольной арматуры и расстояние между арматурными стержнями для поперечной арматуры. Величина максимального крутящего момента, для которого проводился расчет, в зависимости от образца колебалась от 25 до 28 кН·м.



**Рис. 3. Характер закрепления исследуемых образцов:
жесткое защемление на одном из концов трубчатого образца**

Было испытано десять образцов: шесть из них с ненапрягаемой арматурой (образцы ОК-7, ОК-2, ОК-4, ОК-14 и ОК-15) и четыре – с напрягаемой (ОНК-7, ОНК-8, ОНК-14, ОНК-15), в которых предварительно напряжению подвергались 50% продольных стержней. Испытание на кручение производили на специальной установке НИИЖБ. Подробные данные опытных образцов, а также методика их испытания приведены в работах Э. Г. Елагина [5]. В диссертации решены задачи для следующих образцов: ОК-14, ОК-4, ОК-7, ОНК-7. Некоторые данные об образцах приведены в табл. 1.

Значения констант определены по данным эксперимента, как показано в работах А. А. Трещева и Н. М. Матченко [8].

Таблица 1

Образец	Продольная арматура	Поперечная арматура	Кубиковая прочность бетона на сжатие	Наличие преднапряжения в арматуре
ОК-4	А-III; диаметром 12 мм; 12 стержней в сечении;	А-I; диаметром 6,5 мм; шаг 0,06 м	28,4 МПа	нет
ОК-14	А-III; диаметром 12 мм; 16 стержней в сечении;	А-I; диаметром 6,5 мм; шаг 0,09 м	37 МПа	нет
ОК-7	А-III; диаметром 12 мм; 10 стержней в сечении;	А-I; диаметром 6,5 мм; шаг 0,05 м	28,4 МПа	нет
ОНК-7	А-III; диаметром 12 мм; 10 стержней в сечении;	А-I; диаметром 6,5 мм; шаг 0,05 м	37 МПа	да

Значения коэффициентов армирования m_{11} и m_{22} для образцов принимались в соответствии с данными табл. 2.

Таблица 2

Образец	m_{11}	m_{22}
ОК-4	0,0553	0,0346
ОК-14	0,0369	0,0462
ОК-7	0,0664	0,0289
ОНК-7	0,0664	0,0289

В своей работе Н. И. Карпенко [7] показал, что правильность модели в общем виде могут характеризовать углы закручивания. Результаты расчета углов закручивания по разработанной теории для некоторых вышеупомянутых образцов приведены ниже – на рис. 4–7.

На рис. 4–7 штрихпунктирной линией показаны результаты, полученные с применением разработанной теории расчета НДС, сплошной линией – результаты по теории Н. И. Карпенко, пунктирной линией данные эксперимента НИИЖБ.

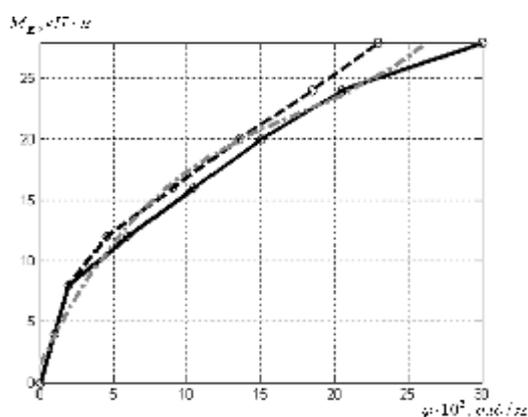


Рис. 4. Образец ОК-14

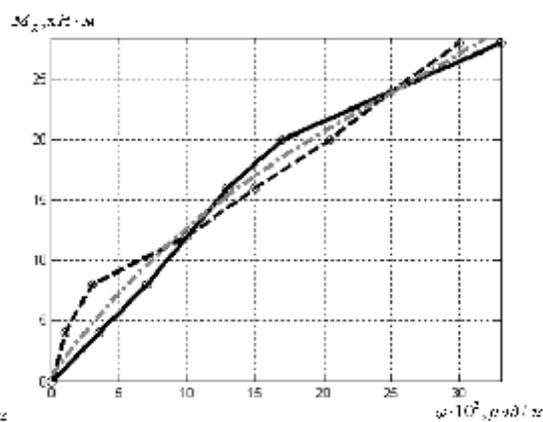


Рис. 5. Образец ОК-4

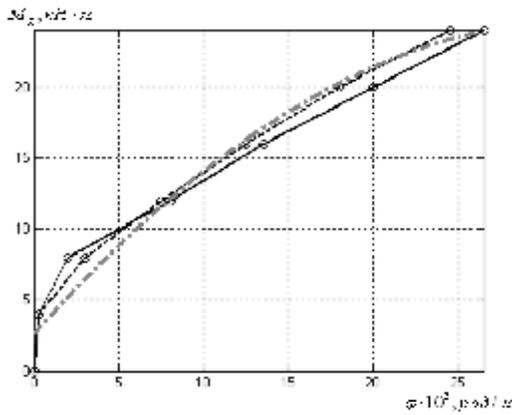


Рис. 6. Образец ОК-7

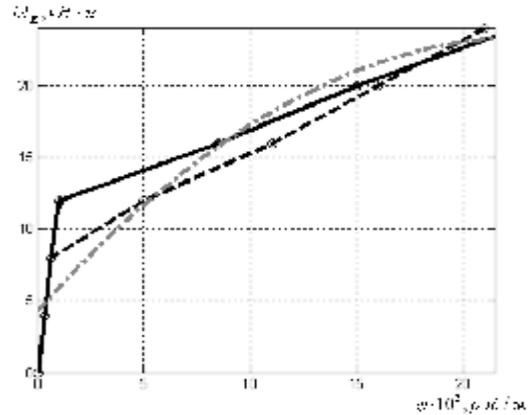


Рис. 7. Образец ОНК-7

На рис. 8–9 показаны изменения длины образца от действия крутящего момента M_K для различных образцов: ОК-4, ОНК-7. Следует заметить, что изменение длины образца является эффектом, присущим разносопротивляющимся и дилататирующим материалам, таким как бетон. В случае не учета разносопротивляемости эффект изменения длины образца от чистого кручения отсутствует.

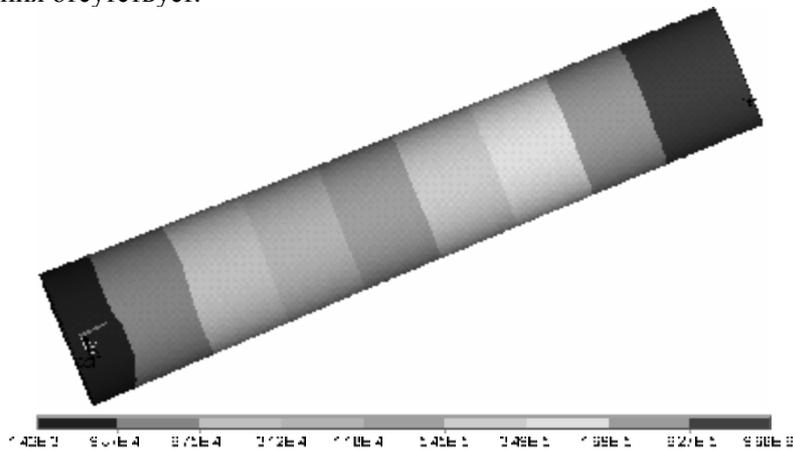


Рис. 8. Перемещения вдоль образующих цилиндра образца ОК-14 (м)

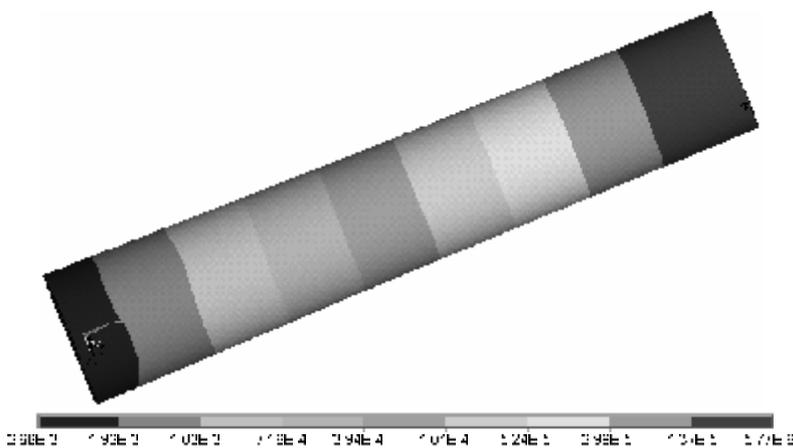


Рис. 9. Перемещения вдоль образующих цилиндра образца ОНК-7 (м)

На рис. 10 показана схема трещинообразования для исследуемых образцов. Следует отметить, что полученная теоретическая схема полностью соответствует данным, полученным в ходе экспериментов НИИЖБ [5], и результатам, полученным Н. И. Карпенко [7].

Линии, вдоль которых образуются трещины
(теоретические данные, полученные с помощью
разработанной модели)

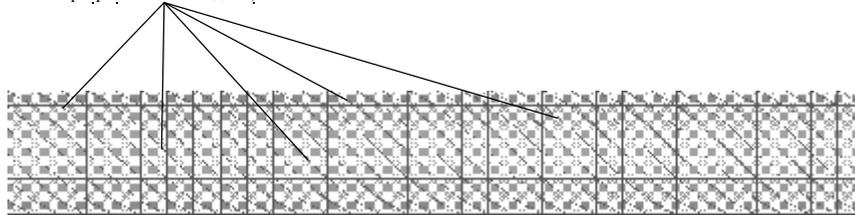


Рис. 10. Схема трещинообразования в образцах ОК-14, ОК-4, ОК-7, ОК-7

На рис. 11–12 показана зависимость углов закручивания j от крутящего момента M_K на различном расстоянии от зоны защемления: 20%, 40%, 70% и 90% длины образца $l = 3,34 \text{ м}$.

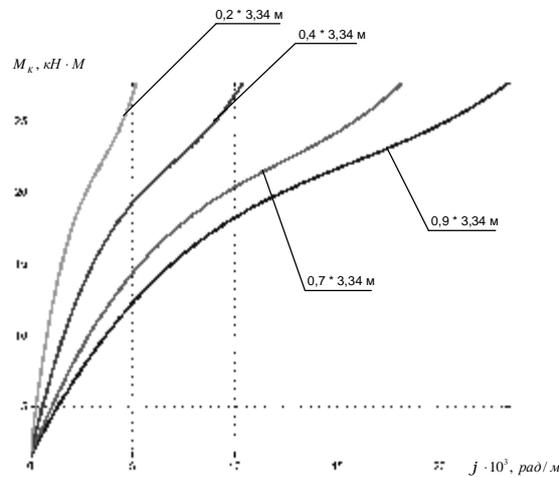


Рис. 11. Зависимость углов закручивания j от крутящего момента M_K (ОК-14)

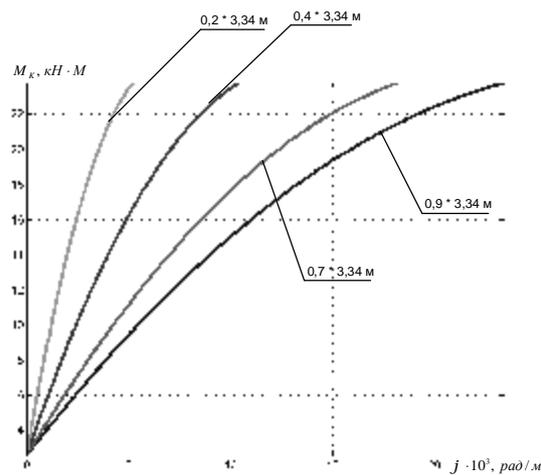


Рис. 12. Зависимость углов закручивания j от крутящего момента (ОК-7)

Сравнение с экспериментальными данными и теорией Н. И. Карпенко свидетельствует об адекватности разработанной механико-математической модели, правильности работы разработанного алгоритма и его реализации на ЭВМ, а также возможности ее использования при решении задачи об определении напряженно-деформированного состояния железобетонных оболочек при кручении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гениев, Г. А.* Теория пластичности бетона и железобетона / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.
2. *Голованов, А. И.* Расчет напряженно-деформированного и предельного состояния железобетонных конструкций / А. И. Голованов, Р. Ф. Закиров и др. // Труды Междунар. конф. «Численные и аналитические методы расчета конструкций». – Самара, 1998. – С. 67–71.
3. *Голованов, А. И.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / А. И. Голованов, М. С. Корнишин. – Казань, 1989. – 270 с.
4. *Гольденблат, И. И.* Критерии прочности конструкционных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Копнов. – М. : Машиностроение, 1968. – 192 с.
5. *Елагин, Э. Г.* Исследование работы железобетонных элементов кольцевого сечения с напрягаемой и ненапрягаемой арматурой при совместном действии изгибающего и крутящего моментов / Э. Г. Елагин // Влияние скорости нагружения, гибкости и крутящих моментов на прочность железобетонных конструкций. – М. : Стройиздат, 1970.
6. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
7. *Карпенко, Н. И.* Теория деформирования железобетона с трещинами / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1976. – 208 с.
8. *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – М. ; Тула : РААСН-ТулГУ, 2000. – 149 с.
9. *Норри, Д.* Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
10. *Секулович, М.* Метод конечных элементов / М. Сенкевич. – М. : Стройиздат, 1993. – 664 с.
11. *Теличко, В. Г.* Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Известия вузов. Строительство / ИГАСУ. – 2003. – № 5. – С. 17–23.
12. *Теличко, В. Г.* Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций из железобетона / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Известия ТулГУ. Сер. Строительные материалы, конструкции и сооружения. – 2005. – Вып. 8. – С. 147–161.
13. *Теличко, В. Г.* Расчет напряженно-деформированного состояния железобетонных оболочек различного типа / В. Г. Теличко // Материалы 2-й Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики». – Тула : Гриф и К, 2005. – С. 87–94.
14. *Шмельтер, Я.* Метод конечных элементов в статике сооружений / Я. Шмельтер, М. Дацко, С. Добросинский, М. Вечорек. – М. : Стройиздат, 1986. – 220 с.
15. *Cook, R. D.* Two hybrid elements for analysis of thick thin and sandwich plates / R. D. Cook // Int. J. num. Meth. Engng. – 1972. – Vol. 5. – P. 277–288.
16. *Tong, P.* A variation principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution / P. Tong, T. H. H. Pian // Int. J. Solids Struct. – 1969. – P. 463–472.