Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 124–128

Н. В. Минаева, А. И. Шашкин

АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Воронежский государственный университет инженерных технологий,

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается проблема существования квазистатического процесса, описываемого решением системы дифференциальных уравнений в матричной форме. Сформулирована и доказана теорема, позволяющая проводить исследование указанной проблемы. Показано, что если внешние воздействия являются потенциальными, то изучение можно проводить на основе теоремы о неявных функциях в рамках статики.

Ключевые слова: квазистатический процесс, теорема о неявной функции, напряжение, деформация, упругость, область притяжения.

УДК: 531.3

При рассмотрении квазистатических процессов [1], [2], [3] пренебрегают скоростью изменения параметра внешнего воздействия и, как следствие, изменением во времени характеристики, описывающей поведение рассматриваемого объекта. Тем самым предполагается, что скорость изменения характеристики, описывающей поведение объекта, непрерывно зависит от скорости изменения характеристики внешнего воздействия на него. Следовательно, возникает проблема изучения этой зависимости, т.е. при каких значениях параметра внешнего воздействия процесс будет оставаться квазистатическим. Границу области изменения внешнего воздействия, в пределах которой изучаемая непрерывность зависимости выполняется, будем называть границей области существования квазистатического процесса.

Известны работы по сформулированной проблеме, проведенные на основе различных критериев устойчивости, например [3], [4], [5], [6]. Но в них, как правило, на определенном этапе исследований задавалась траектория нагружения, и параметры нагрузок переставали быть независимыми.

Пусть поведение исследуемого объекта описывается решением w системы дифференциальных уравнений, записанной в матричной форме

$$\dot{w} = F(w, p(t)) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\dot{w}(0) = w^0, \tag{2}$$

где $p(t)$ – функция, характеризующее внешнее воздействие, t – время. Решения задачи (1),(2) будем искать в виде

$$w = v + \eta^{(j)} \qquad (1 \le j \le s), \tag{3}$$

где статическая составляющая $\eta^{(j)}$ является одним из s решений системы уравнений

$$F(u, p(t)) = 0, \tag{4}$$

Поступила 15.10.2014

а динамическая составляющая v является решением системы уравнений, полученной в результате подстановки (3) в (1) и (2), т. е.

$$\dot{v} = F(v + \eta^{(j)}, p) - \frac{d\eta^{(j)}}{dp}\dot{p}, \tag{5}$$

$$\dot{v}(0) = w^0 - \eta^{(j)}(p((0)). \tag{6}$$

Пусть для (5) выполняется

$$\left|\frac{d\eta^{(j)}}{dp}\right| \leq M, \quad p^0 \leq p(t) \leq p^1. \tag{7}$$

Будем считать, что тривиальное решение уравнения

$$\dot{v} = F(v + \eta^{(j)}, c) \tag{8}$$

асимптотически устойчиво при любом $c \in [p^0, p^1]$.

Будем говорить, что при $p \in D$ существует квазистатический процесс, описываемый системой уравнений (1), если для любого $\varepsilon > 0$, любых $p^0 \in D$, $p^1 \in D$ и любых w^0 существует соответствующее решение уравнения (4), такая функция $r(t)$ и величина t_0, что из условий

$$r(t) = p^0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_0, \tag{11}$$

$$p(t) = r(t) \quad \text{при} \quad t \geq t_0, \tag{12}$$

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = p^1 \tag{13}$$

следует, что

$$|v(t)| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0. \tag{14}$$

Здесь то решение уравнения (4) названо «соответствующим», в область притяжения которого попадает точка (p^0, w^0). Используя вышесказанное, сформулируем следующую теорему:
Теорема

Если $p^0 \in D$, $p^1 \in D$ и область D не содержит особых точек системы уравнений (4), т. е. $\left|\frac{d\eta^{(j)}}{dp}\right| \leq M$ при всех $1 \leq j \leq s$, а тривиальное решение системы уравнений (8) при соответствующем $\eta^{(j)}$ асимптотически устойчиво при всех $c \in D$, то квазистатический процесс существует (в смысле (11)–(14)).

Доказательство будем проводить путем построения $r(t)$ в виде ступенчатой функции. Пусть величины p^0 и w^0 таковы, что точка $v(0) = w^0 - u(p^0)$ попадает в область притяжения некоторого решения $u = \eta^{(j)}$ уравнения (4). Поскольку тривиальное решение уравнения (8) для (4) асимптотически устойчиво, то для заданного $\varepsilon > 0$ при каждом $p \in D$ найдется функция

$$\delta = \delta(p). \tag{15}$$

Обозначим

$$\min_{p\in D} \delta(p) = \delta_0. \tag{16}$$

Предположим, что начальное условие w^0 таково, что

$$\delta_0 < |v(0)| = |w(0) - u(p^0)|. \tag{17}$$

Зафиксируем в момент времени $t = 0$ внешнее воздействие, т.е. пусть $p \equiv p^0$. Из асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений (8) следует, что найдется такой момент времени $t = t_0$, когда будет выполняться условие

$$|v(t)| < \delta_0 - \delta_1 \quad (0 < \delta_1 < \delta_0) \quad \text{при} \quad t \geq t_0. \tag{18}$$

Пусть при $p \equiv r_1(t)$ ($r_1(t)$ – некоторая возрастающая функция при $t \geq t_0$ для случая, когда $p^1 > p^0$) процесс будет описываться решением системы (5). Предположим, что при $t = t_0$ это решение удовлетворяет условию $|v(t_1)| = \delta_0$ ($|v| < \delta_0$) при $t \geq t_0$. Зафиксируем в момент $t = t_1$

функцию $p(t)$. Тогда при $t \geq t_1$ процесс будет описываться снова решением уравнения (8) при $p(t) \equiv r_1(t_1)$. Из асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений (8) при $p(t) \equiv r_1(t_1)$ следует, что $|v(t)| < \varepsilon$ при $t = t_1$ и что найдется величина t_2 такая, что будет выполняться неравенство

$$|v(t)| < \delta_0 - \delta_1 \quad \text{при} \quad t \geq t_2. \tag{19}$$

При $p \equiv r_2(t)$ ($r_2(t)$ – возрастающая функция при $t \geq t_2$) процесс снова будет описываться решением системы уравнений (5). Предположим, что при $t = t_3$ это решение удовлетворяет условию $|v(t)| = \delta_0$. Зафиксируем в момент времени $t = t_3$ функцию $p(t) \equiv r_2(t_3)$ и т. д. В результате будет получена ступенчатая функция $p = r(t)$. Из приведенного построения функции $r(t)$ следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ восполняется условие $|v(t)| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ и $p = r(t)$, что и требовалось доказать (поскольку $t_1 - t_2 > 0$, $t_3 - t_2 > 0$ и т.д., то $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = p^1$).

Итак, условие существования квазистатического процесса при изменении внешнего воздействия от p^0 до p^1 сводится к исследованию попадания в этот интервал особых точек уравнения (4), конечно же, при условии, что тривиальное решение системы уравнений (8) асимптотически устойчиво. Как следует из теоремы о неявных функциях [7], существование и ограниченность $\dfrac{d\eta^{(j)}}{dp}$ будет выполняться, если

$$|F'(\eta^{(j)}, p) \neq 0. \tag{20}$$

Очевидно, что в том случае, когда внешние силы являются, например, потенциальными, для любых значений величин p^0 и w^0 найдется соответствующее им решение $\eta^{(j)}$, а потеря устойчивости тривиального решения уравнения (8) происходит при переходе p через статически особую точку, т.е. не выполняется условие (20). Следовательно, для случая, когда внешние силы являются потенциальными, условие (20) при $p \in D$ при всех значениях величины j является достаточным для того, что бы при $p \in D$ существовал квазистатический процесс в смысле (11)–(14).

Очевидно, что для систем с распределительными параметрами, т. е. когда зависит не только от времени, но и от пространственных переменных, требование существования и ограниченности $\dfrac{d\eta^{(j)}}{dp}$ приводит к проверке выполнения условий теоремы о неявных функциях для дифференциальных уравнений статики [8], [9] Но при этом следует сделать некоторые ограничения на выбор пространства состояний [10]:

Будем считать, что $F : Y \to Z$, где Y – область банахова пространства U (U, Z – банаховы пространства), является нелинейным фредгольмовым отображением нулевого индекса, и наряду с этим выполнены условия:
а) $U \subset Z \subset H$ – тройка непрерывно вложенных пространств (H – гильбертово пространство);
б) U плотно в H. Рассматриваются только те пары пространств U, Z, в которых производная Фреше отображения F является изоморфизмом.

Подобные пространства с соответствующими нормами обычно используются при решении задач механики деформируемого твердого тела, например, $C^2([a,b], \mathrm{R}^m)$, $C^4([a,b], \mathrm{R}^m)$, пространства Гельдера, гильбертова пространства и др.

Отметим, что в том случае, когда p является, например, n-мерным вектором, то в уравнении (5) вместо $\dfrac{d\eta^{(j)}}{dp}p$ будет записано $\sum\limits_{i-1}^{n} \dfrac{d\eta^{(j)}}{dp_i}\dot{p}_i$, а в определении (11)–(14) функция $r(t)$ будет характеризовать изменение внешних воздействий во времени вдоль траектории нагружения.

Если для некоторого решения $u = \eta^{(j)}(p)$ задачи (4) условие (20) выполняется при всех $p \in D$ и при некотором $p^{(2)} \in D$ тривиальное решение задачи (8) асимптотически устойчиво, то оно будет асимптотически устойчиво и при любом $p \in D$, если внешние силы являются потенциальными. Следовательно, выполнение условия (20) в этом случае является достаточным

условием для возможности квазистатического осуществления процесса, соответствующего решению $u = \eta^{(j)}(p)$ задачи (4) для любой траектории, не выходящей за границу области D. Величина w^0 при этом такова, что точка (p^0, w^0) должна попадать в область притяжения тривиального решения задачи (8). Отметим, что в качестве значения $p^{(2)}$ может быть, например, $p^{(2)} = 0$, т. к. для состояния исследуемого объекта при отсутствии внешнего воздействия тривиальное решение уравнения (8) должно быть асимптотически устойчиво.

Итак, в этом случае граница области существования квазистатического поведения изучаемого объекта, соответствующего решению $u = \eta^{(j)}(p)$ задачи (4), находится в рамках статики, исходя из теоремы о неявных функциях для задачи (4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Серенсен, С. В.* Квазистатическое и усталостное разрушение материалов и элементов конструкций. Избранные труды / С. В. Серенсен. – Киев : Наукова думка, 1985. – Т. 3. – 232 с.

[2] *Терегулов, И. Г.* Квазистатический изгиб и устойчивость оболочек при ползучести (теория наследственности) / И. Г. Терегулов, Р. З. Муртазин // Исследование по теории пластин и оболочек. – Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1964. – С. 145–158.

[3] *Петренко, Т. П.* Решение квазистатической задачи изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / Т. П. Петренко // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. – No. 33 (5). – P. 38–43.

[4] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : Изд-во ТвГТУ, 2002. – 300 с.

[5] *Клюшников, В. Д.* Устойчивость упругих систем / В. Д. Клюшников. – М. : Наука, 1980. – 244 с.

[6] *Gotsev, D. V.* Stability of an equilibrium state of multi-layered lining of the vertical in massif with the elasto-plastic properties / D. V. Gotsev, A. V. Kovalev, A. N. Sporykhin // Journal of applied mechanics. – 2003. – Т. 39. – № 3. – P. 45–51.

[7] *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Изд-во техн.-теор. лит., 1956. – Т. 1,2. – 464 с.

[8] *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1976. – 542 с.

[9] *Минаева, Н. В.* Адекватность математических моделей деформируемых тел / Н. В. Минаева. – М. : Научная книга, 2006. – 235 с.

[10] *Зачепа, В. Р.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В. Р. Зачепа, Ю. И. Сапронов. – Воронеж : Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. – 185 с.

Минаева Надежда Витальевна,

доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

`e-mail:` minaeva@yandex.ru

Шашкин Александр Иванович,

доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики и механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

N. V. Minaeva, A. I. Shashkin

ANALYSIS AND STUDY OF THE PROBLEM OF EXISTENCE OF A QUASI-STATIC PROCESS

Voronezh state University of engineering technologies

Abstract. Discusses the problem of the existence of a quasi-static process, described by the solution of a system of differential equations in matrix form. Formulated and proved a theorem that allows to study this problem. It is shown that if the external effects are potential, the study can be conducted on the basis of the theorem of implicit functions in the framework of statics.

Keywords: quasi-static process, the theorem on implicit functions, stress, strain, elasticity, area attraction.

REFERENCES

[1] *Sorensen, S. C.* Quasi-static and fatigue failure of materials and construction elements. Selected works / S. C. Sorensen. – Kiev : Nauk. Dumka, 1985. – Vol. 3. – 232 p.

[2] *Teregulov, I. G.* Quasi-static bending and stable-stability of shells under creep (theory of heredity) / I. G. Teregulov, R. H. Murtazin // Research on the theory of plates and shells. – Kazan : Publishing house of Kazans. University, 1964. – P. 145–158.

[3] *Petrenko, T. P.* The quasi-static Solution of the problem of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of elasticity theory / T. P. Petrenko // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. – No 33 (5). – P. 38–43.

[4] *Zubchaninov, V. G.* the Mathematical theory of plasticity / V. G. Zubchaninov. – Tver. Publishing house of TvSTU, 2002. – 300 p.

[5] *Klyushnikov, V. D.* Stability of elastic systems / V. D. Klyushnikov. – M. : Nauka, 1980. – 244 p.

[6] *Gotsev D.V., Kovalev A.V., Sporykhin A.N.* Stability of an equilibrium state of multi-layered lining of the vertical in massif with the elasto-plastic properties / D. V. Gotsev, A. V. Kovalev, A. N. Sporykhin // Journal of applied mechanics, 2003. – T. 39. – № 3. – P. 45–51.

[7] *Fikhtengolc, G. M.* Fundamentals of mathematical analysis / G. M. Fikhtengolc. – M. : Izd. technology.-theory. lit., 1956. – Vo 1,2. 464 p.

[8] *Kolmogorov, A. N.* Elements of the theory of functions and functional analysis / A. N. Kolmogorov. – M. : Nauka, 1976. – 542 p.

[9] *Minaeva, N. V.* The adequacy of mathematical models of deformable bodies / N. V. Minaeva. – M. : Scientific book, 2006. – 235 p.

[10] *Zachapa, C. R.* Local analysis predgornovy equations / C. R. Zachapa, Y. I. Sapronov. – Voronezh : Publishing house of VSU., 2002. – 185 p.

Minaeva, Nadezhda Vitalevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh

Shashkin, Aleksander Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Dean of the faculty of applied mathematics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh